3　相対論的な古典場

様々な対称性の中でも、ローレンツ対称性はとりわけ重要である。素粒子論や宇宙論の場合はいうまでもないが、すでに見たように、物性論においても相対論的な場が現れる場合がよくある。この章では、

- 相対論的な場の分類
- 相対論的な (自由) 場の作用の構成

を論ずる。

3.1　ローレンツ群とその表現

相対論的な場＝ローレンツ変換に対して綺麗に (共変に) 変換する場。
数学的には、ローレンツ群 (ローレンツ代数) の表現を場の空間上で構成する問題。

3.1.1 群とそのリー代数の表現: $SU(2)$ の場合の例

□ **群 $\boldsymbol{SU(2)}$**:

$$\boldsymbol{U \in G = SU(2)} \qquad \text{(special unitary)}$$
$$\Leftrightarrow \qquad \boldsymbol{U = 2 \times 2}\,\text{行列}$$
$$\boldsymbol{U^\dagger U = 1} \quad \text{unitary}\,, \qquad \boldsymbol{\det U = 1} \quad \text{special} \tag{1}$$

そのような行列の集合は群をなす：

$$\boldsymbol{U_i \in SU(2)} \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{U_1 U_2 \in SU(2)}$$
$$\boldsymbol{U^{-1} = U^\dagger} \quad \text{逆の存在} \qquad \boldsymbol{(U_1 U_2) U_3 = U_1 (U_2 U_3)} \quad \text{associativity} \tag{2}$$

実際、

$$\boldsymbol{(i)} \quad \boldsymbol{(U_1 U_2)^\dagger (U_1 U_2) = U_2^\dagger U_1^\dagger U_1 U_2 = 1}$$
$$\boldsymbol{(ii)} \quad \boldsymbol{\det(U_1 U_2) = \det U_1 \, \det U_2 = 1}$$

$\boldsymbol{SU(2)}$ の元の具体形

$$\boldsymbol{U = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}}$$

$$\det \boldsymbol{U = 1 \quad \Rightarrow \quad ad - bc = 1} \tag{3}$$

$$\boldsymbol{U^\dagger U = 1 \quad \Rightarrow \quad |a|^2 + |c|^2 = |b|^2 + |d|^2 = 1} \tag{4}$$

$$\boldsymbol{0 = a^* b + c^* d} \tag{5}$$

まず $\boldsymbol{c \neq 0}$ の場合を考える。(5) より $\boldsymbol{d = -(a^*/c^*)b}$。これを (3) に入れ、(4) を用いると

$$\boldsymbol{ad - bc = -\frac{|a|^2}{c^*}b - bc = -\frac{b}{c^*}(|a|^2 + |c|^2) = -\frac{b}{c^*} = 1}$$

$$\therefore \qquad \boldsymbol{-b = c^*} \tag{6}$$

これと $\boldsymbol{d = -(a^*/c^*)b}$ を併せると、$\boldsymbol{d = a^*}$ を得る.
また、$\boldsymbol{-b = c^*}$ を再度(4)に入れると、第1式、第2式ともに、$\boldsymbol{|a|^2 + |b|^2 = 1}$ なる条件を与える。従って

$$\boxed{\boldsymbol{U} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} \\ -\boldsymbol{b}^* & \boldsymbol{a}^* \end{pmatrix}, \qquad |\boldsymbol{a}|^2 + |\boldsymbol{b}|^2 = \mathbf{1} \qquad (7)}$$

$\boldsymbol{c} = \mathbf{0}$の場合は、この特別な場合に帰着する。
実パラメーターの数は3個。

□ **行列表現**：

群$\boldsymbol{G}$の$\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{n}$行列による表現とは次のように、群の演算の規則が、$\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{n}$行列で実現されることを言う：

$$\boldsymbol{\rho}:\ \boldsymbol{U} \in \boldsymbol{G} \quad \longrightarrow \quad \boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{U}) = \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{n}\ \text{行列} \tag{8}$$

$$\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{U}_1 \boldsymbol{U}_2) = \boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{U}_1)\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{U}_2) \tag{9}$$

□ $\boldsymbol{su}(\mathbf{2})$**:** $\boldsymbol{SU}(\mathbf{2})$**の**$\mathbf{Lie}$**代数**：

単位元の無限小近傍では$\boldsymbol{U = e^{iX}}$と書ける。すなわち、

$$\boldsymbol{U = 1 + iX + \mathcal{O}(X^2)} \tag{10}$$

Unitary性より

$$\boldsymbol{U^\dagger U \simeq (1 - iX^\dagger)(1 + iX) \simeq 1 + i(X - X^\dagger) = 1}$$

$$\therefore \qquad \boldsymbol{X^\dagger = X} \qquad \boldsymbol{X}\text{はエルミート行列} \tag{11}$$

次に$\boldsymbol{\det U = 1}$の条件を考える。これには、次の公式が有用。
対角化可能な行列$\boldsymbol{Y}$に対して

$$\boxed{\boldsymbol{\det e^Y = e^{\mathsf{Tr}\, Y}} \qquad (12)}$$

証明は簡単。両辺とも相似変換に対して不変であるから、$\boldsymbol{Y}$が対角行列の場合を考えれば十分。その固有値を$\boldsymbol{y_i}$とすれば、

$$\boldsymbol{\det e^Y = \prod_i e^{y_i} = e^{\sum_i y_i} = e^{\mathsf{Tr}\, Y}} \tag{13}$$

これを用いると

$$\det \boldsymbol{U} = \det e^{i\boldsymbol{X}} = e^{i\mathsf{Tr}\boldsymbol{X}} = \mathbf{1}$$

$$\therefore \qquad \mathsf{Tr}\boldsymbol{X} = \mathbf{0} \tag{14}$$

まとめると

$$\boxed{\quad e^{i\boldsymbol{X}} \in \boldsymbol{SU}(\mathbf{2}) \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{X}^\dagger = \boldsymbol{X}\,, \quad \mathsf{Tr}\boldsymbol{X} = \mathbf{0} \qquad (15)\quad}$$

$\boldsymbol{X}$ の具体形は簡単に求まる。

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} & \boldsymbol{d} \end{pmatrix} = \boldsymbol{X}^\dagger = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}^* & \boldsymbol{c}^* \\ \boldsymbol{b}^* & \boldsymbol{d}^* \end{pmatrix}$$

$$\therefore \qquad \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}^*\,, \boldsymbol{d} = \boldsymbol{d}^* \quad \mathsf{real}$$

$$\boldsymbol{c}^* = \boldsymbol{b} \tag{16}$$

$$\mathsf{Tr}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{d} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{d} = -\boldsymbol{a} \tag{17}$$

従って、$\boldsymbol{\theta_a, a = 1 \sim 3}$を実パラメーターとして、

$$\boldsymbol{X = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \theta_3 & \theta_1 - i\theta_2 \\ \theta_1 + i\theta_2 & -\theta_3 \end{pmatrix} = \sum_a \theta_a s_a\,, \qquad s_a = \frac{1}{2}\sigma_a}$$

$$\boldsymbol{\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\,, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\,, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}} \tag{18}$$

ゆえ、$\boldsymbol{s_a}$はtraceless エルミート行列の基底をなす。またこれらは次の代数をなす：

$$\boldsymbol{[s_a, s_b] = i\epsilon_{abc} s_c} \tag{19}$$

これを$\boldsymbol{SU(2)}$のLie代数と呼び$\boldsymbol{su(2)}$と書く。

演習　3.1　次の公式を導き、1の無限小近傍に限らず、$\boldsymbol{U \in SU(2)}$の任意の元が$\boldsymbol{e^{iX}, X}$ =traceless hermitian の形に書けることを示せ。

$$\boldsymbol{e^{i\sum_a \theta_a \sigma_a/2} = \cos\frac{\theta}{2} + i\hat{\theta}\cdot\vec{\sigma}\sin\frac{\theta}{2}} \tag{20}$$

$$\boldsymbol{\theta \equiv |\vec{\theta}|\,, \quad \hat{\theta} \equiv \frac{\vec{\theta}}{\theta}} \tag{21}$$

解: 上記の公式は、Taylor 展開と $\boldsymbol{\sigma_a}$ の性質を用いれば容易に証明できる。
すると、$\boldsymbol{\alpha = \cos(\theta/2), \beta = \sin(\theta/2)}$ とおけば

$$\boldsymbol{e^{i\sum_a \theta_a \sigma_a/2} = \alpha + i\hat{\theta}\cdot\sigma\beta = \begin{pmatrix} \alpha + i\beta\hat{\theta}_3 & \beta(\hat{\theta}_2 + i\hat{\theta}_1) \\ -\beta(\hat{\theta}_2 - i\hat{\theta}_1) & \alpha - i\beta\hat{\theta}_3 \end{pmatrix}} \tag{22}$$

これは $\boldsymbol{a = \alpha + i\beta\hat{\theta}_3, b = \beta(\hat{\theta}_2 + i\hat{\theta}_1)}$ とおけば、

$$\boldsymbol{\begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix}} \tag{23}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{|a|^2 + |b|^2} &\boldsymbol{= \alpha^2 + \beta^2(\hat{\theta}_1^2 + \hat{\theta}_2^2 + \hat{\theta}_3^2) = \alpha^2 + \beta^2} \\ &\boldsymbol{= \cos^2(\theta/2) + \sin^2(\theta/2) = 1} \end{aligned} \tag{24}$$

と書けるが、これはまさしく一般の $\boldsymbol{SU(2)}$ の元の形に他ならない。

3.1.2 ローレンツ変換とその生成子

□ **ローレンツベクトルに対する変換**：

4-vector $\boldsymbol{x^\mu}$, $(\mu=0,1,2,3)$ に対するローレンツ変換は次の関係式で特徴付けられる：

$$\eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}\,(1,-1,-1,-1) \tag{25}$$

$$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu \tag{26}$$

$$x'^\mu \eta_{\mu\nu} x'^\nu = \Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma \eta_{\mu\nu} x^\rho x^\sigma = \eta_{\rho\sigma} x^\rho x^\sigma \tag{27}$$

$$\therefore \qquad \Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma \eta_{\mu\nu} = \eta_{\rho\sigma} \tag{28}$$

行列表示すると

$$\Lambda^T \eta \Lambda = \eta \tag{29}$$

$\boldsymbol{\Lambda = e^\xi}$ と書くと、無限小変換 $\boldsymbol{\xi}$ に対しては

$$\Lambda = e^\xi \sim 1 + \xi + \cdots \tag{30}$$

$$x'^\mu = x^\mu + \xi^\mu{}_\nu x^\nu + \mathcal{O}(\xi^2) \tag{31}$$

(30) を定義式 (29) に入れると容易に

$$\xi^T \eta + \eta \xi = 0$$

$$\Leftrightarrow \qquad \xi_{\mu\nu} + \xi_{\nu\mu} = 0 \tag{32}$$

従って、$\boldsymbol{\xi}_{\mu\nu}$ は反対称で、6個の独立な実成分を持つ。

□ **無限小変換の生成子**：

ベクトル$\boldsymbol{x}^{\mu}$を無限小変換する行列 $\boldsymbol{\xi}^{\mu}{}_{\nu}$ を、反対称性を持つパラメーター$\boldsymbol{\xi}_{\mu\nu}$を用いて次のように書く：

$$\boldsymbol{\xi}^{\mu}{}_{\nu} = -\frac{\boldsymbol{i}}{\boldsymbol{2}}\boldsymbol{\xi}^{\rho\sigma}(\boldsymbol{L}_{\rho\sigma})^{\mu}{}_{\nu} \tag{33}$$

この式で、ベクトル表現に対する無限小の生成子 $\boldsymbol{L}_{\rho\sigma}$ ($\boldsymbol{\rho} \leftrightarrow \boldsymbol{\sigma}$ に関して反対称) が定義される。

$\boldsymbol{L}_{\rho\sigma}$ 行列の具体形は簡単に求まる:

$$\boxed{(\boldsymbol{L}_{\rho\sigma})^{\mu}{}_{\nu} = \boldsymbol{i}(\boldsymbol{\delta}^{\mu}_{\rho}\boldsymbol{\eta}_{\sigma\nu} - \boldsymbol{\delta}^{\mu}_{\sigma}\boldsymbol{\eta}_{\rho\nu}) = \text{純虚数} \quad (34)}$$

これが(33)と整合的であることは容易にチェックできる。

□ **基本交換関係**：

上記の生成子は交換関係のもとで次の基本的代数を形成する：

$$\boxed{[\boldsymbol{L}_{\mu\nu}, \boldsymbol{L}_{\rho\sigma}] = \frac{1}{i}(\eta_{\mu\rho}\boldsymbol{L}_{\nu\sigma} - \eta_{\nu\rho}\boldsymbol{L}_{\mu\sigma} + \eta_{\nu\sigma}\boldsymbol{L}_{\mu\rho} - \eta_{\mu\sigma}\boldsymbol{L}_{\nu\rho}) \quad (35)}$$

演習　3.2　この代数を導け。

□ **回転とブースト**:

$\boldsymbol{L}_{\mu\nu}$ は回転とブーストに分解できる ($i = 1, 2, 3$):

$$\text{3 rotations} \quad \boldsymbol{I}_i \equiv \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\boldsymbol{L}^{jk} \tag{36}$$

$$\text{3 boosts} \quad \boldsymbol{K}_i \equiv \boldsymbol{L}_{i0} \tag{37}$$

これらはどちらもエルミート行列である。

演習　3.3　$I_3 = L_{12}$ が z 軸まわりの回転を生成することを次の計算をすることにより確かめよ。

$$\delta_{I_3} x^i = -i\theta (L_{12})^i{}_j x^j \tag{38}$$

解:

$$\begin{aligned}
\delta_{I_3} x^i &= -i\theta (L_{12})^i{}_j x^j \\
&= -i\theta i(\delta^i_1 \eta_{2j} - \delta^i_2 \eta_{1j}) x^j \\
&= \theta(\delta^i_2 x^1 - \delta^i_1 x^2) \\
\therefore \qquad \delta x^1 &= -\theta x^2 , \qquad \delta x^2 = \theta x^1
\end{aligned} \tag{39}$$

これは明らかに x_3 軸まわりの無限小回転を表す。

演習　3.4　同様に、$K_1 = L_{10}$ が1-方向のブーストを生成することを示せ。($x^0 \pm x^1$ がどのように変換されるかを見よ。)

解:　$\alpha = \xi^{10}$ とすると、

$$\begin{aligned}
\delta_{K_1} x^\mu &= \alpha(\delta^\mu_1 x^0 + \delta^\mu_0 x^1) \\
\therefore \qquad & \delta_{K_1}(x^0 \pm x^1) = \pm\alpha(x^0 \pm x^1)
\end{aligned}$$

これは K_1 が x^1 方向のブーストを生成することを示している。

演習 3.5 これらの生成子が次の代数を満たすことを示せ。

$$[\boldsymbol{I}_i, \boldsymbol{I}_j] = i\epsilon_{ijk}\boldsymbol{I}_k \tag{40}$$

$$[\boldsymbol{I}_i, \boldsymbol{K}_j] = i\epsilon_{ijk}\boldsymbol{K}_k \quad (\boldsymbol{K}_i \text{は空間的ベクトルを形成}) \tag{41}$$

$$[\boldsymbol{K}_i, \boldsymbol{K}_j] = -i\epsilon_{ijk}\boldsymbol{I}_k \tag{42}$$

(これから、生成子がエルミートであることがチェックできる。)

3.1.3 ローレンツ群の直積分解

新しい生成子 $\boldsymbol{J}_i^{(\pm)}$ を定義する。九後氏の教科書と合わせるために次のようにとる

$$\boldsymbol{J}_i^{(\pm)} \equiv \frac{1}{2}(\boldsymbol{I}_i \mp i\boldsymbol{K}_i) \tag{43}$$

$\boldsymbol{I}_i$ と $\boldsymbol{K}_i$ はどちらも純虚数であるから $\boldsymbol{J}_k^{(\pm)}$ は次の関係を満たす：

$$\boldsymbol{J}_k^{(-)} = -\boldsymbol{J}^{(+)*}_k \tag{44}$$

すると容易にわかるように、以前の代数は次の二つの**独立な代数**に分解する：

$$\boxed{\begin{aligned} \left[\boldsymbol{J}_i^{(\pm)}, \boldsymbol{J}_j^{(\pm)}\right] &= \boldsymbol{i\epsilon_{ijk}J_k^{(\pm)}} \qquad (45) \\ \left[\boldsymbol{J^{(+)}}_i, \boldsymbol{J^{(-)}}_j\right] &= \boldsymbol{0} \qquad (46) \end{aligned}}$$

明らかに、各代数は$\boldsymbol{SU(2)}$(または$\boldsymbol{SO(3)}$)代数と同型。

実は、どのような<u>群</u>を生成するかが大事。これを見るためには、これらの生成子に対応するパラメーターの性質を調べる必要がある。もともとの

ローレンツ変換を$\boldsymbol{J}_k^{(\pm)}$で表すと、

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\xi^{\rho\sigma}L_{\rho\sigma} &= \xi^{i0}L_{i0} + \frac{1}{2}\xi^{ij}L_{ij} = \xi^{i0}K_i + \frac{1}{2}\xi^{ij}\epsilon_{ijk}I_k \\
&= \left(\frac{1}{2}\xi^{ij}\epsilon_{ijk} + i\xi^{k0}\right)J^{(+)}{}_k + \left(\frac{1}{2}\xi^{ij}\epsilon_{ijk} - i\xi^{k0}\right)J^{(-)}{}_k \\
&\equiv \theta_k J^{(+)}{}_k + \theta_k^* J^{(-)}{}_k \qquad (47) \\
\theta_k &\equiv \frac{1}{2}\xi^{ij}\epsilon_{ijk} + i\xi^{k0} = 3 \text{ complex parameters} \qquad (48)
\end{aligned}
$$

従って、$J^{(-)}{}_k = -J^{(+)*}{}_k$を用いると、ローレンツ変換行列の指数は次の構造を持つことがわかる：

$$
\begin{aligned}
-\frac{i}{2}\xi^{\rho\sigma}L_{\rho\sigma} &= -i\theta_k J^{(+)}{}_k - i\theta_k^* J^{(-)}{}_k \\
&= -i\theta_k J^{(+)}{}_k + (-i\theta_k J^{(+)}{}_k)^* \qquad (49)
\end{aligned}
$$

これより、$\boldsymbol{3+1}$次元のローレンツ群は直積構造を持つ：

$$\boldsymbol{SO(1,3) = SL(2,C) \otimes SL(2,C)^*} \quad (50)$$

$\boldsymbol{SL(2,C)}$ は6個の実パラメーターを持つ。

3.1.4 $SL(2,C)$ の基本的表現

□ **定義** (defining) **表現**：

基本的な $\boldsymbol{SL(2,C)}$ spinor 表現は次のように定義される：

$$\boldsymbol{u'_\alpha = M_\alpha{}^\beta u_\beta} \quad (51)$$

$$\boldsymbol{M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}}, \qquad \det \boldsymbol{M = ab - cd = 1} \quad (52)$$

二つのspinor $\boldsymbol{u_\alpha, v_\alpha}$ から**基本的な不変量** $\boldsymbol{u_\alpha \epsilon^{\alpha\beta} v_\beta}$ を作ることができる。ここで $\boldsymbol{\epsilon^{12} = 1}$

<u>証明</u>： 変換されたbilinearは、

$$\boldsymbol{u'_\alpha \epsilon^{\alpha\beta} v'_\beta \; = \; \epsilon^{\alpha\beta} M_\alpha{}^{\alpha'} M_\beta{}^{\beta'} u_{\alpha'} v_{\beta'}} \tag{53}$$

示すべきことは

$$\boldsymbol{\epsilon^{\alpha\beta} M_\alpha{}^{\alpha'} M_\beta{}^{\beta'} = \epsilon^{\alpha'\beta'}} \tag{54}$$

これは$\boldsymbol{\epsilon^{\alpha\beta}}$が不変なテンソルであることに他ならない。左辺は明らかに反対称であるから、$\boldsymbol{a\epsilon^{\alpha'\beta'}}$と書ける。$\boldsymbol{a}$を決めるには、$\boldsymbol{\alpha' = 1, \beta' = 2}$と置く。すると行列式の定義と$\mathbf{det}\,\boldsymbol{M} = \mathbf{1}$より$\boldsymbol{a} = \mathbf{1}$が得られる。これを行列形で書くと

$$\Leftrightarrow \qquad \boldsymbol{M^T \epsilon M = \epsilon} \tag{55}$$

$$\Leftrightarrow \qquad \boldsymbol{\epsilon M \epsilon^T = M^{T^{-1}}} \tag{56}$$

□ **反傾(contragredient)表現と複素共役(complex conjugate)表現**：

群の行列表現には必ず二つの自然な表現が伴う。

- **反傾表現:** $\boldsymbol{M^{T^{-1}}}$

$$\boldsymbol{M_1 M_2 \; = \; M_3 \quad \Rightarrow \quad M_2^T M_1^T = M_3^T}$$

$$\therefore \qquad \boldsymbol{M_1^{T^{-1}} M_2^{T^{-1}} \; = \; M_3^{T^{-1}}} \tag{57}$$

定義表現の式 $\boldsymbol{u}' = \boldsymbol{M}\boldsymbol{u}$ に左から $\boldsymbol{\epsilon}$ を働かせて (56) を用いると

$$\boldsymbol{u}' = \boldsymbol{M}\boldsymbol{u} \quad \Rightarrow \quad (\boldsymbol{\epsilon}\boldsymbol{u}') = (\boldsymbol{\epsilon}\boldsymbol{M}\boldsymbol{\epsilon}^T)(\boldsymbol{\epsilon}\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{M}^{T^{-1}}(\boldsymbol{\epsilon}\boldsymbol{u}) \tag{58}$$

従って、反傾表現の基底は $\boldsymbol{\epsilon}\boldsymbol{u}$ である。これを次のように**上付きスピナー** $\boldsymbol{u}^{\boldsymbol{\alpha}}$ と定義する：

$$\boldsymbol{u}^{\boldsymbol{\alpha}} \equiv \boldsymbol{\epsilon}^{\boldsymbol{\alpha\beta}}\boldsymbol{u}_{\boldsymbol{\beta}} \tag{59}$$

逆に解くには、左から $\boldsymbol{\epsilon}_{\boldsymbol{\gamma\alpha}}$ を掛けて、$\boldsymbol{\epsilon}_{\boldsymbol{\gamma\alpha}}\boldsymbol{\epsilon}^{\boldsymbol{\alpha\beta}} = -\boldsymbol{\delta}_{\boldsymbol{\gamma}}^{\boldsymbol{\beta}}$ を用いる: ($\boldsymbol{\epsilon}_{\boldsymbol{12}} \equiv \boldsymbol{1}$)

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\epsilon}_{\boldsymbol{\gamma\alpha}}\boldsymbol{u}^{\boldsymbol{\alpha}} &= \boldsymbol{\epsilon}_{\boldsymbol{\gamma\alpha}}\boldsymbol{\epsilon}^{\boldsymbol{\alpha\beta}}\boldsymbol{u}_{\boldsymbol{\beta}} = -\boldsymbol{u}_{\boldsymbol{\gamma}} \\ \therefore \qquad \boldsymbol{u}_{\boldsymbol{\alpha}} &= -\boldsymbol{\epsilon}_{\boldsymbol{\alpha\beta}}\boldsymbol{u}^{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{u}^{\boldsymbol{\beta}}\boldsymbol{\epsilon}_{\boldsymbol{\beta\alpha}} \end{aligned} \tag{60}$$

上付きスピナーを用いると、基本不変量は次のように書ける：

$$\boldsymbol{u}_{\boldsymbol{\alpha}}\boldsymbol{\epsilon}^{\boldsymbol{\alpha\beta}}\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{u}_{\boldsymbol{\alpha}}\boldsymbol{v}^{\boldsymbol{\alpha}} = -\boldsymbol{u}^{\boldsymbol{\beta}}\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{\beta}} \tag{61}$$

- **複素共役表現:** $\quad M^*$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{M}_{\boldsymbol{1}}\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{2}} &= \boldsymbol{M}_{\boldsymbol{3}} \\ \Rightarrow \quad \boldsymbol{M}_{\boldsymbol{1}}^*\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{2}}^* &= \boldsymbol{M}_{\boldsymbol{3}}^* \end{aligned}$$

複素共役スピナーの添え字は慣例に従って点を付けて表す。それらは**点付きスピナー** (dotted spinor) と呼ばれる。

$$\boldsymbol{u}_{\dot{\alpha}} \equiv (\boldsymbol{u}_{\alpha})^* \tag{62}$$

$$\boldsymbol{u}'_{\dot{\alpha}} = \boldsymbol{M}^{*\dot{\beta}}_{\dot{\alpha}} \boldsymbol{u}_{\dot{\beta}} \tag{63}$$

3.1.5 $J_k^{(\pm)}$ のテンソル積分解と変換行列 T

$\boldsymbol{J}_{\boldsymbol{k}}^{(\pm)}$ の満たす代数はきれいに分離されたが、$\boldsymbol{J}_{\boldsymbol{k}}^{(\pm)}$ の具体的な形はこの分解を反映していない。例えば、簡単な計算から

$$\boldsymbol{J^{(+)}}_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{J^{(+)}}_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{etc.}$$

であり、これらは以下に定義を述べる直積の形になっていない。従って、$\boldsymbol{J}^{(+)}{}_k$ と $\boldsymbol{J}^{(-)}{}_k$ を直積の形にする相似変換 $\boldsymbol{T}$ を探したい。すなわち、

$$\boldsymbol{T}\,\boldsymbol{J}^{(+)}{}_i\,\boldsymbol{T}^{-1} \;=\; \boldsymbol{\mathcal{J}}_i^{(+)} \equiv \frac{\boldsymbol{\Sigma}_i^{(+)}}{\boldsymbol{2}} \otimes \boldsymbol{1} \tag{64}$$

$$\boldsymbol{T}\,\boldsymbol{J}^{(-)}{}_i\,\boldsymbol{T}^{-1} \;=\; \boldsymbol{\mathcal{J}}_k^{(-)} \equiv \boldsymbol{1} \otimes \frac{\boldsymbol{\Sigma}_i^{(-)}}{\boldsymbol{2}} \tag{65}$$

ここで $\frac{1}{2}\boldsymbol{\Sigma}_i^{(\pm)}$ は $\boldsymbol{SL(2,C)}$ および $\boldsymbol{SL(2,C)}^*$ 空間に働く $\boldsymbol{2} \times \boldsymbol{2}$ 行列であり、$\boldsymbol{J}_i^{\pm}$ と同型の交換関係を満たすものである。

テンソル積に関する注: 　二つのベクトルのテンソル積は次のように定義される

$$(\vec{\boldsymbol{x}} \otimes \vec{\boldsymbol{y}})_{im} \;\equiv\; \boldsymbol{x}_i \boldsymbol{y}_m$$

二つの行列 $\boldsymbol{A}$ および $\boldsymbol{B}$ のテンソル積は、

$$(\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{B})(\vec{\boldsymbol{x}} \otimes \vec{\boldsymbol{y}}) \;\equiv\; (\boldsymbol{A}\vec{\boldsymbol{x}}) \otimes (\boldsymbol{B}\vec{\boldsymbol{y}})$$

が成り立つように定義される。これより容易に

$$(\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{B})_{im;jn} \;=\; \boldsymbol{A}_{ij}\boldsymbol{B}_{mn}$$

演習 3.6 以下を確かめよ。

$$\frac{\boldsymbol{\sigma}_k}{2}\otimes\mathbf{1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} (\boldsymbol{\sigma}_k)_{11}\mathbf{1} & (\boldsymbol{\sigma}_k)_{12}\mathbf{1} \\ (\boldsymbol{\sigma}_k)_{21}\mathbf{1} & (\boldsymbol{\sigma}_k)_{22}\mathbf{1} \end{pmatrix}$$
$$\mathbf{1}\otimes\frac{\boldsymbol{\sigma}_k}{2} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma}_k & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma}_k \end{pmatrix}$$

すなわち、$\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B}$ は $\boldsymbol{A}$ の各成分に行列 $\boldsymbol{B}$ を付与したもの。

$\boldsymbol{T}$ と $\Sigma_i^{(\pm)}$ の導出: 定義より、行列 $\boldsymbol{T}$ はローレンツベクトルの空間に作用し、それをスピノルと点付きスピノルの直積にする **intertwiner** である。すなわち

$$\boxed{\boldsymbol{T}: \quad \boldsymbol{x}^{\mu} \longrightarrow \boldsymbol{u}_{\alpha}\boldsymbol{u}_{\dot{\alpha}} \qquad (66)}$$

従って $\boldsymbol{T}$ **の添え字の構造は** $T_{\alpha\dot{\alpha},\mu}$。さらに、それを以下のように、4 個の

$\boldsymbol{2\times 2}$ 行列$\boldsymbol{T_\mu}$ と見なすと便利である:

$$\boldsymbol{T_{\alpha\dot{\alpha}\,\mu} \equiv (T_\mu)_{\alpha\dot{\alpha}}} \tag{67}$$

次に、(64) および (65) を次の形に書き直す:

$$\boldsymbol{2TJ_i^{(\pm)} = 2\mathcal{J}_i^{(\pm)}T} \tag{68}$$

(+) セクターに対してより具体的に書くと

$$\begin{aligned}\boldsymbol{2(T_\mu)_{\alpha\dot{\alpha}}(J_i^{(+)})^\mu{}_\nu} &\boldsymbol{= 2(\mathcal{J}_i^{(+)})_{\alpha\dot{\alpha}}{}^{\beta\dot{\beta}}(T_\nu)_{\beta\dot{\beta}}}\\ &\boldsymbol{= \Sigma_i^{(+)}{}_\alpha{}^\beta\delta_{\dot{\alpha}}{}^{\dot{\beta}}(T_\nu)_{\beta\dot{\beta}}}\\ &\boldsymbol{= \Sigma_i^{(+)}{}_\alpha{}^\beta(T_\nu)_{\beta\dot{\alpha}}}\\ &\boldsymbol{= (\Sigma_i^{(+)}T_\nu)_{\alpha\dot{\alpha}}}\end{aligned} \tag{69}$$

従って$\underline{\boldsymbol{2\times 2}\text{の行列方程式}}$として

$$\boxed{\boldsymbol{2T_\mu J_i^{(+)\mu}{}_\nu = \Sigma_i^{(+)}T_\nu} \qquad (70)}$$

同様に(−)セクターは

$$\boxed{2\boldsymbol{T}_\mu \boldsymbol{J}_i^{(-)\mu}{}_\nu = \boldsymbol{T}_\nu {\boldsymbol{\Sigma}_i^{(-)}}^{\boldsymbol{T}} \qquad (71)}$$

さらに具体的に書く。$\boldsymbol{J}_i^{(\pm)}$の定義(43)より、容易に

$$2\boldsymbol{J}_i^{(\pm)\mu}{}_\nu = i\boldsymbol{\epsilon}_{ijk}\boldsymbol{\eta}^{\mu j}\boldsymbol{\delta}_\nu^k \pm (\boldsymbol{\delta}_i^\mu \boldsymbol{\eta}_{\nu 0} - \boldsymbol{\delta}_0^\mu \boldsymbol{\eta}_{\nu i}) \qquad (72)$$

従って、解くべき方程式は

$$\boxed{\begin{aligned} i\boldsymbol{\epsilon}_{ijk}\boldsymbol{T}^j\boldsymbol{\delta}_\nu^k + \boldsymbol{T}_i\boldsymbol{\eta}_{\nu 0} - \boldsymbol{T}_0\boldsymbol{\eta}_{\nu i} &= \boldsymbol{\Sigma}_i^{(+)}\boldsymbol{T}_\nu && (73) \\ i\boldsymbol{\epsilon}_{ijk}\boldsymbol{T}^j\boldsymbol{\delta}_\nu^k - \boldsymbol{T}_i\boldsymbol{\eta}_{\nu 0} + \boldsymbol{T}_0\boldsymbol{\eta}_{\nu i} &= \boldsymbol{T}_\nu {\boldsymbol{\Sigma}_i^{(-)}}^{\boldsymbol{T}} && (74) \end{aligned}}$$

これらの方程式を解くのは見かけほど難しくない。

具体的に、$\boldsymbol{\nu}$ の値を入れてやると

$$
\begin{array}{lll}
(+)\ \text{case:} & \boldsymbol{\nu = 0} & \boldsymbol{T_i = \Sigma_i^{(+)} T_0} \\
& \boldsymbol{\nu = i} & \boldsymbol{T_0 = \Sigma_i^{(+)} T_i} \\
& \boldsymbol{\nu = k \neq i} & \boldsymbol{i\epsilon_{ijk} T_j = \Sigma_i^{(+)} T_k} \\
(-)\ \text{case:} & \boldsymbol{\nu = 0} & \boldsymbol{-T_i = T_0 {\Sigma_i^{(-)}}^T} \\
& \boldsymbol{\nu = i} & \boldsymbol{-T_0 = T_i {\Sigma_i^{(-)}}^T} \\
& \boldsymbol{\nu = k \neq i} & \boldsymbol{i\epsilon_{ijk} T_j = T_k {\Sigma_i^{(-)}}^T}
\end{array}
$$

と簡単化する。

解: $\frac{1}{2}\boldsymbol{\Sigma_i^{(\pm)}}$ が $\boldsymbol{SL(2, C)}$ の生成子となるには、基本的に次の二つの可能性がある:

1. 最も自然な選択は $\boldsymbol{\Sigma_i^{(+)} = \sigma_i}$ ととること。すると (+) の場合の方程式は、全体に掛かる定数を除いて、次のように解ける：

$$
\boldsymbol{T_0 = 1\,, \qquad T_i = \sigma_i} \tag{75}
$$

これを用いると、(−) の方程式も次のように解ける：

$$\boldsymbol{\Sigma}_i^{(-)} = -\boldsymbol{\sigma}_i^T = -\boldsymbol{\sigma}_i^* \tag{76}$$

2. もうひとつの解は、$\boldsymbol{\Sigma}_i^{(+)}$ と $\boldsymbol{\Sigma}_i^{(-)}$ を入れ替えたもの。すなわち、$\boldsymbol{\Sigma}_i^{(+)} = -\boldsymbol{\sigma}_i^T = -\boldsymbol{\sigma}_i^*$ および $\boldsymbol{\Sigma}_i^{(-)} = \boldsymbol{\sigma}_i$。これも正当な解であるが、$\boldsymbol{T}$ の形は若干きれいでなくなる。 解の形は[1]

$$\boldsymbol{T}_0 = \boldsymbol{1}, \qquad \boldsymbol{T}_i = -\boldsymbol{\sigma}_i^T = -\boldsymbol{\sigma}_i^* \tag{77}$$

以下では第一の解をとる. また、$\boldsymbol{T}_\mu$ **を** $\boldsymbol{\sigma}_\mu$ **と書く通常の慣習に従う**。 まと

[1] 九後の教科書ではこの解を選択しているが、$\boldsymbol{T}_\mu$ の形は正しくないことに注意。

めると

$$\boldsymbol{(\sigma_\mu)_{\alpha\dot{\alpha}} = T_{\alpha\dot{\alpha},\mu} = (1, \vec{\sigma})} \tag{78}$$

$$\boldsymbol{T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -i & 0 \\ 0 & 1 & i & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}} \tag{79}$$

$$\boldsymbol{T^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & i & -i & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}T^\dagger} \tag{80}$$

$\boldsymbol{T}$の列は$\boldsymbol{1, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3}$の成分をベクトルとして並べたものになっている
これらのベクトルは直交しておりノルムは$\boldsymbol{2}$。 また、$\boldsymbol{T^{-1}T = \delta^\mu_\nu}$.
また$\boldsymbol{T^{-1}}$の行を読んでいくと、$\boldsymbol{1, \sigma_1^*, \sigma_2^*, \sigma_3^*}$をベクトルと見なしたものになっている。

□ $\boldsymbol{\bar{\sigma}^\mu}$**の定義**:

つぎに、$\boldsymbol{T}^{-1}$を少し組み替えて、以下のように$\mathbf{2}\times\mathbf{2}$**行列**$\bar{\boldsymbol{\sigma}}^{\boldsymbol{\mu}}$を導入する。$\boldsymbol{T}$の添え字の構造は$\boldsymbol{T}_{\boldsymbol{\alpha\dot{\beta},\mu}}$であり、$\boldsymbol{\alpha\dot{\beta}}$はペアでひとつの添え字を表すから、(80)で得られた逆行列$\boldsymbol{T}^{-1}$の添え字の構造は$(\boldsymbol{T}^{-1})^{\boldsymbol{\mu,\alpha\dot{\beta}}}$である。
さて、$\boldsymbol{T}$を$\boldsymbol{T}_{\boldsymbol{\alpha\dot{\alpha},\mu}}=(\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{\mu}})_{\boldsymbol{\alpha\dot{\alpha}}}$のように、4個の$\mathbf{2}\times\mathbf{2}$の行列と見なすことにしたので、$\boldsymbol{T}^{-1}$もそのように解釈したい。$\mathbf{2}\times\mathbf{2}$行列の掛け算の規則としては、当然隣接する列と行の添え字を縮約するようにするのが自然であるが、$\boldsymbol{T}$と$\boldsymbol{T}^{-1}$の掛け算は$(\boldsymbol{T}^{-1})^{\boldsymbol{\mu\alpha\dot{\beta}}}\boldsymbol{T}_{\boldsymbol{\alpha\dot{\beta},\nu}}$であるから、そうなっていない。縮約される同種のspinor添え字が隣接して現れるようにするためには、次のように、$\boldsymbol{\alpha}$と$\boldsymbol{\dot{\beta}}$の添え字を入れ替えた量を導入する必要がある：

$$(\bar{\boldsymbol{\sigma}}^{\boldsymbol{\mu}})^{\boldsymbol{\dot{\beta}\alpha}}\equiv\mathbf{2}(\boldsymbol{T}^{-1})^{\boldsymbol{\mu,\alpha\dot{\beta}}} \tag{81}$$

ペア$\boldsymbol{\alpha\dot{\beta}}$は$\boldsymbol{T}^{-1}$の列をラベルであり、$\mathbf{1\dot{1}},\mathbf{1\dot{2}},\mathbf{2\dot{1}},\mathbf{2\dot{2}}$の順に並んでいる。上記の入れ替えはこれを$\mathbf{\dot{1}1},\mathbf{\dot{2}1},\mathbf{\dot{1}1},\mathbf{\dot{2}2}$と解釈することであるが、自然な順序$\mathbf{\dot{1}1},\mathbf{\dot{1}1},\mathbf{\dot{2}1},\mathbf{\dot{2}2}$に直したものが$\bar{\boldsymbol{\sigma}}^{\boldsymbol{\mu}}$行列である。これは$\boldsymbol{T}^{-1}$**の**$\mathbf{2}$**列目と**$\mathbf{3}$

列目を入れ替えに相当するから(因子2を掛けて)

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\boldsymbol{i} & \boldsymbol{i} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{1} \end{pmatrix} \tag{82}$$

を得る。**$\bar{\sigma}^\mu$はこの行列の第μ行の成分を2×2の行列の成分として解釈したものとして定義される**。従って

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}}^0 = \mathbf{1}, \quad \bar{\boldsymbol{\sigma}}^i = \boldsymbol{\sigma}_i \tag{83}$$

となる。下付は

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}}_0 = \mathbf{1}, \quad \bar{\boldsymbol{\sigma}}_i = -\boldsymbol{\sigma}_i \tag{84}$$

となるから、まとめると

$$
\begin{aligned}
(\bar{\boldsymbol{\sigma}}^{\mu})^{\dot{\alpha}\beta} &= (1, \vec{\boldsymbol{\sigma}})^{\dot{\alpha}\beta} && (85) \\
(\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{\mu})^{\dot{\alpha}\beta} &= (1, -\vec{\boldsymbol{\sigma}})^{\dot{\alpha}\beta} && (86)
\end{aligned}
$$

添え字の位置に注意すること。

□ **σ_μ と $\bar{\sigma}^\mu$ の性質**:

(i)　　$TT^{-1} = 1$ の定義式を書き換えると容易に、

$$(\boldsymbol{\sigma}_{\mu})_{\alpha\dot{\beta}}(\bar{\boldsymbol{\sigma}}^{\mu})^{\dot{\gamma}\delta} = 2\delta_{\alpha}^{\delta}\delta_{\dot{\beta}}^{\dot{\gamma}} \tag{87}$$

(ii)　　Trace norm のもとでの直交性:($\boldsymbol{\sigma}_i$ を用いた表式から容易に出せる)

$$\frac{1}{2}\mathrm{Tr}(\bar{\boldsymbol{\sigma}}^{\mu}\boldsymbol{\sigma}_{\nu}) = \delta_{\nu}^{\mu} \tag{88}$$

(iii) 基本的なbilinear恒等式:

$$\boldsymbol{\sigma}_\mu \bar{\boldsymbol{\sigma}}_\nu + \boldsymbol{\sigma}_\nu \bar{\boldsymbol{\sigma}}_\mu = 2\boldsymbol{\eta}_{\mu\nu} \tag{89}$$

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}}_\mu \boldsymbol{\sigma}_\nu + \bar{\boldsymbol{\sigma}}_\nu \boldsymbol{\sigma}_\mu = 2\boldsymbol{\eta}_{\mu\nu} \tag{90}$$

これは次の表示を用いると簡単に示すことができる：

$$\boldsymbol{\sigma}_\mu = \boldsymbol{\eta}_{0\mu} - \boldsymbol{\eta}_{\mu i}\boldsymbol{\sigma}_i\,, \qquad \bar{\boldsymbol{\sigma}}_\nu = \boldsymbol{\eta}_{0\nu} + \boldsymbol{\eta}_{\nu j}\boldsymbol{\sigma}_j \tag{91}$$

後に、この関係式の群論的な説明を与える。

(iv) $\boldsymbol{\sigma}_\mu$ と $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_\mu$ の関係は基本的な関係式

$$\boxed{\begin{aligned} \boldsymbol{\epsilon}\boldsymbol{\sigma}_i\boldsymbol{\epsilon}^T &= -\boldsymbol{\sigma}_i^* \qquad (92)\\ \boldsymbol{\sigma}_i^T &= \boldsymbol{\sigma}_i^* \qquad (93) \end{aligned}}$$

を用いると

$$\boldsymbol{\epsilon}\boldsymbol{\sigma}_\mu^T\boldsymbol{\epsilon}^T = \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{1}, \vec{\boldsymbol{\sigma}}^T)\boldsymbol{\epsilon}^T = (\mathbf{1}, -\vec{\boldsymbol{\sigma}}) = \bar{\boldsymbol{\sigma}}_\mu \tag{94}$$

のようにつけることができる。これは後に有用になる。

3.1.6 $SO(1,3)$ と $SL(2,C) \otimes SL(2,C)^*$ の具体的な関係

準備が整ったので、$\boldsymbol{SO(1,3)}$ と $\boldsymbol{SL(2,C)} \otimes \boldsymbol{SL(2,C)^*}$ の関係を完全に具体的に与えることができる。

$\boldsymbol{x^\mu}$ のローレンツ変換は

$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{\Lambda x} = \boldsymbol{e^{-i\theta_k J^{(+)}{}_k}\, e^{-i\theta_k^* J^{(-)}{}_k} x} \tag{95}$$

これを $\boldsymbol{SL(2,C)} \otimes \boldsymbol{SL(2,C)^*}$ の形に直すために左から $\boldsymbol{T}$ を作用させる：

$$\begin{aligned} \boldsymbol{Tx'} &= \boldsymbol{Te^{-i\theta_k J^{(+)}{}_k} T^{-1}\, Te^{-i\theta_k^* J^{(-)}{}_k} T^{-1}\, Tx} \\ &= \boldsymbol{e^{-i\theta_k \mathcal{J}_k^{(+)}}\, e^{-i\theta_k^* \mathcal{J}_k^{(-)}}\, Tx} \\ &= \boldsymbol{(M \otimes M^*)\, Tx} \end{aligned} \tag{96}$$

$$\text{ここで} \quad \boldsymbol{M} \equiv \boldsymbol{e^{-i\theta_k \sigma_k/2}} \in \boldsymbol{SL(2,C)} \tag{97}$$

$$\boldsymbol{M^*} = \boldsymbol{e^{i\theta_k^* \sigma_k^*/2}} \in \boldsymbol{SL(2,C)^*} \tag{98}$$

$\boldsymbol{\sigma_\nu}$ 行列を用いると、(96) は次のように書ける：

$$\begin{aligned} \text{左辺} &= \boldsymbol{(Tx')_{\alpha\dot\alpha}} = \boldsymbol{(\sigma_\mu)_{\alpha\dot\alpha} x'^\mu} \\ \text{右辺} &= \boldsymbol{M_\alpha{}^\beta M^{*\dot\beta}_{\dot\alpha} (\sigma_\nu)_{\beta\dot\beta} x^\nu} = \boldsymbol{(M\sigma_\nu M^\dagger)_{\alpha\dot\alpha} x^\nu} \end{aligned} \tag{99}$$

従って次の結果を得る。

$$\boxed{\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}_\mu x'^\mu &= M\, \boldsymbol{\sigma}_\nu x^\nu\, M^\dagger && (100) \\ \boldsymbol{\sigma}_\mu \Lambda^\mu{}_\nu &= M\, \boldsymbol{\sigma}_\nu\, M^\dagger && (101) \\ \Lambda &= e^{-i\theta_k J^{(+)}{}_k}\, e^{-i\theta_k^* J^{(-)}{}_k} && (102) \\ M &= e^{-i\theta_k \sigma_k/2} \in SL(2,C) && (103) \end{aligned}}$$

これが良く知られた$SO(1,3)$と$SL(2,C)\otimes SL(2,C)^*$の関係である。
(100) に$\bar{\boldsymbol{\sigma}}^\nu/2$を掛けて trace をとると、

$$x'^\nu = \Lambda^\nu{}_\mu x^\mu = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(\bar{\boldsymbol{\sigma}}^\nu M \boldsymbol{\sigma}_\mu M^\dagger) x^\mu \qquad (104)$$

3.1.7 $SL(2,C)$の行列表現

簡単に、$SL(2,C)$の様々な行列表現について議論する。その代数は$SU(2)$の代数と同型なので、既知の事柄も多いであろう。

$\boldsymbol{u_\alpha}$ を $\boldsymbol{SL(2,C)}$ の基本表現の基底とする。すなわち、

$$\begin{aligned} u'_\alpha &= {M_\alpha}^\beta u_\beta\,, \qquad M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad ad - bc = 1 \qquad (105) \\ u'_1 &= au_1 + bu_2 \\ u'_2 &= cu_1 + du_2 \end{aligned}$$

さて、$\boldsymbol{u_1}$ と $\boldsymbol{u_2}$ を用いて作られる次数 $\boldsymbol{n}$ の $\boldsymbol{n+1}$ 個の斉次式を考える。

$$\zeta_k \equiv u_1^{n-k} u_2^k\,, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, n = \text{integer} \qquad (106)$$

$\boldsymbol{u_\alpha}$ に対する $\boldsymbol{SL(2,C)}$ 変換は一次であるから、$\boldsymbol{\zeta_k}$ は様々な $\boldsymbol{l}$ を走る $\boldsymbol{\zeta_l}$ の一次結合となる。従って、$\boldsymbol{\{\zeta_k\}}$ は $\boldsymbol{SL(2,C)}$ の $\boldsymbol{n+1}$ 次元表現の基底をなす:

$$\begin{aligned} \zeta'_k &= {u'}_1^{n-k} {u'}_2^k = (Mu)_1^{n-k} (Mu)_2^k \\ &= (au_1 + bu_2)^{n-k} (cu_1 + du_2)^k \\ &\equiv \mathcal{D}_{kl}(M) \zeta_l \qquad (107) \end{aligned}$$

別の言葉で言えば、定義表現の $\boldsymbol{n}$ 階の対称テンソル積 $\boldsymbol{u_{\alpha_1} u_{\alpha_2} \cdots u_{\alpha_n}}$ を考えていることと等しい。

演習 3.7 $\mathcal{D}(M'M) = \mathcal{D}(M')\mathcal{D}(M)$ が成り立つことを示せ。

解:

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{D}(M')_{kl}\mathcal{D}(M)_{lm}\zeta_m \\
&= \mathcal{D}(M')_{kl}(au_1 + bu_2)^{n-l}(cu_1 + du_2)^l \\
&= (a'(au_1 + bu_2) + b'(cu_1 + du_2))^{n-k}(c'(au_1 + bu_2) + d'(cu_1 + du_2))^k \\
&= ((a'a + b'c)u_1 + (a'b + b'd)u_2)^{n-k} + ((c'a + d'c)u_1 + (c'b + d'd)u_2)^k \\
&= ((M'M)_{11}u_1 + (M'M)_{12}u_2)^{n-k} + ((M'M)_{21}u_1 + (M'M)_{22}u_2)^k \\
&= \mathcal{D}(M'M)_{kl}\zeta_l
\end{aligned}
\tag{108}
$$

実は、こうして作られた表現は**規約**である(より小さな表現の直和に分解できない)ことを示すことができる。($\Leftarrow$ Schurのレンマ)

定義表現に対して、$\mathcal{J}_3 = \frac{1}{2}\sigma_3$ の固有値 $\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$ に対する固有ベクトルはそれぞれ $(u_1, 0)$ および $(0, u_2)$ であるから、上記の $n+1$ 次元表現の場合の $\mathcal{J}_3$ の最大固有値 j 持つ状態は u_1^n であり、固有値は $j = n/2$ となる。従って、$2j = n$ であり、この j を**スピン**と呼ぶ。以下この $(2j+1)$ 表現を $\mathcal{D}^j(M)$ と記す。

Clebsh-Gordan 分解: $SU(2)$ の場合と同様に、次の CG 分解が成り立つ:

$$\mathcal{D}^{j_1} \otimes \mathcal{D}^{j_2} = \mathcal{D}^{j_1+j_2} \oplus \mathcal{D}^{j_1+j_2-1} \oplus \cdots \oplus \mathcal{D}^{|j_1-j_2|} \tag{109}$$

□ **例** :

- $\mathcal{D}^0(M) = 1$. 自明な 1 次元表現
- $\mathcal{D}^{1/2}(M) = M$. 基本表現そのもの

演習 3.8 $\mathcal{D}^1(M)$ を具体的に求めよ。

解:

$$\zeta_0 = u_1^2\,, \qquad \zeta_1 = u_1 u_2\,, \qquad \zeta_2 = u_2^2$$

$$\zeta_0' = (au_1 + bu_2)^2 = a^2\zeta_0 + 2ab\zeta_1 + b^2\zeta_2 \tag{110}$$

$$\zeta_1' = (au_1 + bu_2)(cu_1 + du_2) = ac\zeta_0 + (ad + bc)\zeta_1 + bd\zeta_2 \tag{111}$$

$$\zeta_2' = (cu_1 + du_2)^2 = c^2\zeta_0 + 2cd\zeta_1 + d^2\zeta_2 \tag{112}$$

従って(無論$ad-bc=1$は成り立つものとしている)

$$\mathcal{D}^1(M) = \begin{pmatrix} a^2 & 2ab & b^2 \\ ac & ad+bc & bd \\ c^2 & 2cd & d^2 \end{pmatrix} \tag{113}$$

3.1.8 $SL(2,C)\times SL(2,C)^*$ の表現

全く同様に、$SL(2,C)\times SL(2,C)^*$の有限次元表現を作ることができる。基本的な基底ベクトルと表現行列は次のように定義される：

$$\zeta_{kk'} = (u_1^{2j-k}u_2^k)(u_{\dot{1}}^{2j'-k'}u_{\dot{2}}^{k'}) \tag{114}$$

$$0 \le k \le 2j\,, \qquad 0 \le k' \le 2j' \tag{115}$$

$$\zeta'_{kk'} = \mathcal{D}^{jj'}(M,M^*)_{kk';ll'}\zeta_{ll'} \tag{116}$$

これは$(2j+1)(2j'+1)$次元の既約表現を与える。

□ **例**：

- $\mathcal{D}^{00}(M, M^*) = 1$
- $\mathcal{D}^{\frac{1}{2}0}(M, M^*) = M$
- $\mathcal{D}^{0\frac{1}{2}}(M, M^*) = M^*$
- $\mathcal{D}^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(M, M^*) = M \otimes M^*$

3.1.9　ローレンツベクトルのconversion

□ **基本関係式**：

　これまで見てきたように、$(\sigma_\mu)_{\alpha\dot{\beta}}$ の本質は、$SO(1,3)$ と $SL(2,C) \times SL(2,C)^*$ をつなぐintertwinerである。従って、4-ベクトルV^μ は後者の表現 $\mathcal{D}^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$ に属するものとして書き直せる。すなわち、

$$\boxed{V_{\alpha\dot{\beta}} \equiv (\sigma_\mu)_{\alpha\dot{\beta}} V^\mu \qquad (117)}$$

逆の関係を得るには、これを $(\bar{\boldsymbol{\sigma}}^{\mu})^{\dot{\beta}\alpha}$ と縮約する：

$$\begin{aligned} V_{\alpha\dot{\beta}}(\bar{\boldsymbol{\sigma}}^{\mu})^{\dot{\beta}\alpha} &= (\boldsymbol{\sigma}_{\nu})_{\alpha\dot{\beta}}(\bar{\boldsymbol{\sigma}}^{\mu})^{\dot{\beta}\alpha}V^{\nu} \\ &= \mathrm{Tr}(\boldsymbol{\sigma}_{\nu}\bar{\boldsymbol{\sigma}}^{\mu})V^{\nu} = 2V^{\mu} \end{aligned}$$

従って

$$\boxed{V^{\mu} = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(V\bar{\boldsymbol{\sigma}}^{\mu}) \qquad (118)}$$

□ **スカラー積**：

(117)で定義された下付bispinorのスピナー添え字を上に上げて上付きbispinor

を次のように定義する：

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{U}^{\alpha\dot{\beta}} &= \boldsymbol{\epsilon}^{\alpha\gamma}\boldsymbol{\epsilon}^{\dot{\beta}\dot{\delta}}\boldsymbol{U}_{\gamma\dot{\delta}} = \boldsymbol{\epsilon}^{\alpha\gamma}\boldsymbol{\epsilon}^{\dot{\beta}\dot{\delta}}(\boldsymbol{\sigma}_{\mu})_{\gamma\dot{\delta}}\boldsymbol{U}^{\mu} \\
&= (\boldsymbol{\epsilon}\boldsymbol{\sigma}_{\mu}\boldsymbol{\epsilon}^{T})^{\alpha\dot{\beta}}\boldsymbol{U}^{\mu} = (\boldsymbol{\epsilon}\boldsymbol{\sigma}_{\mu}^{T}\boldsymbol{\epsilon}^{T})^{\dot{\beta}\alpha}\boldsymbol{U}^{\mu} \\
&= (\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{\mu})^{\dot{\beta}\alpha}\boldsymbol{U}^{\mu} \qquad (119)
\end{aligned}$$

これと $\boldsymbol{V}_{\alpha\dot{\beta}}$ を縮約すると、不変量が定義できる：

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{V}_{\alpha\dot{\beta}}\boldsymbol{U}^{\alpha\dot{\beta}} &= (\boldsymbol{\sigma}_{\mu})_{\alpha\dot{\beta}}(\bar{\boldsymbol{\sigma}}^{\nu})^{\dot{\beta}\alpha}\boldsymbol{V}^{\mu}\boldsymbol{U}_{\nu} \\
&= \mathbf{Tr}(\boldsymbol{\sigma}_{\mu}\bar{\boldsymbol{\sigma}}^{\nu})\boldsymbol{V}^{\mu}\boldsymbol{U}_{\nu} = \mathbf{2}\boldsymbol{V}^{\mu}\boldsymbol{U}_{\mu} \qquad (120)
\end{aligned}$$

これはまさしくLorentz vectorからLorentz不変量(scalar)を作る方法に他ならない。

□ **微分**：

微分 $\boldsymbol{\partial}_{\mu}$ も同様に、スピナー添え字を持つ微分に変換できる:

$$\boldsymbol{\partial}_{\alpha\dot{\beta}} = (\boldsymbol{\sigma}_{\mu})_{\alpha\dot{\beta}}\boldsymbol{\partial}^{\mu} = \boldsymbol{T}_{\alpha\dot{\beta},\mu}\boldsymbol{\partial}^{\mu} \qquad (121)$$

具体的に書くと

$$\begin{pmatrix} \partial_{1\dot{1}} \\ \partial_{1\dot{2}} \\ \partial_{2\dot{1}} \\ \partial_{2\dot{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -i & 0 \\ 0 & 1 & i & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_0 \\ -\partial_1 \\ -\partial_2 \\ -\partial_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_0 - \partial_3 \\ -\partial_1 + i\partial_2 \\ -\partial_1 - i\partial_2 \\ \partial_0 + \partial_3 \end{pmatrix} \tag{122}$$

次の公式も有用：

$$\begin{aligned} \partial_{\alpha\dot{\beta}}\partial^{\gamma\dot{\beta}} &= (\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\beta}}(\bar{\sigma}^\nu)^{\dot{\beta}\gamma}\partial_\mu\partial_\nu \\ &= \frac{1}{2}(\sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu + \sigma^\nu\bar{\sigma}^\mu)_\alpha{}^\gamma\partial_\mu\partial_\nu \\ &= \delta_\alpha^\gamma\partial^\mu\partial_\mu = \delta_\alpha^\gamma\partial^2 \end{aligned} \tag{123}$$

$$\begin{aligned} \partial_{\alpha\dot{\beta}}\partial^{\alpha\dot{\gamma}} &= (\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\beta}}(\bar{\sigma}^\nu)^{\dot{\gamma}\alpha}\partial_\mu\partial_\nu \\ &= \frac{1}{2}(\bar{\sigma}^\nu\sigma^\mu + \bar{\sigma}^\mu\sigma^\nu)^{\dot{\gamma}}{}_{\dot{\beta}}\partial_\mu\partial_\nu \\ &= \delta_{\dot{\beta}}^{\dot{\gamma}}\partial_\mu\partial^\mu = \partial_{\dot{\beta}}^{\dot{\gamma}}\partial^2 \end{aligned} \tag{124}$$

最初の関係式で、α and γ を縮約すれば容易に、

$$\partial_{\alpha\dot{\beta}}\partial^{\alpha\dot{\beta}} = 2\partial^2 \tag{125}$$

3.1.10　2階のローレンツテンソルのスピナー表現

次に、二階のローレンツテンソルを $\boldsymbol{SL(2,C)}$ のスピナー添え字を持った量として表そう。$\boldsymbol{T^{\mu\nu}}$ を一般の二階のテンソルとすると、これまでのルールより

$$\boldsymbol{T_{\alpha\dot{\beta};\gamma\dot{\delta}} = (\sigma_\mu)_{\alpha\dot{\beta}}(\sigma_\nu)_{\gamma\dot{\delta}}T^{\mu\nu}} \tag{126}$$

左辺は明らかに積表現 $\boldsymbol{\mathcal{D}^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} \otimes \mathcal{D}^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}}$ に属する。しかし、これは規約ではない。Clebsh-Gordan 分解より、$\boldsymbol{\frac{1}{2}\otimes\frac{1}{2} = 1_s \oplus 0_a}$。ここで、添え字 “s” と “a” はそれぞれ対称化および反対称化を表す。従って、規約表現(IR)への分解は

$$\boldsymbol{\mathcal{D}^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} \otimes \mathcal{D}^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} = \underbrace{\mathcal{D}^{11}(9)}_{\text{graviton}} \oplus \underbrace{\mathcal{D}^{10}(3)}_{\text{SD}} \oplus \underbrace{\mathcal{D}^{01}(3)}_{\text{ASD}} \oplus \underbrace{\mathcal{D}^{00}(1)}_{\text{scalar(dilaton)}}} \tag{127}$$

括弧内の数は、規約表現の次元を表す。これが次の分解に対応することは容易に見て取れる：

$$\boldsymbol{T^{\mu\nu}} = \left(\boldsymbol{T^{(\mu\nu)}} - \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{4}}\boldsymbol{\eta^{\mu\nu}T^{\rho}{}_{\rho}}\right) + \boldsymbol{T^{[\mu\nu]}} + \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{4}}\boldsymbol{\eta^{\mu\nu}T^{\rho}{}_{\rho}} \quad (128)$$

$$\text{ここで}\quad \boldsymbol{T^{(\mu\nu)}} = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{2}}(\boldsymbol{T^{\mu\nu}} + \boldsymbol{T^{\nu\mu}}) \quad (129)$$

$$\boldsymbol{T^{[\mu\nu]}} = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{2}}(\boldsymbol{T^{\mu\nu}} - \boldsymbol{T^{\nu\mu}}) \quad (130)$$

反対称部分が$\boldsymbol{\mathcal{D}^{10}}$と$\boldsymbol{\mathcal{D}^{01}}$の二つのIRに分解していることに注意。以下で見るように、ベクトル添え字を用いた記法では、これらは、self-dual (SD)およびanti-self-dual (ASD)を表す。

□ (Anti-)Self-Dualな反対称テンソル：

$\boldsymbol{F^{\mu\nu}}$を反対称テンソルとし、その双対(dual) $\boldsymbol{\tilde{F}_{\mu\nu}}$を次のように定義する：

$$\boldsymbol{\tilde{F}_{\mu\nu}} \equiv \frac{\boldsymbol{i}}{\boldsymbol{2}}\boldsymbol{\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}F^{\rho\sigma}} \quad (131)$$

$$\text{ここで}\quad \boldsymbol{\epsilon_{0123}} \equiv \boldsymbol{1}, \qquad \boldsymbol{\epsilon^{0123}} = \boldsymbol{-1} \quad (132)$$

スピナー添え字を持つ表現との関係をつける上で便利なので、$\boldsymbol{i}$の因子を

つけてある。SD と ASD テンソルは次の性質を持つように定義される：

$$\textbf{(SD)} \qquad \tilde{\boldsymbol{F}}^{(+)}_{\mu\nu} = \boldsymbol{F}^{(+)}_{\mu\nu} \tag{133}$$

$$\textbf{(ASD)} \qquad \tilde{\boldsymbol{F}}^{(-)}_{\mu\nu} = -\boldsymbol{F}^{(-)}_{\mu\nu} \tag{134}$$

以上のように$\boldsymbol{i}$を付けたconventionでは、次の関係が容易に成り立つ：

$$\tilde{\tilde{\boldsymbol{F}}}_{\mu\nu} = \boldsymbol{F}_{\mu\nu} \tag{135}$$

証明：

$$\begin{aligned}\tilde{\tilde{\boldsymbol{F}}}_{\mu\nu} &= \frac{\boldsymbol{i}}{\boldsymbol{2}}\boldsymbol{\epsilon}_{\mu\nu\rho\sigma}\tilde{\boldsymbol{F}}^{\rho\sigma} = \frac{\boldsymbol{i}}{\boldsymbol{2}}\boldsymbol{\epsilon}_{\mu\nu\rho\sigma}\frac{\boldsymbol{i}}{\boldsymbol{2}}\boldsymbol{\epsilon}^{\rho\sigma\lambda\tau}\boldsymbol{F}_{\lambda\tau} \\ &= -\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{4}}\boldsymbol{\epsilon}_{\mu\nu\rho\sigma}\boldsymbol{\epsilon}^{\lambda\tau\rho\sigma}\boldsymbol{F}_{\lambda\tau} = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{2}}(\boldsymbol{\delta}^{\lambda}_{\mu}\boldsymbol{\delta}^{\tau}_{\nu} - \boldsymbol{\delta}^{\tau}_{\mu}\boldsymbol{\delta}^{\lambda}_{\nu})\boldsymbol{F}_{\lambda\tau} = \boldsymbol{F}_{\mu\nu}\end{aligned} \tag{136}$$

任意の反対称テンソルは、常にSDとASD部分に分解できる：

$$\boldsymbol{F}_{\mu\nu} = \boldsymbol{F}^{(+)}_{\mu\nu} + \boldsymbol{F}^{(-)}_{\mu\nu} \tag{137}$$

$$\boldsymbol{F}^{(+)}_{\mu\nu} = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{2}}(\boldsymbol{F}_{\mu\nu} + \tilde{\boldsymbol{F}}_{\mu\nu}), \qquad \boldsymbol{F}^{(-)}_{\mu\nu} = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{2}}(\boldsymbol{F}_{\mu\nu} - \tilde{\boldsymbol{F}}_{\mu\nu}) \tag{138}$$

$\boldsymbol{F}^{(+)}_{\mu\nu}$と$\boldsymbol{F}^{(-)}_{\mu\nu}$は互いに複素共役であることに注意：

$$\boldsymbol{F}^{(-)}_{\mu\nu} = \boldsymbol{F}^{(+)*}_{\mu\nu} \tag{139}$$

(A)SD テンソルのローレンツ変換性　　**正規**ローレンツ変換($i.e.$ $\det \boldsymbol{\Lambda} = +1$) のもとで、SD テンソルはSD テンソルに写像されることが容易にわかる。

演習　3.9　$\boldsymbol{F^{\mu\nu}}$ がSDならば、それを正規ローレンツ変換したもの $\boldsymbol{F'^{\mu\nu} = \Lambda^{\mu}{}_{\rho}\Lambda^{\nu}{}_{\sigma}F^{\rho\sigma}}$ もまたSDであることを示せ。

解:

$$\begin{aligned}\tilde{F}'_{\mu\nu} &= \frac{i}{2}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}F'^{\rho\sigma} \\ &= \frac{i}{2}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\Lambda^{\rho}{}_{\tau}\Lambda^{\sigma}{}_{\lambda}F^{\tau\lambda} \\ &= \frac{i}{2}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\Lambda^{\rho}{}_{\tau}\Lambda^{\sigma}{}_{\lambda}\frac{i}{2}\epsilon^{\tau\lambda\alpha\beta}F_{\alpha\beta} \end{aligned} \tag{140}$$

逆行列 $\boldsymbol{\Lambda^{\mu}{}_{\nu}}$ は次の関係式から求まる：

$$\Lambda_{\nu}{}^{\rho}\Lambda^{\nu}{}_{\sigma} = \delta^{\rho}_{\sigma} \tag{141}$$

これより、

$$F_{\alpha\beta} = \Lambda^{\gamma}{}_{\alpha}\Lambda^{\delta}{}_{\beta}F'_{\gamma\delta} \tag{142}$$

$\boldsymbol{\epsilon}^{0123} = -1$ を用いると、

$$\begin{aligned}\tilde{F}'_{\mu\nu} &= -\frac{1}{4}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\Lambda^{\rho}{}_{\tau}\Lambda^{\sigma}{}_{\lambda}\epsilon^{\tau\lambda\alpha\beta}\Lambda^{\gamma}{}_{\alpha}\Lambda^{\delta}{}_{\beta}F'_{\gamma\delta} \\ &= -\frac{1}{4}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon^{\rho\sigma\gamma\delta}F'_{\gamma\delta}\det\Lambda \\ &= \det\Lambda\, F'_{\mu\nu} = F'_{\mu\nu} \end{aligned} \tag{143}$$

これで題意が証明された。

□ スピナー添え字を用いた表現：

さて、変換(126)の $\mathcal{D}^{10}$ 部分を抽出しよう。欲しい部分は、

$$T_{(\alpha\gamma)} = \frac{1}{2}(T_{\alpha\gamma} + T_{\gamma\alpha}) \tag{144}$$

$$\begin{aligned}\text{where} \qquad T_{\alpha\gamma} &\equiv \epsilon^{\dot{\beta}\dot{\delta}}T_{\alpha\dot{\beta};\gamma\dot{\delta}} = \epsilon^{\dot{\beta}\dot{\delta}}(\sigma_{\mu})_{\alpha\dot{\beta}}(\sigma_{\nu})_{\gamma\dot{\delta}}T^{\mu\nu} \\ &= (\sigma_{\mu}\epsilon\sigma_{\nu}^{T})_{\alpha\gamma}T^{\mu\nu} = (\sigma_{\mu}\bar{\sigma}_{\nu}\epsilon)_{\alpha\gamma}T^{\mu\nu}\end{aligned} \tag{145}$$

$\sigma_{\mu}\bar{\sigma}_{\nu}\epsilon$ の対称性を調べる：

$$\begin{aligned}(\sigma_{\mu}\bar{\sigma}_{\nu}\epsilon)^{T} &= \epsilon^{T}\bar{\sigma}_{\nu}^{T}\sigma_{\mu}^{T} = (\epsilon^{T}\bar{\sigma}_{\nu}\epsilon)^{T}(\epsilon^{T}\sigma_{\mu}^{T}\epsilon)\epsilon^{T} \\ &= \sigma_{\nu}\bar{\sigma}_{\mu}\epsilon^{T} = -\sigma_{\nu}\bar{\sigma}_{\mu}\epsilon\end{aligned} \tag{146}$$

従って

$$\begin{aligned} T_{(\alpha\gamma)} &= \frac{1}{2}\left[(\sigma_\mu\bar{\sigma}_\nu - \sigma_\nu\bar{\sigma}_\mu)\epsilon\right]_{\alpha\gamma} T^{\mu\nu} \\ &= \frac{1}{2}\left[(\sigma_\mu\bar{\sigma}_\nu - \sigma_\nu\bar{\sigma}_\mu)\epsilon\right]_{\alpha\gamma} T^{[\mu\nu]} \\ &= -i(\sigma_{\mu\nu}\epsilon)_{\alpha\gamma} T^{[\mu\nu]} \end{aligned} \tag{147}$$

ここで

$$\boxed{(\sigma_{\mu\nu})_\alpha{}^\beta \equiv \frac{i}{2}(\sigma_\mu\bar{\sigma}_\nu - \sigma_\nu\bar{\sigma}_\mu)_\alpha{}^\beta \quad (148)}$$

以前の考察より、$\sigma_{\mu\nu}$ はSDテンソルであるはずである。実際、我々のconvention $\epsilon^{0123} = 1$ を用いると、容易にこれを示すことができる。すなわち、

$$\sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{2}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\sigma^{\rho\sigma} \tag{149}$$

すると、

$$\begin{aligned} T_{(\alpha\gamma)} &= -i\frac{i}{2}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}(\sigma^{\rho\sigma}\epsilon)_{\alpha\gamma}T^{[\mu\nu]} \\ &= -i(\sigma^{\rho\sigma}\epsilon)_{\alpha\gamma}\tilde{T}_{[\rho\sigma]} \\ \therefore \qquad T_{(\alpha\beta)} &= -i(\sigma_{\mu\nu}\epsilon)_{\alpha\beta}T^{(+)\mu\nu} \end{aligned} \tag{150}$$

$\mathcal{D}^{01}$ に属するASDテンソルに対しても、全く同様にして、

$$(\bar{\sigma}_{\mu\nu})^{\dot{\alpha}}{}_{\dot{\beta}} \equiv \frac{i}{2}(\bar{\sigma}_\mu\sigma_\nu - \bar{\sigma}_\nu\sigma_\mu)^{\dot{\alpha}}{}_{\dot{\beta}} \tag{151}$$

$$\tilde{\bar{\sigma}}_{\mu\nu} = -\bar{\sigma}_{\mu\nu} \tag{152}$$

$$T_{(\dot{\alpha}\dot{\beta})} = \epsilon^{\alpha\gamma}T_{\alpha\dot{\beta};\gamma\dot{\delta}} = i(\epsilon^T\bar{\sigma}_{\mu\nu})_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}T^{(-)\mu\nu} \tag{153}$$

演習 3.10 これらの関係式を証明せよ。

□ 関係式 $\sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu + \sigma^\nu\bar{\sigma}^\mu = 2\eta^{\mu\nu}$ の理解：

スピノル添え字を持った量 $T_{\alpha\gamma}$ を反対称化すると、$\mathcal{D}^{00}$ に属するsingletを得るはずである。これを具体的に書くと、

$$T_{[\alpha\gamma]} = \frac{1}{2}(T_{\alpha\gamma} - T_{\gamma\alpha}) = \frac{1}{2}\left[(\sigma_\mu\bar{\sigma}_\nu + \sigma_\nu\bar{\sigma}_\mu)\epsilon\right]_{\alpha\gamma} T^{(\mu\nu)} \tag{154}$$

右辺がsinglet $\boldsymbol{\eta_{\mu\nu}T^{\mu\nu}}$となるためには、明らかに$\boldsymbol{\sigma_\mu\bar{\sigma}_\nu+\sigma_\nu\bar{\sigma}_\mu=2\eta_{\mu\nu}}$が成り立たねばならない。($\mathbf{1/2}$の因子は、traceをとった公式$\mathbf{Tr}(\boldsymbol{\sigma_\mu\bar{\sigma}_\nu})=\boldsymbol{2\eta_{\mu\nu}}$と整合的であるために必要。)

3.2 相対論的場の方程式

ローレンツ群とその表現を学んだので、ローレンツ共変な場の方程式を容易に構成できる。特に、スピンが半整数の場に対する方程式を作るには $\boldsymbol{SL(2,C)}$ スピナーを用いるのが自然であり強力。$\boldsymbol{\gamma^\mu}$ 行列が自然に現れる。(Klein-Gordon 方程式のルートをとる操作は要らない。)

3.2.1 Klein-Gordon(scalar) 場の方程式

最も簡単な場合である、$\boldsymbol{\mathcal{D}^{00}}$ に属する一つのスカラー場 $\boldsymbol{\phi}$(すなわちローレンツ不変な場) から始める。
共変性を満たす最も簡単な方程式は、

$$\boldsymbol{\partial_{\alpha\dot{\beta}}\phi = 0 \qquad (= (\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\beta}}\partial_\mu\phi)} \tag{155}$$

しかし、これでは $\boldsymbol{\partial_\mu\phi = 0 \rightarrow \phi =}$ constant となりまずい。
非自明な方程式をえるには、不変な微分 $\boldsymbol{\partial_{\alpha\dot{\beta}}\partial^{\alpha\dot{\beta}} = 2\partial^2}$ を用いる必要があ

る。ϕに対して一次の項に限れば、最も一般的な方程式は、

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\partial_{\alpha\dot{\beta}}\partial^{\alpha\dot{\beta}}\phi &= \partial^2\phi = -m^2\phi \\
\therefore \qquad (\partial^2 + m^2)\phi &= 0
\end{aligned}
\tag{156}
$$

これはKlein-Gordon 方程式と呼ばれる。フーリエ変換をすると、もちろん相対論的な分散関係

$$
E^2 = \vec{p}^2 + m^2 \tag{157}
$$

が得られる。この分散関係はすべての相対論的な自由場に対して要請される。

3.2.2 Weyl 方程式

次に簡単なのは、$\mathcal{D}^{\frac{1}{2}0}$ に属する2成分スピナーξ_α に対するWeyl方程式である。最も簡単な方程式を書くと

$$
\begin{aligned}
\partial^{\alpha\dot{\beta}}\xi_\alpha &= (\bar{\sigma}^\mu)^{\dot{\beta}\alpha}\partial_\mu\xi_\alpha = 0 \\
\bar{\sigma}^\mu &= (1, \vec{\sigma}) \qquad (\mu\text{は上付き})
\end{aligned}
\tag{158}
$$

これは、スカラー場の場合と異なり、非自明な内容を持っている。また、これは$\boldsymbol{m^2 = 0}$のKG方程式を満たす:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{0} &= \boldsymbol{\partial_{\alpha\dot{\gamma}}\partial^{\alpha\dot{\beta}}\xi_\alpha = \delta^{\dot{\beta}}_{\dot{\gamma}}\partial^2\xi_\alpha} \\ \therefore \qquad \boldsymbol{\partial^2\xi_\alpha} &= \boldsymbol{0} \end{aligned} \tag{159}$$

より具体的にこの方程式を書くと、

$$\boldsymbol{(\partial_t + \sigma_i\partial_i)\xi = 0\,, \qquad E = |\vec{p}| \equiv p} \tag{160}$$

フーリエ展開すると、

$$\boldsymbol{E = \vec{p}\cdot\vec{\sigma}} \quad \Rightarrow \quad \text{helicity} \equiv \boldsymbol{h = \frac{\vec{p}\cdot\vec{\sigma}}{p} = 1} \tag{161}$$

一方$\boldsymbol{\eta^{\dot{\beta}} \in \mathcal{D}^{0\frac{1}{2}}(M^{T^{-1}})}$を考えると、

$$\boldsymbol{\partial_{\alpha\dot{\beta}}\eta^{\dot{\beta}}} = \boldsymbol{(\sigma^\mu)^{\alpha\dot{\beta}}\partial_\mu\eta^{\dot{\beta}} = 0} \tag{162}$$

$$\boldsymbol{(\partial_t - \sigma_i\partial_i)\eta^{\cdot}} = \boldsymbol{0} \qquad \boldsymbol{\sigma^\mu = (1, -\vec{\sigma})} \tag{163}$$

$$\boldsymbol{h} = \boldsymbol{-1} \tag{164}$$

これはhelicity $\boldsymbol{-1}$を持つmasslessのフェルミオンを記述する。

3.2.3 Dirac 方程式

Weyl 方程式は massless の fermion しか記述できない。Massive な fermion に対しては、$\boldsymbol{\xi}_\alpha \in \boldsymbol{\mathcal{D}}^{\frac{1}{2}0}$ と $\boldsymbol{\eta}^{\dot{\beta}} \in \boldsymbol{\mathcal{D}}^{0\frac{1}{2}}$ の両方が必要である。これらを用いると、次の方程式系が書ける：

$$\boldsymbol{\partial}^{\alpha\dot{\beta}}\boldsymbol{\xi}_\alpha = \boldsymbol{a}\boldsymbol{\eta}^{\dot{\beta}} \tag{165}$$

$$\boldsymbol{\partial}_{\alpha\dot{\beta}}\boldsymbol{\eta}^{\dot{\beta}} = \boldsymbol{b}\boldsymbol{\xi}_\alpha \tag{166}$$

ここで $\boldsymbol{a}$ および $\boldsymbol{b}$ は質量の次元を持つ。群論的には、例えば第一式では $\boldsymbol{\mathcal{D}}^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} \otimes \boldsymbol{\mathcal{D}}^{\frac{1}{2}0} = \boldsymbol{\mathcal{D}}^{1\frac{1}{2}} \oplus \boldsymbol{\mathcal{D}}^{0\frac{1}{2}}$ なる CG 分解のうち、contraction のために $\boldsymbol{\mathcal{D}}^{0\frac{1}{2}}$ のみが抽出されている。

さて、各々の成分が KG 方程式を満たすことを要求する必要がある。$\boldsymbol{\partial}_{\gamma\dot{\beta}}$ を最初の方程式に作用させると

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a}\boldsymbol{\partial}_{\gamma\dot{\beta}}\boldsymbol{\eta}^{\dot{\beta}} &= \boldsymbol{\partial}_{\gamma\dot{\beta}}\boldsymbol{\partial}^{\alpha\dot{\beta}}\boldsymbol{\xi}_\alpha = \delta^\alpha_\gamma\boldsymbol{\partial}^2\boldsymbol{\xi}_a = -\boldsymbol{m}^2\boldsymbol{\xi}_\alpha \\
\therefore \quad \boldsymbol{\partial}_{\alpha\dot{\beta}}\boldsymbol{\eta}^{\dot{\beta}} &= -\frac{\boldsymbol{m}^2}{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{\xi}_\alpha \\
\therefore \quad \boldsymbol{a}\boldsymbol{b} &= -\boldsymbol{m}^2 \qquad (167)
\end{aligned}$$

この条件が満たされれば、$\boldsymbol{\eta}^{\dot{\beta}}$が自動的に質量$\boldsymbol{m}$のKG方程式を満たすことが容易にチェックできる。場を適当にrescaleすれば、$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$とできるから、以下では、$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{i}\boldsymbol{m}$ととっても一般性を失わない。従って、

$$\boxed{\begin{aligned} \boldsymbol{\partial}^{\alpha\dot{\beta}}\boldsymbol{\xi}_{\alpha} &= -\boldsymbol{i}\boldsymbol{m}\boldsymbol{\eta}^{\dot{\beta}} \qquad (168) \\ \boldsymbol{\partial}_{\alpha\dot{\beta}}\boldsymbol{\eta}^{\dot{\beta}} &= -\boldsymbol{i}\boldsymbol{m}\boldsymbol{\xi}_{\alpha} \qquad (169) \end{aligned}}$$

次に、$\boldsymbol{\xi}_{\alpha}$と$\boldsymbol{\eta}^{\dot{\beta}}$を併せて、次のように4成分の**Dirac spinor**を定義する：

$$\boldsymbol{\psi} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\xi}_{\alpha} \\ \boldsymbol{\eta}^{\dot{\beta}} \end{pmatrix} \tag{170}$$

すると上記の方程式系は次のようにまとめて書ける：

$$-i\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}\psi = \begin{pmatrix} 0 & \partial_{\alpha\dot{\beta}} \\ \partial^{\alpha\dot{\beta}} & 0 \end{pmatrix}\psi$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & (\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\beta}}\partial_\mu \\ (\bar{\sigma}^\mu)^{\dot{\beta}\alpha}\partial_\mu & 0 \end{pmatrix}\psi \qquad (171)$$

ここで、ガンマ行列γ^μを次のように定義するのが自然：

$$\gamma^\mu \equiv \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix} = \left\{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -\vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}\right\} \qquad (172)$$

すると、ψに対する良く知られた**Dirac方程式**が得られる：

$$\boxed{(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi = 0 \qquad (173)}$$

σ^μと$\bar{\sigma}^\mu$が満たす関係式より、γ^μの満たす代数関係として次の**Clifford代数**が自然に得られる：

$$\boxed{\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu} \quad (174)}$$

逆に、この代数から出発して、ψに対するスピナー表現$\mathcal{D}^{\frac{1}{2}0} \oplus \mathcal{D}^{0\frac{1}{2}}$を作ることもできるが、その方法ではClifford代数の出所が明確にならない。しかし、他の次元でのDirac方程式を得るには、Clifford代数から出発する方法の方がはるかに便利である。

□ **Chiral(Weyl)射影**：

上で見たように、ディラック場は二つの既約表現$\mathcal{D}^{\frac{1}{2}0}$ 及び$\mathcal{D}^{0\frac{1}{2}}$から成り立っている。この各々の表現を抽出する射影を*chiral*または*Weyl*射影と言う。まずγ_5行列を次のように定義する：

$$\gamma_5 \equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{175}$$

$$\gamma_5^2 = 1 \tag{176}$$

明らかに

$$\gamma_5 \begin{pmatrix} \xi_\alpha \\ \eta^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_\alpha \\ -\eta^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix} \tag{177}$$

γ_5の固有値を$chirality$と呼ぶ。従って、欲しい射影は

$$\mathcal{P}_\pm \equiv \frac{1}{2}(1 \pm \gamma_5), \qquad \mathcal{P}_\pm^2 = \mathcal{P}_\pm, \qquad \mathcal{P}_+\mathcal{P}_- = 0 \tag{178}$$

$$\mathcal{P}_+\psi = \xi \quad \in \mathcal{D}^{\frac{1}{2}0}$$

$$\mathcal{P}_-\psi = \eta \quad \in \mathcal{D}^{0\frac{1}{2}}$$

で与えられる。

3.2.4 Proca及びMaxwell 方程式

今度はベクトル場V^μの満たす方程式を導出する。Massiveな場合はProca方程式、masslessの場合は Maxwell 方程式と呼ばれる。後者は前者の特別な場合なので、massiveの場合を考察する。
まず一般的な構造を調べよう。すでに見たように、ベクトル場は$\xi_{\alpha\dot{\beta}} = (\sigma_\mu)_{\alpha\dot{\beta}}V^\mu \in \mathcal{D}^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$で表現される。微分$\partial_\mu$ も$\mathcal{D}^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$に属するので、$\partial\xi$は次

のような表現に分解される：

$$\boldsymbol{\mathcal{D}}^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} \otimes \boldsymbol{\mathcal{D}}^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} = \boldsymbol{\mathcal{D}}^{\mathbf{11}} \oplus \boldsymbol{\mathcal{D}}^{\mathbf{10}} \oplus \boldsymbol{\mathcal{D}}^{\mathbf{01}} \oplus \boldsymbol{\mathcal{D}}^{\mathbf{00}} \tag{179}$$

$\mathbf{1}$ は対称表現、$\mathbf{0}$ は反対称表現であることに注意する。
$\boldsymbol{SL(2)}$ 添え字のひとつのペアを縮約すると ($\boldsymbol{\epsilon}^{\alpha\beta}$ との縮約)、反対称化がなされて、$\boldsymbol{\mathcal{D}}^{\mathbf{11}}$ 部分が落ちる。さらに、残りの添え字のペアを対称化すると、$\boldsymbol{\mathcal{D}}^{\mathbf{00}}$ 部分を落とすことができて、$\boldsymbol{\mathcal{D}}^{\mathbf{10}}$ と $\boldsymbol{\mathcal{D}}^{\mathbf{01}}$ が残る。これらに属する新たな場を $\boldsymbol{\chi} \in \boldsymbol{\mathcal{D}}^{\mathbf{10}}$ および $\boldsymbol{\eta} \in \boldsymbol{\mathcal{D}}^{\mathbf{01}}$ とする。
これらの場の運動項を得るために、まず $\boldsymbol{\partial}$ を $\boldsymbol{\chi}$ に作用させると

$$\boldsymbol{\mathcal{D}}^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} \otimes \boldsymbol{\mathcal{D}}^{\mathbf{10}} = \boldsymbol{\mathcal{D}}^{\frac{3}{2}\frac{1}{2}} \oplus \boldsymbol{\mathcal{D}}^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$$

今度も同様に、添え字のペアを縮約すると $\boldsymbol{\mathcal{D}}^{\frac{3}{2}\frac{1}{2}}$ 部分が落ちて、$\boldsymbol{\xi} \in \boldsymbol{\mathcal{D}}^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$ のみが残る。$\boldsymbol{\partial\eta}$ に対しても同様の考察をすると、結局閉じた方程式系が得られる。
具体的にこれを書き下すと[2]

[2]( ) は同種類の添え字の対称化を表す。

$$
\begin{array}{lll}
(i) & \partial^{\alpha(\dot\beta}\xi_\alpha{}^{\dot\gamma)} = a_1\eta^{(\dot\beta\dot\gamma)} & \in \mathcal{D}^{01} \text{ (ASD)} \\
(ii) & \partial_{\alpha\dot\beta}\eta^{(\dot\beta\dot\gamma)} = a_2\xi_\alpha{}^{\dot\gamma} & \in \mathcal{D}^{\frac12\frac12} \text{ (vector)} \\
(iii) & \partial_{(\alpha\dot\gamma}\xi^{\dot\gamma}{}_{\beta)} = a_3\chi_{(\alpha\beta)} & \in \mathcal{D}^{10} \text{ (SD)} \\
(iv) & \partial^{\alpha\dot\beta}\chi_{(\alpha\gamma)} = a_4\xi^{\dot\beta}{}_\gamma & \in \mathcal{D}^{\frac12\frac12} \text{ (vector)}
\end{array}
$$

このタイプの方程式はDirac-Fierz-Pauli 方程式と呼ばれる。もともとの独立な場の成分の数は、$4(\xi_\alpha^{\dot\gamma}) + 3(\eta^{\dot\beta\dot\gamma}) + 3(\chi_{\alpha\beta}) = 10$ であるが、最終的にはこれがon-shellで3成分になることを以下で見る。
ローレンツ添え字を持った場で書き直して、ベクトル場がKG方程式を満

たすように定数$\boldsymbol{a_i}$を定める。 必要な変換公式をリストアップすると

$$
\begin{aligned}
\partial_{\alpha\dot\beta} &= (\sigma^\mu)_{\alpha\dot\beta}\partial_\mu && (180)\\
\partial^{\alpha\dot\beta} &= (\bar\sigma^\mu)^{\dot\beta\alpha}\partial_\mu && (181)\\
\xi_{\alpha\dot\beta} &= (\sigma^\mu)_{\alpha\dot\beta}V_\mu && \\
\therefore \qquad \xi_\alpha{}^{\dot\beta} &= \epsilon^{\dot\beta\dot\gamma}\xi_{\alpha\dot\gamma} = (\sigma^\mu\epsilon^T)_\alpha{}^{\dot\beta}V_\mu && (182)\\
\xi^{\dot\beta}{}_\gamma &= \epsilon^{\dot\beta\dot\alpha}\xi^T_{\dot\alpha\gamma} = (\epsilon\sigma^{\mu T})^{\dot\beta}{}_\gamma V_\mu = (\bar\sigma^\mu\epsilon)^{\dot\beta}{}_\gamma V_\mu && (183)\\
\chi_{\alpha\beta} &= \frac{i}{2}(\sigma^{\mu\nu}\epsilon)_{\alpha\beta}F^{(+)}_{\mu\nu} && (184)\\
\eta_{\dot\alpha\dot\beta} &= -\frac{i}{2}(\epsilon^T\bar\sigma^{\mu\nu})_{\dot\alpha\dot\beta}F^{(-)}_{\mu\nu} && \\
\therefore \qquad \eta^{\dot\alpha\dot\beta} &= -\frac{i}{2}(\bar\sigma^{\mu\nu}\epsilon^T)^{\dot\alpha\dot\beta}F^{(-)}_{\mu\nu} && (185)
\end{aligned}
$$

注： 以前のconventionでは、例えば$\chi_{\alpha\beta}$は

$$\chi_{\alpha\beta} = -i(\sigma^{\mu\nu}\epsilon)_{\alpha\beta}\chi^{(+)}_{\mu\nu} \tag{186}$$

と定義されるが、後の式が簡単になるように、$\chi^{(+)}_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}F^{(+)}_{\mu\nu}$と置いた。同様に、$\eta^{(-)}_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}F^{(-)}_{\mu\nu}$。

□ **方程式 (i) 及び (iii) の解析**：

上記の変換を行うと、Eq.(i) の左辺は

$$\begin{aligned}\mathbf{LHS} &= \frac{1}{2}\left\{(\bar{\boldsymbol{\sigma}}^{\mu})^{\dot{\beta}\alpha}\boldsymbol{\partial}_{\mu}(\boldsymbol{\sigma}^{\nu}\boldsymbol{\epsilon}^{T})_{\alpha}{}^{\dot{\gamma}}\boldsymbol{V}_{\nu} + (\dot{\boldsymbol{\beta}} \leftrightarrow \dot{\boldsymbol{\gamma}})\right\} \\ &= \frac{1}{2}\left\{(\bar{\boldsymbol{\sigma}}^{\mu}\boldsymbol{\sigma}^{\nu}\boldsymbol{\epsilon}^{T})^{\dot{\beta}\dot{\gamma}}\boldsymbol{\partial}_{\mu}\boldsymbol{V}_{\nu} + (\dot{\boldsymbol{\beta}} \leftrightarrow \dot{\boldsymbol{\gamma}})\right\}\end{aligned}$$

となる。以前導いた恒等式 $(\bar{\boldsymbol{\sigma}}^{\mu}\boldsymbol{\sigma}^{\nu}\boldsymbol{\epsilon}^{T})^{T} = -\bar{\boldsymbol{\sigma}}^{\nu}\boldsymbol{\sigma}^{\mu}\boldsymbol{\epsilon}^{T}$ を用いてこれを書き直すと、

$$\begin{aligned}\mathbf{LHS} &= \frac{1}{2}\Big((\bar{\boldsymbol{\sigma}}^{\mu}\boldsymbol{\sigma}^{\nu} - \bar{\boldsymbol{\sigma}}^{\nu}\boldsymbol{\sigma}^{\mu})\boldsymbol{\epsilon}^{T}\Big)^{\dot{\beta}\dot{\gamma}}\boldsymbol{\partial}_{\mu}\boldsymbol{V}_{\nu} \\ &= \frac{1}{2\boldsymbol{i}}(\bar{\boldsymbol{\sigma}}^{\mu\nu}\boldsymbol{\epsilon}^{T})^{\dot{\beta}\dot{\gamma}}\boldsymbol{V}_{\mu\nu} \qquad (187)\end{aligned}$$

$$\text{ここで}\quad \boldsymbol{V}_{\mu\nu} \equiv \boldsymbol{\partial}_{\mu}\boldsymbol{V}_{\nu} - \boldsymbol{\partial}_{\nu}\boldsymbol{V}_{\mu} \qquad (188)$$

$\bar{\boldsymbol{\sigma}}^{\mu\nu}$ が ASD であることを考慮して Eq.(i) の右辺と比較すると、

$$\boxed{\boldsymbol{a_1 F^{(-)}_{\mu\nu} = V^{(-)}_{\mu\nu}}} \tag{189}$$

全く同様にして、Eq.(iii) より

$$\boxed{\boldsymbol{a_3 F^{(+)}_{\mu\nu} = -V^{(+)}_{\mu\nu}}} \tag{190}$$

を得る。

□ **方程式 (ii) 及び (iv) の解析**：

Eq. (ii) の左辺は、

$$\begin{aligned} \mathbf{LHS} &= (\boldsymbol{\sigma}^{\mu})_{\alpha\dot{\beta}} \boldsymbol{\partial}_{\mu} \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}\boldsymbol{i}} (\bar{\boldsymbol{\sigma}}^{\nu\rho} \boldsymbol{\epsilon}^{T})^{\dot{\beta}\dot{\gamma}} \boldsymbol{F}^{(-)}_{\nu\rho} \\ &= \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}\boldsymbol{i}} (\boldsymbol{\sigma}^{\mu} \bar{\boldsymbol{\sigma}}^{\nu\rho} \boldsymbol{\epsilon}^{T})_{\alpha}{}^{\dot{\gamma}} \boldsymbol{\partial}_{\mu} \boldsymbol{F}^{(-)}_{\nu\rho} \end{aligned} \tag{191}$$

ここで、$\boldsymbol{\sigma}^\mu\bar{\boldsymbol{\sigma}}^{\nu\rho}$を分解する恒等式が必要になる。群論的な構造は$\mathcal{D}^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} \otimes \mathcal{D}^{01} = \mathcal{D}^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} \bigoplus \mathcal{D}^{\frac{1}{2}\frac{3}{2}}$。しかし、$\mathcal{D}^{\frac{1}{2}\frac{3}{2}}$部分は、$\boldsymbol{\sigma}^\mu$ と$\bar{\boldsymbol{\sigma}}^{\nu\rho}$が縮約されている(スピナー添え字が反対称化されている) ので現れない。従って 次の形の恒等式が成り立つはずである：

$$\boldsymbol{\sigma}^\mu\bar{\boldsymbol{\sigma}}^{\nu\rho} = \boldsymbol{b}(\boldsymbol{\eta}^{\mu\nu}\boldsymbol{\sigma}^\rho - \boldsymbol{\eta}^{\mu\rho}\boldsymbol{\sigma}^\nu) + \boldsymbol{c}\boldsymbol{\epsilon}^{\mu\nu\rho\lambda}\boldsymbol{\sigma}_\lambda \tag{192}$$

$\boldsymbol{\sigma}^\mu = (\mathbf{1}, -\vec{\boldsymbol{\sigma}}), \bar{\boldsymbol{\sigma}}^\mu = (\mathbf{1}, \vec{\boldsymbol{\sigma}})$ また$\bar{\boldsymbol{\sigma}}^{\mu\nu} = (\boldsymbol{i}/\mathbf{2})(\bar{\boldsymbol{\sigma}}^\mu\boldsymbol{\sigma}^\nu - \bar{\boldsymbol{\sigma}}^\nu\boldsymbol{\sigma}^\mu)$ を思い出して、(192)で$\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\nu} = \mathbf{0}, \boldsymbol{\rho} = \mathbf{1}$と置いた場合を調べると、$\boldsymbol{b} = -\boldsymbol{i}$を得る。また$\boldsymbol{\mu} = \mathbf{2}, \boldsymbol{\nu} = \mathbf{0}, \boldsymbol{\rho} = \mathbf{1}$と置いてやると、$\boldsymbol{c} = \mathbf{1}$を得る。Eq. (iv) の解析に必要な類似の恒等式も併せて書くと(こんどは$\boldsymbol{\sigma}^{\mu\nu} = (\boldsymbol{i}/\mathbf{2})(\boldsymbol{\sigma}^\mu\bar{\boldsymbol{\sigma}}^\nu - \boldsymbol{\sigma}^\nu\bar{\boldsymbol{\sigma}}^\mu)$ を用いる)

$$\boldsymbol{\sigma}^\mu\bar{\boldsymbol{\sigma}}^{\nu\rho} = \boldsymbol{i}(\boldsymbol{\eta}^{\mu\nu}\boldsymbol{\sigma}^\rho - \boldsymbol{\eta}^{\mu\rho}\boldsymbol{\sigma}^\nu) + \boldsymbol{\epsilon}^{\mu\nu\rho\lambda}\boldsymbol{\sigma}_\lambda \tag{193}$$

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}}^\mu\boldsymbol{\sigma}^{\nu\rho} = \boldsymbol{i}(\boldsymbol{\eta}^{\mu\nu}\bar{\boldsymbol{\sigma}}^\rho - \boldsymbol{\eta}^{\mu\rho}\bar{\boldsymbol{\sigma}}^\nu) + \boldsymbol{\epsilon}^{\mu\nu\rho\lambda}\bar{\boldsymbol{\sigma}}_\lambda \tag{194}$$

これらの恒等式を用いると、Eq. (ii)及び(iv)から次の二つの式が得られる:

$$\boxed{\begin{aligned}\partial^\mu F^{(-)}_{\mu\nu} &= a_2 V_\nu \qquad (195)\\ \partial^\mu F^{(+)}_{\mu\nu} &= -a_4 V_\nu \qquad (196)\end{aligned}}$$

これより、$a_2 \neq 0$または$a_4 \neq 0$ならば、$\partial^\mu V_\mu = 0$となることがわかる。

□ **方程式系の整合性**:

∂^μを(189)に作用させると、

$$\begin{aligned}a_1 \partial^\mu F^{(-)}_{\mu\nu} &= \partial^\mu V^{(-)}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\partial^\mu (V_{\mu\nu} - \tilde{V}_{\mu\nu})\\ &= \frac{1}{2}(\partial^2 V_\nu - \partial_\nu(\partial \cdot V)) \qquad (197)\end{aligned}$$

ここで、双対テンソルの定義の中に$\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$があることから従う式$\partial^\mu \tilde{V}_{\mu\nu} =$

$\mathbf{0}$を用いた。式(195)と併せると

$$\boldsymbol{a_1 a_2 V_\nu = \frac{1}{2}(\partial^2 V_\nu - \partial_\nu(\partial \cdot V))} \tag{198}$$

同様にして、(195)と(196)より

$$\boldsymbol{a_3 a_4 V_\nu = \frac{1}{2}(\partial^2 V_\nu - \partial_\nu(\partial \cdot V))} \tag{199}$$

ここで$\boldsymbol{V_\nu}$が質量$\boldsymbol{m}$のKG方程式を満たすことを要求する。すると[3]

$$\boldsymbol{a_1 a_2 = a_3 a_4 = -\frac{m^2}{2}} \tag{200}$$

$\boldsymbol{a_1 = 1, a_3 = -1}$ととると、$\boldsymbol{F^{(\pm)}_{\mu\nu} = V^{(\pm)}_{\mu\nu}}$が成り立つ。すると$\boldsymbol{a_2 = -a_4 = -m^2/2}$となる。
すべてを併せると、次の**Proca 方程式**を得る:

[3]すでに述べたように、この場合には$\boldsymbol{\partial \cdot V = 0}$は自動的。

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{F_{\mu\nu}} &= \boldsymbol{\partial_\mu V_\nu - \partial_\nu V_\mu} && (201) \\
\boldsymbol{\partial^\mu F_{\mu\nu}} &= \boldsymbol{-m^2 V_\nu (\equiv j_\nu)} && (202) \\
\boldsymbol{\partial^\mu V_\mu} &= \boldsymbol{0} && (203)
\end{aligned}
$$

$\boldsymbol{m^2 \neq 0}$であるから、第3式は第2式からの帰結であり、この拘束によりProca場は3個の独立な自由度を持つ。

$\boldsymbol{m^2 = 0}$と置くとmasslessの **Maxwell 方程式**になる。この場合には、$\boldsymbol{\partial^\mu V_\mu = 0}$の条件を課す必要がないことに注意する。

Proca場の方程式はMaxwell系と異なり、局所的なゲージ不変性を持たない。しばしば、これは自発的対称性の破れによるヒッグズ機構と解釈される。

□ **ロンドンによる超伝導の有効理論**:

Proca場が最初に現れたのは、(恐らく) London兄弟による超伝導のマクロ

な有効理論においてであった[4]。$\boldsymbol{V}^{\mu}$ を effective な Maxwell 場 $\boldsymbol{A}^{\mu}$ と同定すると、Proca 方程式はカレントがベクトルポテンシャルに比例することを表す:

$$\boldsymbol{j}^{\mu} = -\boldsymbol{m}^{2}\boldsymbol{A}^{\mu} \tag{204}$$

これは有名な **London 方程式** (の相対論的な形) に他ならない。電気的なソースがなく ($i.e.$ $\boldsymbol{A}_{0} = \boldsymbol{0}$) しかも時間依存性がない ($\boldsymbol{\partial}_{t}^{2}\vec{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{0}$) 場合、KG 方程式は次の形になる：

$$(-\vec{\boldsymbol{\nabla}}^{2} + \boldsymbol{m}^{2})\vec{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{0} \tag{205}$$

この curl をとり、$\vec{\boldsymbol{\nabla}} \times \vec{\boldsymbol{A}} = \vec{\boldsymbol{B}}$ を用いると、

$$\begin{aligned} \vec{\boldsymbol{\nabla}}^{2}\vec{\boldsymbol{B}} &= \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{\lambda}_{L}^{2}}\vec{\boldsymbol{B}} \\ \boldsymbol{\lambda}_{L} &= \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{m}} = \text{London penetration depth} \end{aligned} \tag{206}$$

を得る。この解は、**Meissner 効果**を記述する:

$$\vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{x}}) = \vec{\boldsymbol{B}}_{0}\boldsymbol{e}^{-\frac{1}{\lambda_{L}}\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\vec{\boldsymbol{x}}}, \qquad \hat{\boldsymbol{n}}^{2} = \boldsymbol{1} \tag{207}$$

[4] F. London and H. London, Proc. Roy. Soc. (London) A149, (1935) 72.

演習　3.11　スピン$\mathbf{3/2}$を持つ、massiveなRarita-Schwinger場$\boldsymbol{\psi_{\mu\alpha}}$の満たす方程式を、次の二つの既約表現を用いて構成せよ。

$$\boldsymbol{\xi}_{(\alpha\beta)}{}^{\dot\gamma} \quad \in \boldsymbol{\mathcal{D}}^{1\frac{1}{2}}, \qquad \boldsymbol{\chi}_{\alpha}{}^{(\dot\beta\dot\gamma)} \quad \in \boldsymbol{\mathcal{D}}^{\frac{1}{2}1} \tag{208}$$

$\boldsymbol{\psi_{\mu\alpha}}$は16成分を持つように見えるのに対し、$\boldsymbol{\xi}$と$\boldsymbol{\chi}$は併せて12の自由度しか持たないことに注意。これは、何の拘束もない場合、$\boldsymbol{\psi_{\mu\alpha}}$はスピン$\mathbf{1/2}$部分も含んでしまっており、それを落として初めてスピン$\mathbf{3/2}$の場が記述できることを示している。

3.3　場のローレンツ不変な作用

以下では、様々な場に対するローレンツ不変な作用を構成する。
ミクロな基本作用に対して、次の性質を要求：

1. Locality:　作用が **local** であること。すなわち、作用は同一点での場の積で構成され、しかも微分の数は有限であること。
2. Reality or Hermiticity:　作用は実。これはエネルギー＝ハミルトニアンが実であることから要請される。量子レベルでは、エルミート性の要請になる。特殊な場合(以下の注参照)を除いて、エルミート演算子は実固有値を持つゆえ。
3. Lorentz Invariance:

注:　特殊な場合には、エルミート演算子は複素固有値を持つことができる。$\mathcal{O}$ をエルミート演算子、v を固有値 λ に属する固有ベクトルとする。すると、

$$\begin{aligned} \mathcal{O}v &= \lambda v \\ \therefore \qquad (v, \mathcal{O}v) &= \lambda(v,v) = (\mathcal{O}v, v) = (v, \mathcal{O}v)^* = \lambda^*(v,v) \\ \therefore \qquad (\lambda - \lambda^*)(v,v) &= 0 \end{aligned} \tag{209}$$

これより、$\boldsymbol{\lambda}$は、$(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v})\neq\mathbf{0}$の場合にのみ実。すなわち、$\boldsymbol{v}$がゼロノルムを持つ場合には$\boldsymbol{\lambda}$は実である必要はない。

3.3.1 自由場の作用

古典自由場の作用から始める。これらは上記の一般的要請を満たし、以前に導いた場の運動方程式を生成しなければならない。

簡単のため、単位系を$\hbar=\boldsymbol{c}=\mathbf{1}$となるようにとる。すると、次元の勘定は

$$\begin{aligned} & \boldsymbol{S}\sim\hbar\sim\boldsymbol{px}\sim\boldsymbol{Mvx}\sim\boldsymbol{ML}\sim\mathbf{1} \\ \therefore\quad & \boldsymbol{L}\sim\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{M}} \end{aligned}\tag{210}$$

以下演算子$\boldsymbol{\mathcal{O}}$のmass次元を$[\boldsymbol{\mathcal{O}}]$と記す。

□ **Klein-Gordon (scalar) 場**:

運動方程式とそれを生成する作用は

$$(\partial^2 + m^2)\phi = 0 \tag{211}$$

$$S = \int d^4x \frac{1}{2}\phi(\partial^2 + m^2)\phi \tag{212}$$

ϕ の次元は運動項の部分より容易に読みとれて

$$0 \ = \ -4 + 2 + 2[\phi] \quad \Rightarrow \quad [\phi] = 1 \tag{213}$$

□ **Weyl 場**:

まず $\xi_\alpha \in \mathcal{D}^{\frac{1}{2}0}$ の場合を考える。運動方程式は

$$\partial^{\alpha\dot{\beta}}\xi_\alpha \ = \ 0 \tag{214}$$

ローレンツ不変な量を作るには、$\mathcal{D}^{0\frac{1}{2}}$ のように変換する場が必要。 手持ちは ξ_α しかないので、その複素共役 $(\xi_\alpha)^* = \xi^*_{\dot{\alpha}}$ を用いる必要がある。すると、明らかなローレンツ不変量は

$$\mathcal{I}_\xi \ = \ \xi^*_{\dot{\beta}}\partial^{\alpha\dot{\beta}}\xi_\alpha = \xi^*_{\dot{\beta}}(\bar{\sigma}^\mu)^{\dot{\beta}\alpha}\partial_\mu\xi_\alpha = \xi^\dagger\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\xi \tag{215}$$

Realityの問題　これが実であることをチェックする必要があるが、問題がある。線形運動方程式(214)のレベルでは、ξ_α は通常の数(c#)の関数と見

なせる。しかし、フェルミオンを記述する場としてその二次の作用を書くときには、フェルミオンに対してはコヒーレントな古典場が存在しないことを思い出す必要がある。第二量子化の形式では、意味のあるフェルミ場は既に量子化された形で現れるのであり、反可換な振動子で記述される。従って、フェルミ場に対しては、何らかの有効な “古典場” の概念を導入して、その複素共役を定義しなければならない。その定義は、経路積分法で用いられたときに、反可換な場を用いるオペレーター形式と整合的な結果を出すものでなければならない。

<u>答え</u>： $\boldsymbol{\xi}_{\alpha}$ はグラスマン代数の odd element、または反可換な c# と解釈すること。そのような要素 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ は次のルールを満たすものとして定義される：

$$\boxed{\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta} = -\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}\,, \qquad (\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta})^* \equiv \boldsymbol{\beta}^*\boldsymbol{\alpha}^* \quad (216)}$$

ここでの複素共役はちょうどエルミート共役と同じ性質を持つことに注意。

恒等式

$$(\bar{\boldsymbol{\sigma}}^{\mu})^{*}=(\boldsymbol{\epsilon}\boldsymbol{\sigma}^{\mu T}\boldsymbol{\epsilon}^{T})^{*}=\boldsymbol{\epsilon}\boldsymbol{\sigma}^{\mu}\boldsymbol{\epsilon}^{T} \tag{217}$$

を用いると(215)の複素共役は、

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_{\xi}^{*} &= (\xi_{\dot{\beta}}^{*}(\bar{\sigma}^{\mu})^{\dot{\beta}\alpha}\partial_{\mu}\xi_{\alpha})^{*}=\partial_{\mu}\xi_{\dot{\alpha}}^{*}((\bar{\sigma}^{\mu})^{\dot{\beta}\alpha})^{*}\xi_{\beta}=\partial_{\mu}\xi_{\dot{\alpha}}^{*}(\epsilon\sigma^{\mu}\epsilon^{T})^{\beta\dot{\alpha}}\xi_{\beta}\\ &= \partial_{\mu}\xi_{\dot{\alpha}}^{*}(\epsilon\sigma^{\mu T}\epsilon^{T})^{\dot{\alpha}\beta}\xi_{\beta}=\partial_{\mu}\xi_{\dot{\alpha}}^{*}(\bar{\sigma}^{\mu})^{\dot{\alpha}\beta}\xi_{\beta}=\partial_{\mu}\xi^{\dagger}\bar{\sigma}^{\mu}\xi\end{aligned} \tag{218}$$

となる。

容易にわかるように、$\mathcal{I}_{\xi}+\mathcal{I}_{\xi}^{*}$ は全微分であり、作用として用いることはできない。従って、もう一つの実の組み合わせを採用する：

$$\mathcal{L}_{\xi}=\frac{i}{2}\left(\xi^{\dagger}\bar{\sigma}^{\mu}\partial_{\mu}\xi-\partial_{\mu}\xi^{\dagger}\bar{\sigma}^{\mu}\xi\right)=\frac{i}{2}\xi^{\dagger}\bar{\sigma}^{\mu}\overleftrightarrow{\partial_{\mu}}\xi \tag{219}$$

$\delta\int d^4x\mathcal{L}=0$ から正しい運動方程式が得られることが容易にわかる。

全く同様にして、$\eta^{\dot{\alpha}}\in\mathcal{D}^{0\frac{1}{2}}$ に対するラグランジアンは、

$$\mathcal{L}_{\eta}=\frac{i}{2}\eta^{\dagger}\sigma^{\mu}\overleftrightarrow{\partial_{\mu}}\eta \tag{220}$$

Weyl (及び Dirac) 場の質量次元は $\mathbf{4 = 1 + 2[\boldsymbol{\xi}] \Rightarrow [\boldsymbol{\xi}] = 3/2}$ のように決定される。

□ Dirac 場:

Dirac場のラグランジアンの運動項は

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_\psi^{kin} &= \mathcal{L}_\xi + \mathcal{L}_\eta = \frac{i}{2}\xi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \xi + \frac{i}{2}\eta^\dagger \sigma^\mu \partial_\mu \eta \\
&= \frac{i}{2}(\eta^\dagger, \xi^\dagger) \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \overleftrightarrow{\partial}_\mu \\ \bar{\sigma}^\mu \overleftrightarrow{\partial}_\mu & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \\
&= \frac{i}{2}(\xi^\dagger, \eta^\dagger) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \gamma^\mu \overleftrightarrow{\partial}_\mu \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \\
&= \frac{i}{2}\psi^\dagger \gamma^0 \gamma^\mu \overleftrightarrow{\partial}_\mu \psi \\
&= \frac{i}{2}\bar{\psi}\gamma^\mu \overleftrightarrow{\partial}_\mu \psi
\end{aligned} \tag{221}
$$

$$
\text{ここで} \quad \bar{\psi} \equiv \psi^\dagger \gamma^0 = \text{Dirac conjugate} \tag{222}
$$

質量項は$\boldsymbol{\xi}$と$\boldsymbol{\eta}$を結ぶのであったから、

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_\psi^m &= -m\eta^\dagger\xi + \xi^\dagger\eta = -m(\xi^\dagger, \eta^\dagger)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \\ &= -m\bar{\psi}\psi \end{aligned} \tag{223}$$

全体のラグランジアンは、

$$\mathcal{L}_\psi = \mathcal{L}_\psi^{kin} + \mathcal{L}_\psi^m = \frac{i}{2}\bar{\psi}\gamma^\mu \overleftrightarrow{\partial}_\mu \psi - m\bar{\psi}\psi \tag{224}$$

これを積分した作用のレベルでは、表面項を無視すれば、運動項は次のよく見る形に書き換えられる：

$$\begin{aligned} -\int d^4x \frac{i}{2}\partial_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\psi &\simeq \int d^4x \frac{i}{2}\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi \\ \therefore \qquad S_\psi &= \int d^4x \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi \end{aligned} \tag{225}$$

□ **Proca 場**:

Proca場の運動方程式は

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \\ \partial^\mu F_{\mu\nu} &= -m^2 A_\nu \\ \partial^\mu A_\mu &= 0 \end{aligned} \tag{226}$$

二番目の式は次の作用から生成されることが容易にチェックできる（第三式は無論これから従う)：

$$S_A = \int d^4x \left(-\frac{1}{4} F^{\mu\nu}[A] F_{\mu\nu}[A] + \frac{m^2}{2} A^\mu A_\mu \right) \tag{227}$$

スカラー場の場合と同様 A^μ の次元は1である。

3.3.2　相互作用ラグランジアン

□ **Scalingの解析**：

相互作用ラグランジアンの一般形は、

$$\mathcal{L}_{int} = \sum_i g_i \mathcal{O}_i \,, \qquad [g_i] = 4 - [\mathcal{O}_i] \tag{228}$$

自然なミクロのスケールは “cut-off” scale Λ であるので、これを用いてラグランジアンを **dimensionless coupling** $g_i^{(0)}$ で書き直すと、

$$\mathcal{L}_{int} = \sum_i \frac{g_i^{(0)}}{\Lambda^{[\mathcal{O}_i]-4}} \mathcal{O}_i \tag{229}$$

Λ よりうんと低いスケール $\sim M$ では、これらの項は次のように振る舞う：

$$\sum_i \frac{g_i^{(0)}}{\Lambda^{[\mathcal{O}_i]-4}} M^{[\mathcal{O}_i]} \tag{230}$$

これから分かるように、

- ナイーブには(摂動論では確かに成り立つ)次元が4以上($[\mathcal{O}_i] > 4$)の相互作用は非常に小さい。そのためこれらのオペレーターは “irrelevant” と呼ばれる。
- 一方、これらのオペレーターがcut-off scale付近で存在すると、非常に大きな寄与を与え、しばしばコントロールすることができない “non-renormalizable” な振る舞いを惹き起こす。それらのオペレーターの個数が有限であっても、それを挿入したプロセスから無限個の繰り込み不可能なオペレーターが生成されてしまう。

従って、たちのよい場の理論を作るには、ミクロな理論においてはそれらのirrelevantなオペレーターを除外する必要がある。それから得られる低エネルギー有効作用においては、それらのオペレーターは生成されるが、その係数は計算可能であり、ほとんどの場合無視できるほど小さい。

□ **繰り込み可能な相互作用**：

ローレンツ不変性を考慮すると、スピン$\mathbf{0}, \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}, \mathbf{1}$を持つ場の許される(繰り込み可能な)相互作用を列挙することができる。(スピン$\mathbf{3/2}$及び$\mathbf{2}$を持つ場は重力理論と関係しており、場の理論のレベルでは摂動論的に繰り込み不可能であることが知られている。)

全微分と内部対称性の添え字を除いて、許される相互作用は以下のようになる。

$[\mathcal{O}] = \mathbf{2}$:

$$\phi^2 \,, \quad A^2 \tag{231}$$

$\underline{[\mathcal{O}]=3}$:

$$\phi^3\,,\quad \phi\partial\cdot A\,,\quad \bar{\psi}\psi\,,\quad \psi\gamma_5\psi\,, \tag{232}$$

$\underline{[\mathcal{O}]=4}$:

$$\begin{gathered}\phi^4\,,\quad \partial\phi\cdot\partial\phi\,,\quad (A^2)^2\,,\quad \phi^2A^2\,,\quad \phi^2\partial\cdot A\,,\quad A^2\partial\cdot A\\ (\partial\cdot A)^2\,,\quad \bar{\psi}\psi\phi\,,\quad \bar{\psi}\gamma_5\psi\phi\,,\quad \bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu\,,\quad \bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi A_\mu\end{gathered} \tag{233}$$

注: もしϕ^6相互作用があるとすると、1ループで8点関数が発散し、$\log(\Lambda/m)\phi^8$なる項が生成される。ϕ^8を入れるとさらに10点関数が発散する。これが繰り返され、結局理論は繰り込み不可能となる。