

# 場の量子論の基礎

風間洋一

(東京大学大学院総合文化研究科)

## 1 場の量子論 (Quantum Field Theory) とは何か

古典場のプロトタイプ = 相対論に従う Maxwell の電磁場

- この量子論的取り扱い  $\Rightarrow$  場の量子論の始まり。
- 電子との相互作用の考察  $\Rightarrow$  Dirac 場  $\Rightarrow$  Quantum Electro-Dynamics (QED)  
場の量子論のプロトタイプ

しかし、これは場の量子論の本質を反映していない

## 場の量子論とは

無限に近い自由度を持つ量子多体系の長距離 = 低エネルギーでの振る舞いを記述し理解するための、非常に強力で高い論理的整合性を持った枠組み

低エネルギー有効理論

## Key words

無限自由度、長距離 = 低エネルギー、論理的整合性

### □ 無限自由度:

- 「本来の」対象 = 物性理論で扱うような凝縮系。  
少数有限系では現れない現象の記述  
例: 媒質中の波動、相転移、対称性の自発的破れ
- 多体性が見かけ上隠されている場合あり: 少数の素励起の物理
- 無限自由度ゆえの“困難”
  - ◆ 短距離発散 = UV divergence  
不確定性原理  $\Rightarrow$  無限個の自由度が短距離で励起されうる。
  - ◆ 長距離発散 = IR divergence  
 $\Leftarrow$  無限個の massless 低エネルギー量子の励起 (例: photons)

しかし、

これらの発散にはQFTの構造に関する重要な情報が反映されている。

□ 長距離 = 低エネルギー有効理論:

$a$  = 多体系のミクロな基本長さ (例: 格子間隔)

$\Lambda = 1/a$  = 可能なエネルギー、運動量の上限 = UV cut-off

長波長  $\lambda (\gg a)$  でプローブ  $\Rightarrow$  ミクロな詳細は平均化

$\Rightarrow$

連続的な場

$\Leftrightarrow$  QFTの背後にはしばしばQFT自体とは非常に異なるミクロな構造が存在

例:

◆ Spin system on a lattice (microscopic scale = lattice spacing)

◆ Superstring theory (microscopic scale = Planck scale ( $10^{-34}$  cm))

□ 論理的整合性:

上記の見方はQFTの近似理論としての見方を強調。

QFTの驚くべき性質: 同時に、それが非常に高い論理的整合性を持つ。

～ 熱力学

⇒ QFTは自然界の基本的な理論を記述する機能も持つ。

典型例: 素粒子の標準理論

- ◆ Quantum Chromo Dynamics
- ◆ 電弱統一理論 (Glashow-Weinberg-Salam theory)

□ QFTのこれらの特徴の根源：

QFTが広汎な応用を持つ  $\Leftarrow$  一見矛盾する二つの特徴を併せ持つ

◆ 低エネルギー有効理論:

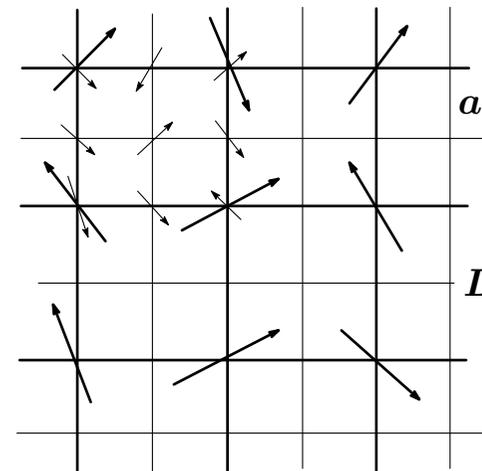
系をプローブするエネルギースケールにより有効な自由度、重要になる相互作用 が異なりうる。

scale-dependent  $\Leftrightarrow$  繰り込み (factorization)、繰り込み群

K.G. Wilson 他

具体例： 間隔  $a(\sim 1/\Lambda)$  で並べられたスピン系で作る強磁性体の Heisenberg モデル

$$H_\Lambda = -J \sum_{\langle i,j \rangle} \vec{S}_i \cdot \vec{S}_j$$



長さのスケール  $L$  (mass scale  $\sim \mu = 1/L$ ) より短距離で起こる揺らぎを平均化。(経路積分ではそれらの自由度を積分。)

$\Rightarrow$  サイズ  $\sim L$  の間隔で並ぶ有効スピンの理論。

もとのシステムと比較するために、これを  $L/a$  の因子で re-scale。

= 繰り込み変換

$\Rightarrow$  Scale  $\mu$  での有効理論: スピン間の新しい有効相互作用を含む

$$H_\mu = \sum_n \underbrace{g_n(\mu)}_{UV} \underbrace{\mathcal{O}_n(\mu)}_{IR}, \quad \text{factorized form}$$

$$\mathcal{O}_n(\mu) \sim \vec{S}_i \cdot \vec{S}_j, (\vec{S}_i \cdot \vec{S}_j)^2, \text{ etc.}$$

$\mathcal{O}_n(\mu)$  = 有効スピンから組み立てられた local operators

$g_n(\mu)$  = 有効結合定数.  $L$  より小さなスケールでの物理の情報を集約。

◆ 高度な論理的整合性:

少数の基本的パラメーターによる 自然界の基本法則の記述  
(「近似」理論ではこれは期待されない。)

例： QCDが低エネルギー有効理論であるという兆候はQCDの中では見えない。

“scale-independent”  $\Leftrightarrow$  繰り込み可能理論、Universality

繰り込み可能理論 ( の定義 ):

繰り込み変換の操作を繰り返す :  $\mu \rightarrow \text{small}$

有限個の  $g_n(\mu)$  のみが有限にとどまり、残りの結合定数がゼロに近づく場合がある。

$\Rightarrow$  長距離のダイナミクスは少数の  $g_n(\mu)$  と  $\mathcal{O}_n(\mu)$  が支配する。

= 繰り込み可能

さらに  $\mu$  を小さくしても、 $g_n(\mu)$  の大きさが変わるのみで、Hamiltonian の形は変わらない。  $\sim$  scale independent

⇔ 系は繰り込み群のIR固定点に近づく。

**Universality:** 低エネルギー極限で、もとの系のミクロな詳細がほとんど効かなくなり、幾つかのクラス (universality class) の振る舞いに分類される。

Universality class は非常にしばしば系の対称性によって支配される。

こうした理由で、QFT、特に繰り込み可能なQFT、は有用かつ強力。

- ミクロな詳細を知らなくても、低エネルギーの物理が整合的に記述できる。
- 我々の無知は有限個の  $g_n(\mu)$  に押し込められる  $\Rightarrow$  実験値で置き換えられる。

## 1.1 参考書

- ◆ M.E. Peskin and D.V. Schroeder, An introduction to Quantum Field Theory, Perseus Books, 1995
- ◆ S. Weinberg, The Quantum Theory of Fields I, II, III, Cambridge University press, 1995
- ◆ M. Sredniki, Quantum Field Theory, Cambridge University press, 2007
- ◆ J. Zinn-Justin, Quantum Field Theory and Critical Phenomena, Clarendon Press, Oxford, 2002 (4th edition)
- ◆ C. Itzykson and J.B. Zuber, Quantum Field Theory, McGraw-Hill, 1980
- ◆ J.D. Bjorken and S.D. Drell, Relativistic Quantum Fields, McGraw-Hill, 1965
- ◆ M. Maggiore, A Modern Introduction to Quantum Field Theory, Oxford University press, 2005
- ◆ G. Sterman, An Introduction to Quantum Field Theory, Cambridge University

press, 1993

- ◆ F. Mandl and G. Shaw, Quantum Field Theory, John Wiley and Sons, 1984
- ◆ P. Ramond, Field Theory, A Modern Primer, Addison-Wesley, 1990
- ◆ 九後汰一郎、ゲージ場の量子論I, II, 培風館, 1989
- ◆ 坂井典佑, 場の量子論、裳華房, 2002
- ◆ 西島和彦, 場の理論, 紀伊国屋書店, , 1987
- ◆ 柏太郎、演習場の量子論, サイエンス社, 2001
- ◆ 永長直人、物性論における場の量子論、岩波書店, 1995

## 2 場の理論の出現

場の理論は本来、低エネルギー有効理論として出現するものである。  
その最も簡単なプロトタイプを述べる。

### 2.1 媒質中の古典的な波動

結晶格子中の様々な波動の場  $\xrightarrow{\text{量子化}}$  粒子的な素励起

phonon: 弾性振動の素励起

magnon: 電子スピン波の励起

plasmon: 電子と正イオンからなるプラズマ中の電子の集団運動の素励起

exciton: 誘電体の分極の場の中性的な励起

以下、典型例として phonon 場を考察。

## 2.1.1 音響フォノン (acoustic phonon)

結晶を構成する *primitive cell* 中に  $n$  個のイオンがある場合を考えると、次の二種類の励起が起こる。

acoustic branch: 音波のように、すべてのイオンが同一方向に滑らかに振動。

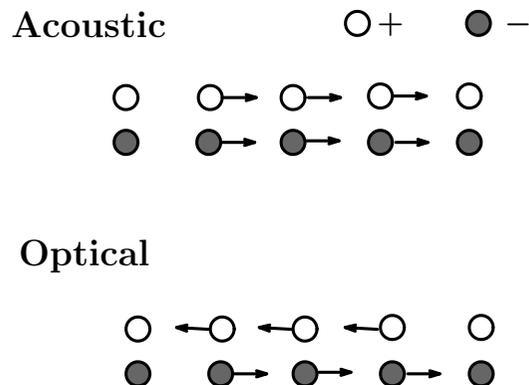
3次元では、縦波1個と横波2個の三つのモードあり。

分散関係の特徴:  $\omega_k \rightarrow 0$  as  $k \rightarrow 0$ .

optical branch: 正負のイオンが異なる方向に運動。

⇒ 分極がおこりそれが光子と相互作用する (ゆえ optical と呼ばれる).

分散関係の特徴:  $\omega_k \rightarrow \omega_0 \neq 0$  as  $k \rightarrow 0$ .



以下では1 + 1次元の音響フォノンを考える。

低エネルギー (連続極限) で自由場の理論が生ずる。

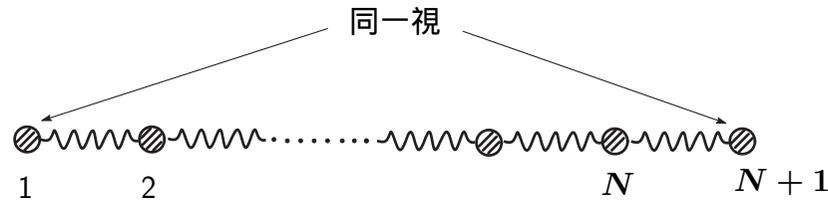
簡単な理論だが、次の意味で非常に教育的。

- ◆ 相互作用はないが、「繰り込み」の考え方と関係する「連続極限」の取り方を学ぶことができる。
- ◆ ニュートン力学を用いるにも拘わらず “relativistic” massless field が現れる。  
この現象は、格子を形成する基底状態が、並進対称性を自発的に破ることにより生ずる。

Massless phonon 場は Nambu-Goldstone 場と解釈できる。

## 2.1.2 Discrete Elastic Line

バネに繋がれた1次元の質点系: 但し周期的境界条件を課す。



Notation:

$$m = \text{質点の質量} \quad (1)$$

$$N = \text{質点の数} \quad (2)$$

$$a = \text{格子間隔} = \frac{1}{\Lambda} \quad (3)$$

$$L = \text{line の長さ} = Na \quad (4)$$

$$x_n = na = n \text{ 番目の質点の平衡位置} \quad (5)$$

$$\zeta_n(t) = n \text{ 番目の質点の line に沿った方向の変位} \quad (6)$$

便宜のため、 $N$  を偶数ととり、 $n$  は次の範囲を走るものとする:

$$-\frac{N}{2} + 1 \leq n \leq \frac{N}{2} \quad (7)$$

## Lagrangian と運動方程式 :

$\kappa =$  バネ定数       $a - b =$  各々のバネの元々の長さ  
バネを  $b$  だけ引っ張ると質点間の距離は  $a$  になる。

$\Rightarrow$  釣り合いの状態でのバネの張力  $T_0 = \kappa b$

Lagrangian、Hamiltonian、および運動方程式

$$L = \frac{1}{2}m \sum_n \dot{\zeta}_n^2 - \frac{1}{2}\kappa \sum_n (\zeta_{n+1} - \zeta_n)^2 \quad (8)$$

$$H = \frac{1}{2m} \sum_n \pi_n^2 + \frac{1}{2}\kappa \sum_n (\zeta_{n+1} - \zeta_n)^2 \quad (9)$$

$$\pi_n = m\dot{\zeta}_n \quad (10)$$

$$m \frac{d^2 \zeta_n}{dt^2} = \kappa [(\zeta_{n+1} - \zeta_n) - (\zeta_n - \zeta_{n-1})] \quad (11)$$

□ Fourier 展開 :

周期境界条件 :  $\zeta_{n+N} = \zeta_n$

$\zeta_n(t)$  を lattice Fourier series に展開:

$$\zeta_n(t) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_k \zeta_k(t) e^{ikx_n} \quad (12)$$

$$\zeta_n = \text{実} \Rightarrow \zeta_{-k} = \zeta_k^* \quad (13)$$

Periodicity  $\Rightarrow$  波数  $k$  は離散的 :

$$e^{ikNa} = 1 \quad \rightarrow \quad ka = \frac{2\pi r}{N}, \quad r \in \mathbb{Z} \quad (14)$$

さらに、 $x_n = na$  ゆえ、

$$e^{ikx_n} = e^{ikna} = e^{i(k+(2\pi/a))na}$$

$\Rightarrow k$  の値は  $2\pi/a$  の整数倍だけ自由度あり。

これより、 $k$ の値を“first Brillouin zone”に制限できる：

$$-\frac{\pi}{a} < k \leq \frac{\pi}{a} \quad (\text{first Brillouin zone}) \quad (15)$$

これは  $-\frac{N}{2} + 1 \leq r \leq \frac{N}{2}$  に対応。自由度の数は  $N$

★ First Brillouin zone の概念は、 $a$  が有限であることから生じている。

逆 Fourier 変換:

$$\zeta_k = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_n \zeta_n e^{-ikx_n} \quad (16)$$

これは次の公式を用いて容易にチェックできる

$$\sum_k e^{ika(m-n)} = N\delta_{mn} \quad (17)$$

---

演習：この公式を  $k$  および  $r$  の区間に注意して導け。

(12) を Lagrangian に代入 :

$$L = \frac{m}{2} \sum_k \dot{\zeta}_k \dot{\zeta}_{-k} - \kappa \sum_k (1 - \cos ka) \zeta_k \zeta_{-k} \quad (18)$$

□ 運動方程式と分散関係 :

運動方程式:

$$\ddot{\zeta}_k + \underbrace{\frac{2\kappa}{m}(1 - \cos ka)}_{\omega_k^2} \zeta_k = 0 \quad (19)$$

解 :

$$\zeta_k(t) = \zeta_k e^{-i\omega_k t} \quad (20)$$

$$\zeta_n(t) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_k \zeta_k e^{ikx_n - i\omega_k t} \quad (21)$$

ここで、分散関係と位相速度  $v_\phi$  は次のように与えられる：

$$\omega_k = \sqrt{\frac{2\kappa}{m}(1 - \cos ka)} = \sqrt{\frac{4\kappa}{m}} \left| \sin \frac{ka}{2} \right| \quad (22)$$

$$v_\phi \equiv \frac{\omega_k}{k} \quad (23)$$

- $k \rightarrow 0$  で分散関係は線形になる： $\omega_k \sim |k|$ 。

□ Hamiltonian:

$\zeta_k$  に対する共役運動量:

$$\pi_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{\zeta}_k} = m\dot{\zeta}_{-k} \quad (24)$$

$\pi_n$  の Fourier 展開:

$$\begin{aligned}\pi_n &= m\dot{\zeta}_n = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum m\dot{\zeta}_k e^{ikx_n} \\ &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum m\dot{\zeta}_{-k} e^{-ikx_n} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum \pi_k e^{-ikx_n}\end{aligned}$$

Exponent が逆符号になっていることに注意。

Hamiltonian:

$$H = \frac{1}{2m} \sum_k \pi_k \pi_{-k} + \frac{m}{2} \sum_k \omega_k^2 \zeta_k \zeta_{-k} \quad (25)$$

### 2.1.3 二つの極限と古典場の理論の出現

この系に対して次の二つの極限が考えられる。

◆ Continuum or low-energy limit:

長波長極限、すなわち、 $\lambda = \frac{2\pi}{k} \gg a$ 。これは、連続極限  $a \rightarrow 0$  とも解釈できる。

$L$  は固定しているから  $k$  は離散的のまま。

◆ Infinite volume limit:

系の大きさを無限大にする極限、すなわち、 $L \rightarrow \infty$ 。

$k$  の値は連続的になる。

## □ Continuum Limit:

物理的に意味のある結果を得るには、観測量を固定した、次のような極限を考える必要がある。

1.  $L = Na$  を固定して、 $a \rightarrow 0$ 、 $N \rightarrow \infty$
2. 質量密度  $\rho = m/a$  を固定して、 $m \rightarrow 0$
3. (Longitudinal) tension  $T_l = \kappa a$  を固定して、 $\kappa \rightarrow \infty$

このような操作は renormalization の最も簡単な例。  
物理的な量を固定して cut-off  $\Lambda = 1/a$  を無限大に飛ばす。

## 運動方程式の $a \rightarrow 0$ 極限:

運動方程式 (11) を  $a$  で割ると

$$\begin{aligned} \frac{m}{a} \frac{d^2 \zeta_n}{dt^2} &= \kappa a [(\zeta_{n+1} - \zeta_n)/a - (\zeta_n - \zeta_{n-1})/a] \frac{1}{a} \\ \therefore \rho \frac{d^2 \zeta_n}{dt^2} &= T_l [(\zeta_{n+1} - \zeta_n)/a - (\zeta_n - \zeta_{n-1})/a] \frac{1}{a} \end{aligned} \quad (26)$$

場の概念の導入:

$\zeta_n = \zeta(x_n, t)$  と書くと

$$\frac{\zeta_{n+1} - \zeta_n}{a} = \frac{1}{a} (\zeta(x_n + a, t) - \zeta(x_n, t)) = \zeta'(x_n, t) + \mathcal{O}(a) \quad (27)$$

さらに、

$$\frac{\zeta'(x_n, t) - \zeta'(x_{n-1}, t)}{a} = \zeta''(x_{n-1}, t) + \mathcal{O}(a) \simeq \zeta''(x_n) \quad (28)$$

$a \rightarrow 0$  に伴って、 $x_n$  は連続変数  $x$  になる。

⇒ 次の波動方程式を得る。

$$\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \quad (29)$$

$$\text{ここで } v = \sqrt{\frac{T_l}{\rho}} \quad (30)$$

これを出すラグランジュ密度

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}T_l \left\{ \left( \frac{\partial \zeta}{\partial(vt)} \right)^2 - \left( \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right)^2 \right\} \quad (31)$$

これは $v$ を“光速”と同定すれば、相対論的な形。(ニュートン力学しか用いていない。)

この現象は、分散関係が線形になる場合に必ず起こる。

後にフェルミオンに対しても同様なことが起こることを見る。

運動量変数の連続極限に関する注意：

定義より、

$$\pi_n = m\dot{\zeta}_n = \rho\dot{\zeta}_n a \quad (32)$$

ナイーブな連続極限  $a \rightarrow 0$  ではゼロになる。従って、運動量の場  $\pi(x, t)$

の定義としては

$$\pi(x, t) = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{\pi_n}{a} = \rho \dot{\zeta}(x, t) \quad (33)$$

を採用する必要がある。

分散関係の連続極限: 分散関係のレベルでの連続極限をとることもできる:

$$\begin{aligned} \omega(k) &= k \sqrt{\frac{\kappa a}{m/a} \frac{\sin ka/2}{ka/2}} \\ &\xrightarrow{a \rightarrow 0} k \sqrt{\frac{T_l}{\rho}} = kv_\phi \end{aligned} \quad (34)$$

これより、運動方程式中に現れる  $v$  が位相速度であることがわかる。

## フーリエモードの連続極限:

$x_n = na$  の1ステップの変化は  $\Delta x_n = a$ 。従って、

$$\begin{aligned}\zeta_k(t) &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_n \zeta(x_n, t) e^{-ikx_n} \\ &= \frac{1}{a} \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_n \zeta(x_n, t) e^{-ikx_n} \Delta x_n \\ &\longrightarrow \frac{1}{\sqrt{a}} \frac{1}{\sqrt{L}} \int_{-L/2}^{L/2} dx \zeta(x, t) e^{-ikx}\end{aligned}\tag{35}$$

これは  $a \rightarrow 0$  で発散。

一方、運動量のモードは

$$\begin{aligned}\pi_k(t) &= m \dot{\zeta}_{-k}(t) \rightarrow \frac{m}{\sqrt{a}} \frac{1}{\sqrt{L}} \int_{-L/2}^{L/2} dx \dot{\zeta}(x, t) e^{-ikx} \\ &= \sqrt{a} \frac{\rho}{\sqrt{L}} \int_{-L/2}^{L/2} dx \dot{\zeta}(x, t) e^{-ikx}\end{aligned}\tag{36}$$

これは逆に  $a \rightarrow 0$  でゼロになる。

正しい連続極限： Rescaling した再定義が必要

$$Q_k(t) \equiv \sqrt{a} \zeta_k(t), \quad P_k(t) \equiv \frac{1}{\sqrt{a}} \pi_k(t) \quad (37)$$

共役な変数が逆にスケールされている。  $\Rightarrow$  量子化を行う際に重要。

- 正しい rescaling であることの確認:

もともとの Fourier 変換

$$\begin{aligned} \zeta(x, t) &= \sum \frac{1}{\sqrt{N}} \zeta_k(t) e^{ikx} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum \frac{1}{\sqrt{a}} Q_k(t) e^{ikx} \\ &= \frac{1}{\sqrt{L}} \sum Q_k(t) e^{ikx} \end{aligned} \quad (38)$$

$$\pi(x, t) = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{\pi_n}{a} = \frac{1}{a} \frac{1}{\sqrt{N}} \sum \pi_k(t) e^{-ikx} = \frac{1}{\sqrt{L}} \sum P_k(t) e^{-ikx} \quad (39)$$

連続的な場合の正しい有限な Fourier 変換になっている。

ハミルトニアンを新しい変数で書き直す:

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2m} \sum \pi_k \pi_{-k} + \frac{1}{2} m \sum \omega_k^2 \zeta_k \zeta_{-k} \\ &= \frac{a}{2m} \sum P_k P_{-k} + \frac{m}{2a} \sum \omega_k^2 Q_k Q_{-k} \\ &= \frac{1}{2\rho} \sum P_k P_{-k} + \frac{\rho}{2} \sum \omega_k^2 Q_k Q_{-k} \end{aligned} \tag{40}$$

正しく有限な量で書かれている。

□ Infinite Volume ( $L \rightarrow \infty$ ) Limit:

Fourier モードの考察 :

運動量の間隔  $\Delta k = 2\pi/L \rightarrow 0$ 。(38)より

$$\begin{aligned}\zeta(x, t) &= \frac{1}{\sqrt{L}} \frac{L}{2\pi} \sum_k Q_k e^{ikx} \Delta k \\ &\longrightarrow \frac{\sqrt{L}}{2\pi} \int dk Q_k e^{ikx}\end{aligned}\quad (41)$$

これは  $L \rightarrow \infty$  で発散。Rescaling を行う必要あり。

$$\text{有限になるべき量: } q_k \equiv \sqrt{\frac{L}{2\pi}} Q_k \quad (42)$$

$$\Rightarrow \zeta(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dk q_k e^{ikx} \quad (43)$$

運動量のモード  $P_k$ : (39)より、 $Q_k$ と同型の再定義が必要

$$\text{有限になるべき量: } p_k \equiv \sqrt{\frac{L}{2\pi}} P_k \quad (44)$$

$$\Rightarrow \pi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dk p_k e^{-ikx} \quad (45)$$

注:  $a \rightarrow 0$  極限をとる際と異なる。(連続極限では、 $\zeta_k$  と  $\pi_k$  は逆にスケール。) 量子化の際にこの違いはより明らかになる。

上記の rescaling でハミルトニアンは有限に保たれる:

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2\rho} \sum P_k P_{-k} + \frac{\rho}{2} \sum \omega_k^2 Q_k Q_{-k} \\ &= \frac{1}{2\rho} \sum_k p_k p_{-k} \Delta k + \frac{\rho}{2} \sum \omega_k^2 q_k q_{-k} \Delta k \\ &= \frac{1}{2\rho} \int dk p_k p_{-k} + \frac{\rho}{2} \int dk \omega_k^2 q_k q_{-k} \end{aligned} \quad (46)$$

## まとめと考察

1. 以上、格子系から古典フォノン場の理論を導出した。
  - こうして出現した場の理論を離散化してまた格子上の系にすることは簡単。しかし、それはもとの系には戻らない。

もともとの分散関係 ( $k \geq 0$  の領域)

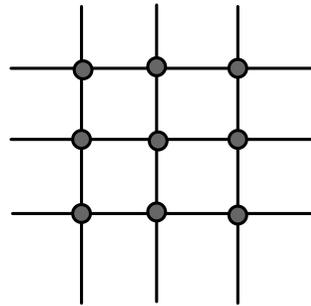
$$\omega_k = \sqrt{\frac{4\kappa}{m}} \sin \frac{ka}{2} = \sqrt{\frac{4\kappa}{m}} \left( \frac{ka}{2} - \frac{1}{3!} \left( \frac{ka}{2} \right)^3 + \dots \right) \quad (47)$$

場の理論: 低エネルギー極限をとるので、第1項のみを保持。

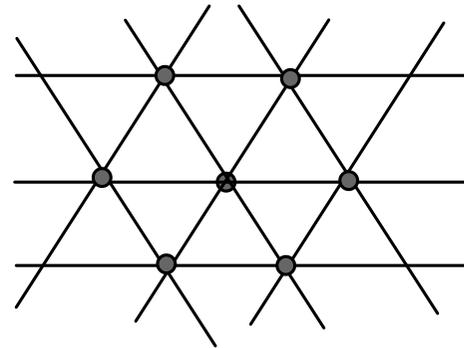
完全に元に戻すには、無限個の $k$ の高次の項を付加する必要あり。しかしそれらは低エネルギーでは寄与しないいわゆる **irrelevant terms**。

**Universality** の概念の例: 低エネルギーでの分散関係が  $\omega_k = v_\phi |k|$  の形である限り、同じ場の理論が得られる。

レポート問題 I  $x$ - $y$  平面上の格子間隔  $a$  の (a) 正方格子、及び (b) 三角格子上に質量  $m$  の質点が配置され、最隣接間の質点が互いに張力  $T$  のバネで繋がれている。これらの質点は平面に垂直な  $\pm z$  方向にわずかに ( $\ll a$ ) 変位できるとする。この二つの系を記述する Lagrangian を構成し、さらにその連続極限 ( $a \rightarrow 0$  極限) を考察して場の理論の Lagrangian を導け。またこの結果を universality の観点から論ぜよ。



(a) 正方格子



(b) 三角格子

2. フォノン場が massless であること の理解：  
もともとの格子系での対称性

(a) Discrete translation in space

$$x_n \longrightarrow x_n + ma \quad (48)$$

$a \rightarrow 0$  で連続的な並進対称性となる。

(b) Continuous translation in time

$$t \longrightarrow t + t_0 \quad (49)$$

(c) 場の空間上での global translation (縦振動を考えれば明らか)

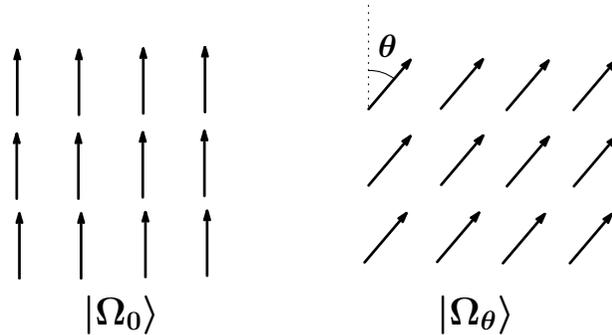
$$\zeta_n \longrightarrow \zeta_n + c \quad \text{for all } n \quad (50)$$

全ての  $n$  に対して  $\zeta_n = c_0$  である配位は、(任意の  $c_0$  に対して) エネルギー的に縮退した「真空」を表す = 真空の無限縮退  
 $c_0$  の値をひとつ定めると (例えば  $c_0 = 0$ ) この対称性が自発的に破れる。⇒ その配位のまわりの揺らぎは massless ( $\omega_k \propto |k|$ ) になる  
= Nambu-Goldstone 励起

□ 対称性の自発的破れ :

対称性の隠れた形での実現。

Global 対称性の破れの例 :  $T = 0$  (低温相) での強磁性体の回転対称性



ハミルトニアン自体は回転対称  $\Rightarrow$  真空の集合  $\{|\Omega_\theta\rangle\}$  は回転に対して不変であり、縮退している。

$$|\Omega_\theta\rangle = R|\Omega_0\rangle, \quad [H, R] = 0, \quad H|\Omega_0\rangle = E|\Omega_0\rangle$$
$$\Rightarrow H|\Omega_\theta\rangle = H(R|\Omega_0\rangle) = R(H|\Omega_0\rangle) = E(R|\Omega_0\rangle) = E|\Omega_\theta\rangle$$

実際に実現するのは、そのうちのひとつの真空  $\Rightarrow$  回転対称性の自発的破れ。

## 自発的破れの現象の特徴

- ◆ Local spin の期待値が non-zero になる  $\langle \vec{S}(\vec{x}) \rangle \neq 0$
- ◆  $T \rightarrow T_c$  (臨界温度) で  $\langle \vec{S}(\vec{x}) \rangle \rightarrow 0$ :  $\langle \vec{S}(\vec{x}) \rangle =$  **order parameter**
- ◆  $|\Omega_\theta\rangle$  のエネルギーは縮退  $\rightarrow$  長波長のスピン波を起こすのにエネルギーがほとんど要らない。  
 $\Rightarrow$  **Massless (gapless) excitation = Nambu-Goldstone モード**
  - 通常対称性の自発的破れ: NGモードはボゾン
  - フェルミ対称性の自発的破れ: NGモードはフェルミオン (例を後述)

Massless の場を生成する非常に一般的でかつ自然なメカニズム。

## 2.2 古典場の量子化

この節の目的: Phonon 場を例にとって、通常の量子力学から場の量子化の規則を導く

□ 場の量子化の規則の導出:

元の格子系の量子化:

$$[\zeta_m, \pi_n] = i\delta_{mn}, \quad \text{rest} = 0 \quad (51)$$

フーリエモードに対しては

$$\begin{aligned} [\zeta_k, \pi_{k'}] &= \frac{1}{N} \sum_{m,n} [\zeta_m, \pi_n] e^{ikx_m} e^{-ik'x_n} \\ &= \frac{i}{N} \sum_m e^{i(k-k')am} = i\delta_{kk'} \end{aligned} \quad (52)$$

生成消滅演算子の導入:

ハミルトニアンを思い出す:

$$\begin{aligned} H &= \sum_k \left( \frac{1}{2m} \pi_k \pi_{-k} + \frac{m}{2} \omega_k^2 \zeta_k \zeta_{-k} \right) \\ &= \sum_k \omega_k \left( \frac{1}{2} m \omega_k \zeta_k \zeta_{-k} + \frac{1}{2m\omega_k} \pi_k \pi_{-k} \right) \end{aligned} \quad (53)$$

括弧内を「因数分解」して次の生成消滅演算子を導入:

$$a_k \equiv \frac{1}{\sqrt{2m\omega_k}} (m\omega_k \zeta_k + i\pi_{-k}) \quad (54)$$

$$a_k^\dagger \equiv \frac{1}{\sqrt{2m\omega_k}} (m\omega_k \zeta_k^\dagger - i\pi_{-k}^\dagger) \quad (55)$$

これらは次の Heisenberg algebra を満たす

$$[a_k, a_{k'}^\dagger] = \delta_{kk'}, \quad \text{rest} = 0 \quad (56)$$

ハミルトニアンは次の良く知られた形になる:

$$H = \sum_k \omega_k \left( a_k^\dagger a_k + \frac{1}{2} \right) \quad (57)$$

$a_k, a_k^\dagger$  の定義式 (54) を逆に解くと

$$\zeta_k = \frac{1}{\sqrt{2m\omega_k}}(a_k + a_{-k}^\dagger) \quad (58)$$

$$\pi_k = -i\sqrt{\frac{m\omega_k}{2}}(a_{-k} - a_k^\dagger) \quad (59)$$

これを  $\zeta_n$  and  $\pi_n$  の表式に代入すると

$$\begin{aligned} \zeta_n &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_k \frac{1}{\sqrt{2m\omega_k}}(a_k + a_{-k}^\dagger)e^{ikx_n} \\ &= \sum_k \frac{1}{\sqrt{2mN\omega_k}}(a_k e^{ikx_n} + a_{-k}^\dagger e^{-ikx_n}) \end{aligned} \quad (60)$$

$$\pi_n = \frac{1}{i} \sqrt{\frac{m\omega_k}{2N}}(a_k e^{ikx_n} - a_{-k}^\dagger e^{-ikx_n}) \quad (61)$$

## 連続極限：

Fourier mode の rescaling

$$Q_k = \sqrt{a} \zeta_k, \quad P_k = \frac{\pi_k}{\sqrt{a}} \quad (62)$$

これは Heisenberg algebra を不変に保つ。

生成消滅演算子による表式:

$$Q_k = \frac{1}{\sqrt{2\rho\omega_k}} (a_k + a^\dagger_{-k}) \quad (63)$$

$$P_k = -i\sqrt{\frac{\rho\omega_k}{2}} (a_{-k} + a^\dagger_k) \quad (64)$$

$\zeta_n$  の連続極限:  $\Leftarrow$  (60)

$$\zeta(x, t) = \sum_k \frac{1}{\sqrt{2\rho L \omega_k}} (a_k e^{ikx} + a^\dagger_k e^{-ikx}) \quad (65)$$

$\pi_n$  の連続極限:  $\pi(x, t) = \lim_{a \rightarrow 0} \pi_n / a$

(61) より

$$\pi(x, t) = \frac{1}{i} \sqrt{\frac{\rho\omega_k}{2L}} (a_k e^{ikx} - a^\dagger_k e^{-ikx}) \quad (66)$$

$\zeta(x, t)$  と  $\pi(y, t)$  の交換関係の導出:

- フーリエ展開から求める。
- より直接的には次のように求められる。

基本関係式より、

$$[\zeta(x, t), \pi(y, t)] = \lim_{a \rightarrow 0} [\zeta_m, \pi_n/a] = \frac{i}{a} \delta_{mn} \longrightarrow \infty \text{ (UV 発散)}$$

発散の性質を見る。  $\pi(y, t)$  を積分した場合を考えると、

$$\left[ \zeta(x, t), \int dy \pi(y, t) \right] = \lim_{a \rightarrow 0} \left[ \zeta_m, \sum_n (\pi_n/a) a \right] = i \sum_n \delta_{mn} = i$$

これより、場の交換関係は、

$$[\zeta(x, t), \pi(y, t)] = i \delta(x - y), \quad \text{rest} = 0 \quad (67)$$

= 量子力学の第一原理からの場の量子化の規則の導出

---

演習: この結果をフーリエモードの交換関係から導出せよ。

時間依存性:

$a_k(t)$  および  $a_k^\dagger(t)$  の  $t$  依存性:

(57) のハミルトニアンを用いると、時間発展は、

$$\frac{da_k}{dt} = i[H, a_k] = -i\omega_k \Rightarrow a_k(t) = a_k e^{-i\omega_k t} \quad (68)$$

$$\frac{da_k^\dagger}{dt} = i[H, a_k^\dagger] = i\omega_k \Rightarrow a_k^\dagger(t) = a_k^\dagger e^{i\omega_k t} \quad (69)$$

これより、運動方程式を満たす場  $\zeta(x, t)$  は

$$\zeta(x, t) = \sum_k \frac{1}{\sqrt{2\rho L\omega_k}} \left( a_k e^{i(kx - \omega_k t)} + a_k^\dagger e^{-i(kx - \omega_k t)} \right) \quad (70)$$

と書ける。

## Infinite Volume ( $L \rightarrow \infty$ ) Limit

解析は古典論と同じ。 $\zeta(x, t)$  は次のようになる：

$$\begin{aligned}\zeta(x, t) &= \sum_k \frac{1}{\sqrt{2\rho L\omega_k}} \frac{L}{2\pi} \left( a_k e^{i(kx - \omega_k t)} + a_k^\dagger e^{-i(kx - \omega_k t)} \right) \Delta k \\ &\rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi\rho}} \int \frac{dk}{\sqrt{2\omega_k}} \left( a(k) e^{i(kx - \omega_k t)} + a^\dagger(k) e^{-i(kx - \omega_k t)} \right)\end{aligned}\tag{71}$$

ここで  $k$  の連続関数としての生成消滅演算子を次の scaling で定義：

$$a(k) \equiv \sqrt{\frac{L}{2\pi}} a_k, \quad a^\dagger(k) \equiv \sqrt{\frac{L}{2\pi}} a_k^\dagger\tag{72}$$

両方とも同じ scaling  $\Leftarrow q_k = \sqrt{L/2\pi} Q_k, p_k = \sqrt{L/2\pi} P_k$

これらの交換関係は  $\sim L$  のように発散。  $\Leftrightarrow \delta$  関数

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_k [a_k, a^\dagger_{k'}] = \sum_k [a_k, a^\dagger_{k'}] \Delta k \frac{L}{2\pi} \\ &= \int dk [a(k), a^\dagger(k')] \\ \therefore [a(k), a^\dagger(k')] &= \delta(k - k') \end{aligned} \tag{73}$$

## 2.3 粒子に対する量子場の概念：「第二量子化」

量子場が出現するもう一つの機構 = 「第二量子化」<sup>1</sup>

◆ これまで述べた場の出現の機構：

媒質 = 無限多体系  $\xrightarrow{\text{低エネルギー}}$  古典場  $\xrightarrow{\text{量子化}}$  量子場  $\xrightarrow{\text{素励起}}$  量子化された、識別できない粒子系

◆ 第二量子化で生ずる量子場: (ボゾンの場合)

識別出来ない粒子系  $\xrightarrow{\text{量子化}}$  完全対称な波動関数の作る Hilbert 空間

↑

$a_n^\dagger, a_n$  で構築される抽象的 Hilbert 空間

↓

座標表示  $a(x)^\dagger, a(x) \Rightarrow$  場  $\zeta(x), \pi(x)$

<sup>1</sup>Dirac (1927), “Principles of Quantum Mechanics” (1958)

## 特徴:

- 格子上的 “atom” のように確定した位置のまわりに局在化している粒子系には適用できない。(識別可能)
- 弱い相互作用をしている「素励起」にあたる粒子系に対して適用される。但し、「媒質」は捨象されてしまっている。
- 直接量子化された場が生ずる。

□ 同種の、識別できる  $N$  粒子系 :

$U$  = 各粒子の波動関数の作る Hilbert 空間

$\{|\phi_n\rangle\}$ :  $U$  の規格直交完全系 (CONS)。丸ケットで1粒子状態を表す。

全系の Hilbert 空間 :  $\mathcal{H}_N = \otimes U^N$

$\mathcal{H}_N$  の一般の状態

$$\sum C_{n_1, n_2, \dots, n_N} |\phi_{n_1}\rangle |\phi_{n_2}\rangle \cdots |\phi_{n_N}\rangle \quad (74)$$

□ 同種の、**識別できない**  $N$  粒子系 :

識別不可能  $\Rightarrow$  次の操作が必要

- ボゾンに対しては完全対称化
- フェルミオンに対しては完全反対称化

以下、ボゾンの場合を考察。

完全対称化された波動関数を次のように表す :

$$|\Psi_{n_1 \dots n_N}\rangle \equiv \mathcal{S}(|\phi_{n_1}\rangle |\phi_{n_2}\rangle \cdots |\phi_{n_N}\rangle) \in \mathbf{SU}^N \quad (75)$$

$\mathcal{S}$  = 対称化の演算子

□ 抽象的ヒルベルト空間への写像 :

$a_m^\dagger, a_n$ : 抽象的なヒルベルト空間  $V$  における生成消滅演算子

$$[a_m, a_n^\dagger] = \delta_{mn}, \quad \text{rest} = 0 \quad (76)$$

真空状態の定義

$$a_m |0\rangle = 0, \quad \langle 0| a_m^\dagger = 0 \quad (77)$$

Fock 空間  $V$ :  $|0\rangle$  上に 有限個の  $a^\dagger_n$  を働かせてできる状態の集合  
これは粒子数が一定値  $N$  の部分空間  $V_N$  の直和に分解できる:

$$V = \bigoplus_N V_N \quad (78)$$

$V_N$  に属する状態

$$|\psi_{n_1 \dots n_N}\rangle = a^\dagger_{n_1} a^\dagger_{n_2} \cdots a^\dagger_{n_N} |0\rangle \in V_N \quad (79)$$

これは自動的に 完全対称化されている。

$\Rightarrow$  次の線形な同型写像  $T: V_N \rightarrow SU^N$  が定義できる:

$$T(a^\dagger_{n_1} a^\dagger_{n_2} \cdots a^\dagger_{n_N} |0\rangle) = \mathcal{S}(|\phi_{n_1}\rangle |\phi_{n_2}\rangle \cdots |\phi_{n_N}\rangle) \quad (80)$$

この写像は 状態間の内積を保存する。

$\Rightarrow SU^N$  を  $V_N$  と同定すれば、ユニタリー写像と見なせる。

□ 基底の変換 :

$\{|f_\alpha\rangle\}$  = 別のCONS:

以前の基底との関係

$$|\phi_n\rangle = \sum_{\alpha} |f_\alpha\rangle (f_\alpha|\phi_n) \quad (81)$$

$a_\alpha$ 、 $a^\dagger_\alpha$  = 基底  $\{|f_\alpha\rangle\}$  に対する生成消滅演算子

以下での仮定： 「粒子数」を変えない基底の変換<sup>2</sup>のみ考え、

$$a^\dagger_n = \sum_{\alpha} a^\dagger_\alpha (f_\alpha|\phi_n) \quad (82)$$

が成り立つことを要請。

⇔ 変換は生成演算子と消滅演算子を混ぜない。

⇔ 真空状態  $|0\rangle$  はすべての基底で共通

---

<sup>2</sup>粒子数を変える変換 = Bogoliubov 変換

□ 量子場の出現 :

特に、基底として、座標の固有関数系  $\{|x\rangle\}$  をとった場合

$$a_n \rightarrow a(x), a_n^\dagger \rightarrow a^\dagger(x)$$

量子場  $a(x)$  and  $a^\dagger(x)$  が得られる。

一粒子状態に対する写像  $T$  :

$$T a^\dagger(x) |0\rangle = |x\rangle \quad (83)$$

$$\langle 0| a(x) T^{-1} = \langle x| \quad (84)$$

以前得られたフォノン場(等)との関係

運動量基底に移ると

$$a^\dagger(x) = \int dk a^\dagger(k) (k|x) = \int \frac{dk}{\sqrt{2\pi}} a^\dagger(k) e^{-ikx} \quad (85)$$

$$a(x) = \int dk a(k) (x|k) = \int \frac{dk}{\sqrt{2\pi}} a(k) e^{ikx} \quad (86)$$

これから、エルミートな場  $\zeta(x)$  とその共役場  $\pi(x)$  を定義したい。

大きな自由度あり。  $a(k), a^\dagger(k)$  の一次の場合の最も一般的な形

$$\zeta(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dk}{\sqrt{2\pi}} (f(k)a(k)e^{ikx} + f^*(k)a^\dagger(k)e^{-ikx}) \quad (87)$$

$$\pi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}i} \int \frac{dk}{\sqrt{2\pi}} (g(k)a(k)e^{ikx} - g^*(k)a^\dagger(k)e^{-ikx}) \quad (88)$$

- 交換関係  $[\zeta(x), \pi(y)] = i\delta(x - y)$  を満たす条件

$$f(k)g^*(k) + f^*(k)g(k) = 2 \quad (89)$$

## Remarks

- ◆  $f(k)$  と  $g(k)$  の選択はダイナミクス(ハミルトニアンあるいは分散関係の形)に依る。  $\Rightarrow$  後に議論
- ◆  $\zeta(x), \pi(x)$  はまだ時間  $t$  に依存していない。  $t$  依存性はハミルトニアンの構造による。(上記の場は後述する Schrödinger picture での場)

□ 演算子の対応 :

ダイナミックスの記述には Hamiltonian 等の演算子が必要。

⇒ 空間  $SU^N$  に働く演算子とフォック空間  $V^N$  に働く演算子の間の対応をつける必要あり。

### 1体演算子

●  $U$  に働く 1体演算子  $\hat{o}^{(1)}$  :

$$\hat{o}^{(1)}|\phi_n\rangle = \sum_m |\phi_m\rangle o_{mn}^{(1)} \quad (90)$$

$$\therefore o_{mn}^{(1)} = (\phi_m|\hat{o}^{(1)}|\phi_n) \quad (91)$$

● 対応するフォック空間に働く演算子:

写像  $T^{-1}$  を (90) 式に働かせると、

$$\begin{aligned} LHS &= T^{-1}\hat{o}^{(1)}|\phi_n\rangle = (T^{-1}\hat{o}^{(1)}T)T^{-1}|\phi_n\rangle \\ &= (T^{-1}\hat{o}^{(1)}T)a_n^\dagger|0\rangle \end{aligned} \quad (92)$$

$$RHS = \sum_m o_{mn}^{(1)}T^{-1}|\phi_m\rangle = \sum_m o_{mn}^{(1)}a_m^\dagger|0\rangle \quad (93)$$

比較すると、Fock空間での対応する演算子は

$$\hat{O}^{(1)} \equiv T^{-1} \hat{o}^{(1)} T = \sum_{m,n} a^\dagger_m o_{mn}^{(1)} a_n \quad (94)$$

## 2体演算子

$U \otimes U$  に働く 2体の演算子  $\hat{o}^{(2)}$

$$\hat{o}^{(2)} \mathcal{S}(|\phi_m\rangle|\phi_n\rangle) = \sum_{r,s} \mathcal{S}(|\phi_r\rangle|\phi_s\rangle) o_{rs,mn}^{(2)} \quad (95)$$

両辺に  $T^{-1}$  を作用させると

$$\begin{aligned} LHS &= (T^{-1} \hat{o}^{(2)} T) T^{-1} \mathcal{S}(|\phi_m\rangle|\phi_n\rangle) = \hat{O}^{(2)} a^\dagger_m a^\dagger_n |0\rangle \\ RHS &= T^{-1} \sum_{r,s} \mathcal{S}(|\phi_r\rangle|\phi_s\rangle) o_{rs,mn}^{(2)} = \sum_{r,s} a^\dagger_r a^\dagger_s o_{rs,mn}^{(2)} |0\rangle \end{aligned}$$

比較すると、Fock空間での2体の演算子として

$$\hat{O}^{(2)} = \sum_{r,s,m,n} \frac{1}{2} a^\dagger_r a^\dagger_s O_{rs,mn}^{(2)} a_m a_n \quad (96)$$

を得る。

□ フォック空間のハミルトニアン：

フォック空間（場の理論）のハミルトニアン  $\hat{H}$  は一般に  $n$  体演算子の和：

$$\hat{H} = \hat{H}^{(1)} + \hat{H}^{(2)} + \dots \quad (97)$$

$\hat{H}^{(1)}$  = kinetic term または hopping term

$\hat{H}^{(2)}, \hat{H}^{(3)}, \dots$  = 相互作用を記述

$\hat{H}^{(1)}$  の例:

$$\hat{H}^{(1)} = \int dk E(k) a^\dagger(k) a(k) \quad (98)$$

$$[a(k), a^\dagger(k')] = \delta(k - k') \quad (99)$$

座標表示に行くと

$$a(k) = \int \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} e^{-ikx} a(x) \quad (100)$$

$$\hat{H}^{(1)} = \int dx a^\dagger(x) E(k = -i\partial_x) a(x) \quad (101)$$

$\hat{H}^{(2)}$  の例:  $N$  体系に働く 2 体相互作用の典型的な形

$$\hat{h}^{(2)} = \sum_{1 \leq i \leq j \leq N} f(|\hat{x}_i - \hat{x}_j|) \quad (102)$$

2 粒子状態への基本的作用は、

$$f(|\hat{x} - \hat{y}|) \mathcal{S}|x\rangle|y\rangle = f(|x - y|) \mathcal{S}|x\rangle|y\rangle \quad (103)$$

フォック空間のハミルトニアン

$$\begin{aligned} \hat{H}^{(2)} &= \frac{1}{2} \int dx dy a^\dagger(x) a^\dagger(y) f(|x - y|) a(x) a(y) \\ &= \frac{1}{2} \int dx dy f(|x - y|) \rho(x) \rho(y) \end{aligned} \quad (104)$$

$$(105)$$

$\rho(x) = a^\dagger(x)a(x) =$  数密度演算子

$$[\rho(x), a(y)] = -\delta(x-y)a(y), \quad [\rho(x), a^\dagger(y)] = \delta(x-y)a^\dagger(y) \quad (106)$$

□ Schrödinger 表示と Heisenberg 表示 (Picture):

通常、量子力学は “Schrödinger 表示” で記述。

状態ベクトルは時間  $t$  に依存。演算子は  $t$ -independent

Schrödinger 方程式 :

$$i\partial_t|\psi_S(t)\rangle = H|\psi_S(t)\rangle \quad (107)$$

形式解:

$$|\psi_S(t)\rangle = e^{-iHt}|\psi_S(0)\rangle \equiv e^{-iHt}|\psi_H\rangle \quad (108)$$

時間に依存しない状態  $|\psi_H\rangle =$  “Heisenberg 表示” の状態

演算子  $\hat{O}_S$  のシュレーディンガー状態間の行列要素の書き換え:

$$\begin{aligned}\langle \psi_1(t) | \hat{O}_S | \psi_2(t) \rangle &= \langle \psi_{1,H} | e^{iHt} \hat{O}_S e^{-iHt} | \psi_{2,H} \rangle \\ &\equiv \langle \psi_{1,H} | \hat{O}_H(t) | \psi_{2,H} \rangle\end{aligned}\quad (109)$$

$$\hat{O}_H(t) \equiv e^{iHt} \hat{O}_S e^{-iHt} = \text{ハイゼンベルグ表示の演算子} \quad (110)$$

$\Rightarrow \hat{O}_H(t)$  は次の方程式を満たす:

$$\frac{d\hat{O}_H(t)}{dt} = i [H, \hat{O}_H(t)] \quad (111)$$

Hisenberg 表示の場  $\zeta(x, t)$  とその運動方程式の定義:

$$\zeta(x, t) = e^{iHt} \zeta(x) e^{-iHt} \quad (112)$$

$$\frac{d\zeta(x, t)}{dt} = i [H, \zeta(x, t)] \quad (113)$$

相互作用がある場合の  $a_m$  と  $a_m^\dagger$  の Heisenberg 表示における運動方程式：

$$\frac{da_m}{dt} = i[H, a_m] = -i \left( o_{mn}^{(1)} a_n + a_n^\dagger o_{mn,rs}^{(2)} a_r a_s + \dots \right) \quad (114)$$

$$\frac{da_m^\dagger}{dt} = i[H, a_m^\dagger] = i \left( a_n^\dagger o_{nm}^{(1)} + a_r^\dagger a_s^\dagger o_{rs,nm}^{(2)} a_n + \dots \right) \quad (115)$$

Remark:

- ◆ 相互作用を表す非線形項のために、 $t$  依存性は一般に複雑。
- ◆ 添え字  $m$  が座標  $x$  を表す場合、これらの方程式は場の方程式を与える。
- ◆ 量子力学の構造の観点から言えば、量子場は単に状態を作るための道具。

場の方程式が 非線形 でも、場を作用させて作られる状態 (波動関数) は通常の 線形 な Schrödinger 方程式に従う。

⇒ 相互作用がある場合、第二量子化で得られる量子場を波動関数を演算子に昇格させたものであると見なすのは正しくない。

□ 自由粒子の多体系に対する量子場 :

自由粒子を例にとり、非相対論的な場合と相対論的な場合量子場を構成してみる。

復習

$$\zeta(x) = \int \frac{dk}{\sqrt{2\pi}} \zeta(k) e^{ikx} \quad (116)$$

$$\zeta(k) = \frac{1}{\sqrt{2}} (f(k)a(k) + f^*(-k)a^\dagger(-k)) \quad (117)$$

$$\pi(x) = \int \frac{dk}{\sqrt{2\pi}} \pi(k) e^{-ikx} \quad (118)$$

$$\pi(k) = \frac{1}{\sqrt{2}i} (g(-k)a(-k) - g^*(k)a^\dagger(k)) \quad (119)$$

- 交換関係  $[\zeta(x), \pi(y)] = i\delta(x - y)$  を満たす条件

$$f(k)g^*(k) + f^*(k)g(k) = 2 \quad (120)$$

(120) を満たすものとして、

$$f(k) = f(-k) = \frac{1}{g(k)} = \frac{1}{g(-k)} = \text{実} \quad (121)$$

を採用。すると、

$$\zeta(k) = \frac{1}{\sqrt{2}g(k)}(a(k) + a^\dagger(-k)) \quad (122)$$

$$\pi(k) = \frac{g(k)}{\sqrt{2}i}(a(-k) - a^\dagger(k)) \quad (123)$$

$a(k), a^\dagger(k)$  について解けば

$$a(k) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( g(k)\zeta(k) + \frac{i}{g(k)}\pi(-k) \right) \quad (124)$$

$$a^\dagger(k) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( g(k)\zeta(-k) - \frac{i}{g(k)}\pi(k) \right) \quad (125)$$

自由場のハミルトニアンは

$$\begin{aligned} H &= \int dk E(k) a^\dagger(k) a(k) \\ &= \int dk \frac{E(k)}{2} \left( \frac{1}{g(k)^2} \pi(k) \pi(-k) + g(k)^2 \zeta(k) \zeta(-k) \right) \\ &\quad - \underbrace{i \int dk \frac{E(k)}{2} [\zeta(k), \pi(k)]}_{\text{ゼロ点エネルギー } E_0} \end{aligned} \quad (126)$$

運動エネルギーを正しく規格化するために

$$g(k)^2 = E(k) \quad (127)$$

ととると

$$H = \int dk \frac{1}{2} (\pi(k) \pi(-k) + E(k)^2 \zeta(k) \zeta(-k)) - E_0 \quad (128)$$

非相対論的な場合:  $E(k) = k^2/2m$

$$H = \int dx \left( \frac{1}{2} \pi^2 + \frac{1}{8m^2} (\partial^2 \zeta)^2 \right) - E_0 \quad (129)$$

相対論的な場合:  $E(k) = \sqrt{k^2 + m^2}$

$$H = \int dx \frac{1}{2} (\pi^2 + (\partial \zeta)^2 + m^2 \zeta^2) - E_0 \quad (130)$$

注: 第二量子化から出発する場合、すでにゼロ点エネルギーは引かれている。

□ フェルミオンの場合:

多体フェルミ系の場合には、完全反対称な波動関数から出発。

フォック空間表示に行くには、反交換関係を満たす生成消滅演算子を用いる必要あり:

$$\{b_m, b_n\} = \{b_m^\dagger, b_n^\dagger\} = 0 \quad (131)$$

$$\{b_m, b_n^\dagger\} = 1 \quad (132)$$

後はボゾンの場合と全く同様。

## 2.4 ボーズ凝縮と古典場

場の量子的素励起は  $\sim \hbar^2 k^2 / 2m$  のオーダーのミクロなエネルギーを持つ。

マクロな大きさのエネルギーを持つ「古典場」は、量子場からどのようにして得られるか。

量子場  $\zeta(x, t)$  が与えられたとき、古典場として観測されるのは、その何らかの状態  $|\Psi\rangle$  における期待値のはず

$$\zeta_c(x, t) \equiv \langle \Psi | \zeta(x, t) | \Psi \rangle \quad (133)$$

適切な問:

「古典場を生み出すような状態  $|\Psi\rangle$  はどのように特徴付けられるか？」

$|\Psi\rangle$  が持つべき性質 :

$\hbar \rightarrow 0$  の極限で、

1.  $\zeta_c(x, t)$  はゼロにならず、しかも古典的な場の方程式を満たす。
2.  $\langle \Psi | \zeta(x, t)^n | \Psi \rangle$  が存在して、すべての  $n$  に対して  $\zeta_c(x)^n$  に一致する。

要請2の後半部分を実現するのは容易でない。

例:  $n = 2$  の場合

$$\langle \Psi | \zeta(x, t)^2 | \Psi \rangle = \sum_{\Phi} \langle \Psi | \zeta(x, t) | \Phi \rangle \langle \Phi | \zeta(x, t) | \Psi \rangle \quad (134)$$

一般に無限個の中間状態  $\Phi$  が現れるため、

$\zeta_c(x, t)^2 = \langle \Psi | \zeta(x, t) | \Psi \rangle \langle \Psi | \zeta(x, t) | \Psi \rangle$  に一致しない。

## コヒーレント状態の概念:

次の事実に注目

1. 量子場  $\zeta(x, t)$  は、 $\zeta(x, t) = a(x, t) + a^\dagger(x, t)$  のように、生成消滅部分に分解できる。

$$[a(x, t), a^\dagger(y, t)] \sim \mathcal{O}(\hbar) \quad (135)$$

ゆえ、 $\hbar \rightarrow 0$  極限では、これらは 互いに可換な演算子 として取り扱うことができる。

2.  $|\Psi\rangle$  が、固有値  $z(x, t)$  を持つ  $a(x, t)$  の固有状態 であるとする。  
すなわち

$$a(x, t)|\Psi\rangle = z(x, t)|\Psi\rangle \quad (136)$$

すると、

$$a(x, t)^n |\Psi\rangle = z(x, t)^n |\Psi\rangle, \quad \langle \Psi | a^\dagger(x, t)^n = \langle \Psi | z^*(x, t)^n$$

従って

$$\begin{aligned}\therefore \langle \Psi | \zeta(x, t)^n | \Psi \rangle &= \langle \Psi | (a(x, t) + a^\dagger(x, t))^n | \Psi \rangle \\ &= \langle \Psi | (z(x, t) + z^*(x, t))^n | \Psi \rangle \\ &= \zeta_c(x, t)^n\end{aligned}\tag{137}$$

これは要請2に他ならない。

(136)を満たす状態 = コヒーレント状態 (coherent state)

コヒーレント状態の具体形

(1) 一種類の振動子  $(a, a^\dagger)$  の場合

$(x, p)$  のペアの場合：  $[p, x] = -i \Rightarrow p = -i\partial_x$

$$p\psi_k(x) = k\psi_k(x) \Rightarrow \psi_k(x) = ce^{ikx}\tag{138}$$

全く同様に、  $[a, a^\dagger] = \hbar \Rightarrow a = \hbar\partial/\partial a^\dagger$ 。ゆえ

$$a|z\rangle = z|z\rangle, \quad |z\rangle = c(z)e^{za^\dagger/\hbar}|0\rangle\tag{139}$$

$$\langle z|a^\dagger = \langle z|z^*, \quad \langle z| = \langle 0|e^{z^*a/\hbar}c(z)^*\tag{140}$$

$$|z\rangle = c(z)e^{za^\dagger/\hbar}|0\rangle = c(z) \left( |0\rangle + \frac{z}{\hbar}a^\dagger|0\rangle + \frac{1}{2!} \left(\frac{z}{\hbar}\right)^2 a^{\dagger 2}|0\rangle + \dots \right) \quad (141)$$

コヒーレント状態 = 非常に特別な重みで無限個の励起を含んだ状態

- この状態は、有限個の励起のみ含むフォック空間からはみ出している。
- 「ボーズ・アインシュタイン凝縮」を記述する。

規格化定数  $c(z)$  の決定:

$$\langle w|z\rangle = c(z)c(w)^* \langle 0|e^{w^*a/\hbar}e^{za^\dagger/\hbar}|0\rangle$$

$a/\hbar = \partial/\partial a^\dagger$  は  $a^\dagger$  に対する並進演算子であるから、

$$e^{w^*a/\hbar}f(a^\dagger)e^{-w^*a/\hbar} = f(a^\dagger + w^*) \quad (142)$$

従って、

$$\langle w|z\rangle = c(z)c(w)^* \langle 0|e^{z(a^\dagger + w^*)/\hbar}|0\rangle = c(z)c(w)^* e^{w^*z/\hbar} \quad (143)$$

$w = z$  と置き、 $c(z)$  を実数にとる convention を用いて規格化すると

$$\langle z|z\rangle = 1 \quad \Rightarrow \quad c(z) = e^{-|z|^2/2\hbar} \quad (144)$$

$$\langle w|z\rangle = e^{-\frac{1}{2\hbar}(|z|^2+|w|^2-2w^*z)} \quad (145)$$

(2) 無限個の自由度を含む場合 (時間依存性を省いて記す)

エルミートな場  $\zeta(x)$  を考える :

$$\zeta(x) = \sum_n (a_n \phi_n(x) + a_n^\dagger \phi_n^*(x)) \quad (146)$$

適切なコヒーレント状態および  $\zeta(x)$  の期待値 :

$$|\Psi\rangle = e^{-\frac{1}{2\hbar} \sum_n |z_n|^2} e^{\sum_n z_n a_n^\dagger / \hbar} |0\rangle \quad (147)$$

$$\langle \Psi | \zeta(x) | \Psi \rangle = \sum_n (z_n \phi_n(x) + z_n^* \phi_n^*(x)) \quad (148)$$

場の積の期待値: 短距離での発散を回避するために、引数を離す (point-splitting)

$$\begin{aligned}\langle \Psi | \zeta(x) \zeta(y) | \Psi \rangle &= \langle \Psi | (a_m \phi_m(x) + z_m^* \phi_m^*(x)) (z_n \phi_n(y) + a_n^\dagger \phi_n^*(y)) | \Psi \rangle \\ &= \langle \Psi | \zeta(x) | \Psi \rangle \langle \Psi | \zeta(y) | \Psi \rangle + \hbar \sum_n \phi_n(x) \phi_n^*(y) \\ &= \langle \Psi | \zeta(x) | \Psi \rangle \langle \Psi | \zeta(y) | \Psi \rangle + \hbar \delta(x - y)\end{aligned}\tag{149}$$

第二項は  $aa^\dagger = \hbar + a^\dagger a$  と書き換えるときに生じた項。  
( $\hbar \delta(x - y) = \hbar \langle 0 | \zeta(x) \zeta(y) | 0 \rangle$  と書ける。)

Coherent state  $|\Psi\rangle$  は、古典的状态と呼ばれるにふさわしいすべての性質を持っている。

## 2.5 フェルミ面近傍での massless フェルミ場

第二量子化された非相対論的な電子の場の素励起を考察。

フェルミ面近傍の低エネルギー励起  $\Rightarrow$  相対論的なディラック場

簡単のため空間的に1次元の系を考える (時間依存性を suppress して記す)。

$\Psi(x)$  を第二量子化された非相対論的な電子の場

同時刻反交換関係 :

$$\{\Psi(x), \Psi(y)\} = \{\Psi^\dagger(x), \Psi^\dagger(y)\} = 0 \quad (150)$$

$$\{\Psi(x), \Psi^\dagger(y)\} = \delta(x - y) \quad (151)$$

ハミルトニアン

$$H = \int dx \Psi^\dagger(x) \frac{1}{2m} \left( \frac{1}{i} \partial_x \right)^2 \Psi(x) \quad (152)$$

分散関係は非相対論的 :

$$E = \frac{k^2}{2m} \quad (153)$$

電子はフェルミ粒子:

基底状態から詰めていくと、**フェルミエネルギー  $E_F$**  まで詰まる。  
一次元では「フェルミ面」というより「フェルミ点」になっている。  
この点で

$$E = E_F, \quad k = \pm k_F \quad (\text{left and right moving}) \quad (154)$$

$$k_F = \sqrt{2mE_F} > 0 \quad (155)$$

系の低エネルギーでの振る舞い: フェルミ点近傍での運動量  $|\Delta k| \ll k_F$   
を持った励起で支配される。

そのモードに対する分散関係:

$$\begin{aligned} E &= \frac{k^2}{2m} = \frac{(k_F + \Delta k)^2}{2m} \simeq E_F + \frac{k_F}{m} \Delta k \\ &= E_F + v_F \Delta k \end{aligned} \quad (156)$$

$$\therefore \quad \Delta E = E - E_F \simeq v_F \Delta k \quad (157)$$

$v_F$  = フェルミ速度。 **分散関係は線形。**

⇒ これらの励起は massless fermion として振る舞うはず。

この領域での  $\Psi(x)$  は次のように書くことができる：

$$\Psi(x) = \underbrace{\psi_L(x)}_{slow} \underbrace{e^{-ik_F x}}_{fast} + \underbrace{\psi_R(x)}_{slow} \underbrace{e^{ik_F x}}_{fast} \quad (158)$$

$\psi_L(x)$  と  $\psi_R(x)$  の部分は小さな運動量  $\sim \Delta k (\ll k_F)$  を持ち、ゆっくりと変化。

ハミルトニアンに代入。

低エネルギー励起のみに興味があるので、次の近似をする：

- ◆  $e^{\pm 2ik_F x}$  を含む項は遙かに高いエネルギーの励起に対応するので落とす。
- ◆  $\partial_x^2 \psi$  は  $\partial_x \psi$  に比べて  $\sim \Delta k/k_F$  または  $\Delta k/m$  のオーダー小さいので落とす。

結果：

$$H = iv_F \int dx \left( \psi_L^\dagger \partial_x \psi_L - \psi_R^\dagger \partial_x \psi_R \right) + \underbrace{E_F \hat{N}}_{fermi\ energy} \quad (159)$$

$$\hat{N} = \int dx (\psi_L^\dagger \psi_L + \psi_R^\dagger \psi_R) = \text{number operator} \quad (160)$$

低エネルギー有効ハミルトニアン:

$$H_{eff} = iv_F \int dx \left( \psi_L^\dagger \partial_x \psi_L - \psi_R^\dagger \partial_x \psi_R \right) \quad (161)$$

1+1次元の massless fermion に対する相対論的ディラック作用 (with  $c = 1$ )

$$\begin{aligned} S &= \int dt dx \bar{\psi} i \gamma^\mu \partial_\mu \psi = i \int dt dx \bar{\psi} (\gamma^0 \partial_t + \gamma^1 \partial_x) \psi \\ &= i \int dt dx \psi^\dagger (\partial_t + \gamma_5 \partial_x) \psi \end{aligned} \quad (162)$$

$$\text{ここで } \psi = \begin{pmatrix} \psi_R \\ \psi_L \end{pmatrix}, \quad \bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0 \quad (163)$$

$$\gamma^0 = \sigma_1, \quad \gamma^1 = -i\sigma_2 \quad (164)$$

$$\gamma_5 \equiv \gamma^0 \gamma^1 = \sigma_3 \quad (165)$$

ハミルトニアン:

$$\pi = i\psi^\dagger \quad (166)$$

$$\begin{aligned} H_D &= \int dx \pi \dot{\psi} - L = \int dx \left\{ i\psi^\dagger \dot{\psi} - (i\psi^\dagger \dot{\psi} + i\psi^\dagger \gamma_5 \partial_x \psi) \right\} \\ &= -i \int dx \psi^\dagger \gamma_5 \partial_x \psi = i \int dx (\psi_L^\dagger \partial_x \psi_L - \psi_R^\dagger \partial_x \psi_R) \quad (167) \end{aligned}$$

$v_F = c$  と同定すれば、我々が得たハミルトニアン  $H_{eff}$  と一致。

- 非相対論的な系において低エネルギーで相対論的な場が出現するもうひとつの例。

Massless fermion が出現した理由:

- もとの系に存在するフェルミ的な並進対称性  $\Psi \rightarrow \Psi + \theta$  ( $\theta$  はグラスマンの定数) が、 $E_F \hat{N}$  が固定されることにより自発的に破れた結果生ずる Nambu-Goldstone fermion。

### 3 相対論的な古典場

様々な対称性の中でも、ローレンツ対称性はとりわけ重要。

素粒子論や宇宙論における重要性のみならず、すでに見たように、物性論においても相対論的な場が現れる場合がある。

この章の目的:

- Lorentz 群の表現を基にした相対論的な場の分類
- 相対論的な場の作用の構成

#### 3.1 ローレンツ群とその表現

相対論的な場 = ローレンツ変換に対して共変に変換する場

数学的には、ローレンツ群 (ローレンツ代数) の表現を場の空間上で構成する問題。

### 3.1.1 群とそのリー代数: $SU(2)$ と $SL(2, C)$ の例

□ 群  $SU(2)$ :

$$\begin{aligned} U \in G = SU(2) & \quad (\text{special unitary}) \\ \Leftrightarrow & \quad \begin{cases} U = \text{複素 } 2 \times 2 \text{ 行列} \\ U^\dagger U = 1 \quad \text{unitary,} \quad \det U = 1 \quad \text{special} \end{cases} \end{aligned} \quad (1)$$

そのような行列の集合は群をなす:

$$\begin{aligned} U_i \in SU(2) & \quad \Longrightarrow \quad U_1 U_2 \in SU(2) \\ U^{-1} = U^\dagger & \quad \text{逆の存在} \quad (U_1 U_2) U_3 = U_1 (U_2 U_3) \quad \text{associativity} \end{aligned} \quad (2)$$

実際、

$$\begin{aligned} (i) \quad (U_1 U_2)^\dagger (U_1 U_2) &= U_2^\dagger U_1^\dagger U_1 U_2 = 1 \\ (ii) \quad \det(U_1 U_2) &= \det U_1 \det U_2 = 1 \end{aligned}$$

## $SU(2)$ の元の具体形

$$U = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\det U = 1 \quad \Rightarrow \quad ad - bc = 1 \quad (3)$$

$$U^\dagger U = 1 \quad \Rightarrow \quad |a|^2 + |c|^2 = |b|^2 + |d|^2 = 1 \quad (4)$$

$$0 = a^*b + c^*d \quad (5)$$

容易に解ける。

実条件の数： (3) から 2 個、 (4) から 2 個、 (5) から 1 個

$\Rightarrow$  5 条件  $\Rightarrow 8 - 5 = 3$  実パラメーター

$$U = \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix}, \quad |a|^2 + |b|^2 = 1 \quad (6)$$

□  $su(2)$ :  $SU(2)$  の Lie 代数 :

単位元の無限小近傍では  $U = e^{iX}$  と書ける。すなわち、

$$U = 1 + iX + \mathcal{O}(X^2) \quad (7)$$

● Unitary 性

$$U^\dagger U \simeq (1 - iX^\dagger)(1 + iX) \simeq 1 + i(X - X^\dagger) = 1$$

$$\therefore X^\dagger = X \quad X \text{ はエルミート行列} \quad (8)$$

●  $\det U = 1$  の条件:

次の公式が有用。対角化可能な行列  $Y$  に対して

$$\det e^Y = e^{\text{Tr} Y} \quad (9)$$

証明: 両辺とも相似変換に対して不変。⇒  $Y$  が対角行列の場合を考えれば十分。その固有値を  $y_i$  とすれば、

$$\det e^Y = \prod_i e^{y_i} = e^{\sum_i y_i} = e^{\text{Tr}Y} \quad // \quad (10)$$

これを用いると

$$\begin{aligned} \det U &= \det e^{iX} = e^{i\text{Tr}X} = 1 \\ \therefore \quad \text{Tr}X &= 0 \end{aligned} \quad (11)$$

まとめると

$$e^{iX} \in SU(2) \quad \Leftrightarrow \quad X^\dagger = X, \quad \text{Tr}X = 0 \quad (12)$$

$X$  の具体形 :

$$(i) \text{ エルミート性 } X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = X^\dagger = \begin{pmatrix} a^* & c^* \\ b^* & d^* \end{pmatrix}$$

$$\therefore a = a^*, d = d^* \text{ real}, \quad c^* = b \quad (13)$$

$$(ii) \text{ traceless } \text{Tr}X = a + d = 0 \quad \Rightarrow \quad d = -a \quad (14)$$

従って、

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ b^* & -a \end{pmatrix} \quad (15)$$

## Pauli 行列による表示

$\theta_a (a = 1 \sim 3)$  = 3個の**実パラメーター**

$$X = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \theta_3 & \theta_1 - i\theta_2 \\ \theta_1 + i\theta_2 & -\theta_3 \end{pmatrix} = \sum_a \theta_a s_a \quad (16)$$

$$s_a = \frac{1}{2} \sigma_a$$
$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (17)$$

$s_a$  は traceless エルミート行列の基底をなす。

また  $s_a$  は次の代数をなす：

$$[s_a, s_b] = i\epsilon_{abc} s_c \quad (18)$$

これを  $SU(2)$  の Lie 代数と呼び  $su(2)$  と書く。

---

演習 3.1 次の公式を導き、1の無限小近傍に限らず、 $U \in SU(2)$ の任意の元が $e^{iX}$ ,  $X = \text{traceless hermitian}$  の形に書けることを示せ。

$$e^{i \sum_a \theta_a \sigma_a / 2} = \cos \frac{\theta}{2} + i \hat{\theta} \cdot \vec{\sigma} \sin \frac{\theta}{2} \quad (19)$$

$$\theta \equiv |\vec{\theta}|, \quad \hat{\theta} \equiv \frac{\vec{\theta}}{\theta} \quad (20)$$

---

□  $SL(2, C)$  とその Lie 代数 :

$$\begin{aligned} U \in G = SL(2, C) & \quad (\text{speical linear}) \\ \Leftrightarrow \begin{cases} U = \text{複素 } 2 \times 2 \text{ 行列} \\ \det U = 1 \end{cases} & \quad (21) \end{aligned}$$

$\det U = 1 \Rightarrow$  2つの実条件

$\Rightarrow 8 - 2 = 6$ つの実パラメーター  $\Leftrightarrow$  3つの複素パラメーター

## $SL(2, C)$ の Lie 代数

$$e^{iX} \in SL(2, C) \Leftrightarrow \text{Tr} X = 0 \quad (22)$$

ゆえ、

$$X = \sum_{a=1}^3 \phi_a s_a, \quad s_a = \frac{1}{2} \sigma_a \quad (23)$$

$$\phi_a = \text{複素パラメーター} \quad (24)$$

- $sl(2, C)$  の生成子は3個の行列  $s_a$ .  $su(2)$  と同じ代数を満たす。
- 群  $SL(2, C)$  と  $SU(2)$  は同じ形だが、パラメーターが異なる

$$U = e^{iX}, \quad X = c_a s_a, \quad c_a = \begin{cases} \theta_a \text{ 実 for } SU(2) \\ \phi_a \text{ 複素 for } SL(2, C) \end{cases} \quad (25)$$

- 群  $SL(2, R)$

$$U = e^X, \quad X = c_a s_a, \quad c_a = \text{実} \quad (26)$$

### 3.1.2 ローレンツ変換とその生成子

□ 座標ベクトル  $x^\mu$  に対するローレンツ変換 :

時空の計量の convention<sup>1</sup>

$$\eta_{\mu\nu} = \text{diag} (1, -1, -1, -1) \quad \text{“time-favored”} \quad (27)$$

$$\mu, \nu = 0, 1, 2, 3 \quad (28)$$

座標ベクトル  $x^\mu$  に対するローレンツ変換:

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu} \quad (29)$$

“長さの2乗”  $x^\mu x_\mu = x^\mu x^\nu \eta_{\mu\nu} = (ct)^2 - \vec{x} \cdot \vec{x}$  を不変にする :

$$x'^{\mu} x'^{\nu} \eta_{\mu\nu} = \Lambda^{\mu}_{\rho} \Lambda^{\nu}_{\sigma} x^{\rho} x^{\sigma} \eta_{\mu\nu} = x^{\rho} x^{\sigma} \eta_{\rho\sigma} \quad (30)$$

従って

$$\Lambda^{\mu}_{\rho} \Lambda^{\nu}_{\sigma} \eta_{\mu\nu} = \eta_{\rho\sigma} \quad \Leftrightarrow \quad \Lambda^T \eta \Lambda = \eta \quad (31)$$

<sup>1</sup>Time-favored convention は量子力学から拡張するのに自然。

Space-favored  $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$  は重力理論に適す。

$\Lambda = e^\xi$  と書くと、無限小変換  $\xi$  に対して

$$\Lambda = e^\xi \simeq 1 + \xi \quad (32)$$

$$x'^\mu \simeq x^\mu + \xi^\mu{}_\nu x^\nu \quad (33)$$

(32) を (31) に入れると容易に

$$\xi^T \eta + \eta \xi = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (\eta \xi)^T = -\eta \xi \quad (34)$$

$\eta \xi$  は  $4 \times 4$  の実反対称行列  $\Rightarrow$  6個の独立な自由度を持つ。

□ 無限小変換の生成子 :

$\eta \xi$  は6個の独立な反対称行列  $L_{\rho\sigma}$  の1次結合で書ける。

これを次のような純虚数のエルミート行列にとる :

$$(L_{\rho\sigma})_{\mu\nu} = i(\eta_{\rho\mu}\eta_{\sigma\nu} - \eta_{\sigma\mu}\eta_{\rho\nu}) \quad (35)$$

あきらかに、 $L_{\rho\sigma}^T = -L_{\rho\sigma}$  が成り立つ。 $\eta \xi$  を反対称なパラメータ  $\alpha^{\rho\sigma}$

を用いて  $\eta\xi = \alpha^{\rho\sigma} L_{\rho\sigma}$  と展開すると、

$$\begin{aligned} (\eta\xi)_{\mu\nu} &= \eta_{\mu\rho}\xi^\rho{}_\nu = \xi_{\mu\nu} = \alpha^{\rho\sigma} (L_{\rho\sigma})_{\mu\nu} \\ &= i\alpha^{\rho\sigma} (\eta_{\rho\mu}\eta_{\sigma\nu} - \eta_{\sigma\mu}\eta_{\rho\nu}) = 2i\alpha_{\mu\nu} \\ \therefore \alpha_{\mu\nu} &= -\frac{i}{2}\xi_{\mu\nu} \end{aligned} \quad (36)$$

従って、添え字を元の位置  $\xi^\mu{}_\nu$  に戻したものは、次のように展開できる：

$$\xi^\mu{}_\nu = -\frac{i}{2}\xi^{\rho\sigma} (L_{\rho\sigma})^\mu{}_\nu \quad (37)$$

$$(L_{\rho\sigma})^\mu{}_\nu = i(\delta_\rho^\mu\eta_{\sigma\nu} - \delta_\sigma^\mu\eta_{\rho\nu}) \quad (38)$$

$L_{\rho\sigma}$  = Lorentz 変換の生成子

□ 基本交換関係 :

上記の生成子は交換関係のもとで次の基本的代数を形成する :

$$[L_{\mu\nu}, L_{\rho\sigma}] = \frac{1}{i} (\eta_{\mu\rho} L_{\nu\sigma} - \eta_{\nu\rho} L_{\mu\sigma} + \eta_{\nu\sigma} L_{\mu\rho} - \eta_{\mu\sigma} L_{\nu\rho}) \quad (39)$$

---

演習 3.2 (39)の定義を用いてこの代数を導け。

---

□  $L_{\mu\nu}$  の分解 : 回転とブースト :

$L_{\mu\nu}$  は回転とブーストに分解できる ( $i = 1, 2, 3$ ):

$$\text{3 rotations} \quad I_i \equiv \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} L^{jk} \quad (40)$$

$$\text{3 boosts} \quad K_i \equiv L_{i0} \quad (41)$$

演習 3.3  $I_3 = L_{12}$  が  $z$  軸まわりの回転を生成することを次の計算をすることにより確かめよ。

$$\delta_{I_3} x^i = -i\theta (L_{12})^i_j x^j \quad (42)$$

---

演習 3.4 同様に、 $K_1 = L_{10}$  が 1-方向のブーストを生成することを示せ。 ( $x^0 \pm x^1$  がどのように変換されるかを見よ。)

---

演習 3.5 これらの生成子が次の代数を満たすことを示せ。

$$[I_i, I_j] = i\epsilon_{ijk} I_k \quad (43)$$

$$[I_i, K_j] = i\epsilon_{ijk} K_k \quad (K_i \text{ は空間3次元ベクトルを形成}) \quad (44)$$

$$[K_i, K_j] = -i\epsilon_{ijk} I_k \quad (45)$$

---

### 3.1.3 ローレンツ群の直積分解

Lorentz 群  $SO(1, 3)$  の性質を詳しく調べるため、これが二つの群の直積の構造を持つことを示す。

生成子  $J_i^{(\pm)}$  を次のように定義<sup>2</sup>：

$$J_i^{(\pm)} \equiv \frac{1}{2} (I_i \mp iK_i) \quad (46)$$

$I_i$  と  $K_i$  はどちらも純虚数:  $\Rightarrow J_k^{(\pm)}$  は次の関係を満たす：

$$J_k^{(-)} = -J_k^{(+)*} \quad (47)$$

(43) ~ (45)  $\Rightarrow J_k^{(\pm)}$  は二つの独立な代数をなすことがチェックされる

$$\left[ J_i^{(\pm)}, J_j^{(\pm)} \right] = i\epsilon_{ijk} J_k^{(\pm)} \quad (48)$$

$$\left[ J_i^{(+)}, J_j^{(-)} \right] = 0 \quad (49)$$

---

<sup>2</sup>符号は九後氏の教科書に合うように定めてある。

各代数は  $SU(2)$  代数と同型。

どのような群 を生成するかが重要。

もともとのローレンツ変換を  $J_k^{(\pm)}$  で表す:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2}\xi^{\rho\sigma}L_{\rho\sigma} &= \xi^{i0}L_{i0} + \frac{1}{2}\xi^{ij}L_{ij} = \xi^{i0}K_i + \frac{1}{2}\xi^{ij}\epsilon_{ijk}I_k \\
 &= \left(\frac{1}{2}\xi^{ij}\epsilon_{ijk} + i\xi^{k0}\right)J^{(+)}_k + \left(\frac{1}{2}\xi^{ij}\epsilon_{ijk} - i\xi^{k0}\right)J^{(-)}_k \\
 &\equiv \theta_k J^{(+)}_k + \theta_k^* J^{(-)}_k
 \end{aligned} \tag{50}$$

ここで

$$\theta_k \equiv \frac{1}{2}\xi^{ij}\epsilon_{ijk} + i\xi^{k0} = 3 \text{ complex parameters} \tag{51}$$

さらに、 $J^{(-)}_k = -J^{(+)*}_k$  を思い出すと、ローレンツ変換行列の指数は次の構造を持つことがわかる:

$$\begin{aligned}
 -\frac{i}{2}\xi^{\rho\sigma}L_{\rho\sigma} &= -i\theta_k J^{(+)}_k - i\theta_k^* J^{(-)}_k \\
 &= (-i\theta_k J^{(+)}_k) + (-i\theta_k J^{(+)}_k)^*
 \end{aligned} \tag{52}$$

これより、3 + 1次元のローレンツ群は次の直積構造を持つ：

$$SO(1, 3) = SL(2, C) \otimes SL(2, C)^*$$

(正しく6個の実パラメーターを持っている。)

Lorentz群の構造と表現の問題は  $SL(2, C)$  の構造と表現の問題に帰着

### 3.1.4 $SL(2, C)$ の基本的な表現

□ 群  $G$  の行列表現：

群の演算の規則が  $n \times n$  行列で実現：

$$\rho : U \in G \longrightarrow \rho(U) = n \times n \text{ 行列} \quad (53)$$

$$\rho(U_1 U_2) = \rho(U_1) \rho(U_2) \quad \text{準同型写像} \quad (54)$$

□ 最も基本的な表現 = 定義 (defining) 表現 :

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad \det M = ad - bc = 1 \quad (55)$$

$$u'_\alpha = M_\alpha^\beta u_\beta \quad SL(2, C) \text{ spinor} \quad (56)$$

基本的な不変量:

$$u_\alpha \epsilon^{\alpha\beta} v_\beta = SL(2, C) \text{ 不変}, \quad \epsilon^{12} \equiv 1 \quad (57)$$

証明: 変換後

$$u'_\alpha \epsilon^{\alpha\beta} v'_\beta = \epsilon^{\alpha\beta} M_\alpha^{\alpha'} M_\beta^{\beta'} u_{\alpha'} v_{\beta'} \quad (58)$$

示すべきこと

$$\epsilon^{\alpha\beta} M_\alpha^{\alpha'} M_\beta^{\beta'} = \epsilon^{\alpha'\beta'} \Leftrightarrow \epsilon^{\alpha\beta} \text{ は不変なテンソル} \quad (59)$$

左辺は明らかに反対称、ゆえ  $c\epsilon^{\alpha'\beta'}$  と書ける。  $c = 1$  を示したい。これには  $\alpha' = 1, \beta' = 2$  と置く。すると

$$\epsilon^{\alpha\beta} M_\alpha^1 M_\beta^2 = \det M = 1 = c\epsilon^{12} = c \quad (60)$$

(59) を行列形で書くと

$$M^T \epsilon M = \epsilon \Leftrightarrow \epsilon M \epsilon^T = M^{T^{-1}} \quad (61)$$

- 群の行列表現には必ず次の二つの自然な表現が付随する。

□ 反傾 (contragredient) 表現  $M^{T^{-1}}$  :

$$\begin{aligned} M_1 M_2 = M_3 &\Rightarrow M_2^T M_1^T = M_3^T \\ \therefore M_1^{T^{-1}} M_2^{T^{-1}} = M_3^{T^{-1}} &\text{ 表現をなす} \end{aligned} \quad (62)$$

反傾表現の基底

定義表現の式  $u' = Mu$  に左から  $\epsilon$  を働かせて (61) を用いると

$$u' = Mu \Rightarrow (\epsilon u') = (\epsilon M \epsilon^T)(\epsilon u) = M^{T^{-1}}(\epsilon u) \quad (63)$$

従って、反傾表現の基底は  $\epsilon u$ 。

これを上付きスピナー  $u^\alpha$  と定義：

$$u^\alpha \equiv \epsilon^{\alpha\beta} u_\beta \quad (64)$$

逆に解く

$$\epsilon_{\gamma\alpha} u^\alpha = \underbrace{\epsilon_{\gamma\alpha} \epsilon^{\alpha\beta}}_{-\delta_\gamma^\beta} u_\beta = -u_\gamma$$

$$\therefore u_\alpha = -\epsilon_{\alpha\beta} u^\beta = u^\beta \epsilon_{\beta\alpha} \quad (65)$$

上付きスピナーを用いた基本不変量の表式：

$$u_\alpha \epsilon^{\alpha\beta} v_\beta = u_\alpha v^\alpha = -u^\beta v_\beta \quad (66)$$

- スピナー添え字を上下で縮約すると不変量が作れる

□ 複素共役表現:  $M^*$ :

$$M_1 M_2 = M_3 \quad \Rightarrow \quad M_1^* M_2^* = M_3^* \quad \text{表現をなす} \quad (67)$$

複素共役スピナーの添え字は点を付けて表す。

⇒ 点付きスピナー (dotted spinor) と呼ばれる。

$$u_{\dot{\alpha}} \equiv (u_\alpha)^* \quad (68)$$

$$u'_{\dot{\alpha}} = M_{\dot{\alpha}}^{*\beta} u_\beta \quad (69)$$

### 3.1.5 $J_k^{(\pm)}$ のテンソル積分解と変換行列 $T$

Lorentz 群の直積分解  $SO(1, 3) = SL(2, C) \otimes SL(2, C)^*$  を生成子の形の上で直接実現したい。

$J_k^{(\pm)}$  の具体的な形：

例えば、

$$J^{(+)}_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad J^{(+)}_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad etc.$$

綺麗なテンソル積の形になっていない。

テンソル積: ベクトルのテンソル積

$$(\vec{x} \otimes \vec{y})_{im} \equiv x_i y_m$$

行列  $A$  および  $B$  のテンソル積

$$\begin{aligned} (A \otimes B)(\vec{x} \otimes \vec{y}) &\equiv (A\vec{x}) \otimes (B\vec{y}) \\ \Rightarrow (A \otimes B)_{im;jn} &= A_{ij} B_{mn} \end{aligned} \quad (70)$$

$$(A \otimes B)(C \otimes D) = (AC) \otimes (BD) \quad (71)$$

演習 3.6 以下を確かめよ。

$$\frac{\sigma_k}{2} \otimes 1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (\sigma_k)_{11} 1 & (\sigma_k)_{12} 1 \\ (\sigma_k)_{21} 1 & (\sigma_k)_{22} 1 \end{pmatrix}, \quad 1 \otimes \frac{\sigma_k}{2} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sigma_k & 0 \\ 0 & \sigma_k \end{pmatrix}$$

すなわち、 $A \otimes B$  は  $A$  の各成分に行列  $B$  を付与したものの。

$J_k^{(+)}$  と  $J_k^{(-)}$  を直積の形にする相似変換  $T$  を探したい。

$$T J_i^{(+)} T^{-1} = \mathcal{J}_i^{(+)} \equiv \frac{\Sigma_i^{(+)}}{2} \otimes 1 \quad (72)$$

$$T J_i^{(-)} T^{-1} = \mathcal{J}_i^{(-)} \equiv 1 \otimes \frac{\Sigma_i^{(-)}}{2} \quad (73)$$

$\frac{1}{2}\Sigma_i^{(\pm)}$  は  $SL(2, C)$  および  $SL(2, C)^*$  空間に働く  $2 \times 2$  行列  $J_i^{\pm}$  と同型の交換関係を満たす。

## T の構造

$$\begin{aligned}
 T : \quad SO(1, 3) &\Rightarrow SL(2, C) \otimes SL(2, C)^* \\
 x^\mu &\Rightarrow u_\alpha \otimes u_{\dot{\alpha}}
 \end{aligned} \tag{74}$$

$$T : x^\mu \longrightarrow u_\alpha u_{\dot{\alpha}}$$

T の添え字の構造は  $T_{\alpha\dot{\alpha},\mu}$

それを4個の  $2 \times 2$  行列  $T_\mu$  と見なすと便利:

$$T_{\alpha\dot{\alpha},\mu} \equiv (T_\mu)_{\alpha\dot{\alpha}} \tag{75}$$

### T を決定する方程式

$$[(72), (73)] \times T \Leftrightarrow 2TJ_i^{(\pm)} = 2\mathcal{J}_i^{(\pm)}T \tag{76}$$

(+) セクターの具体形

$$\begin{aligned}
 2(T_\mu)_{\alpha\dot{\alpha}}(J_i^{(+)})^\mu{}_\nu &= 2(\mathcal{J}_i^{(+)})_{\alpha\dot{\alpha}}{}^{\beta\dot{\beta}}(T_\nu)_{\beta\dot{\beta}} = \Sigma_i^{(+)}{}_\alpha{}^\beta \delta_{\dot{\alpha}}{}^{\dot{\beta}}(T_\nu)_{\beta\dot{\beta}} \\
 &= \Sigma_i^{(+)}{}_\alpha{}^\beta (T_\nu)_{\beta\dot{\alpha}} = (\Sigma_i^{(+)}T_\nu)_{\alpha\dot{\alpha}}
 \end{aligned} \tag{77}$$

(一) セクターも同様。合わせて、2 × 2の行列方程式として

$$2T_\mu J_i^{(+)\mu}{}_\nu = \Sigma_i^{(+)} T_\nu \quad (78)$$

$$2T_\mu J_i^{(-)\mu}{}_\nu = T_\nu \Sigma_i^{(-)T} \quad (79)$$

$J_i^{(\pm)}$  の定義 (46) より

$$2J_i^{(\pm)\mu}{}_\nu = i\epsilon_{ijk}\eta^{\mu j}\delta_\nu^k \pm (\delta_i^\mu\eta_{\nu 0} - \delta_0^\mu\eta_{\nu i}) \quad (80)$$

これより、方程式 (78) および (79) は

$$i\epsilon_{ijk}T^j\delta_\nu^k + T_i\eta_{\nu 0} - T_0\eta_{\nu i} = \Sigma_i^{(+)} T_\nu \quad (81)$$

$$i\epsilon_{ijk}T^j\delta_\nu^k - T_i\eta_{\nu 0} + T_0\eta_{\nu i} = T_\nu \Sigma_i^{(-)T} \quad (82)$$

これらの方程式を解くのは難しくない。

具体的に、 $\nu$ の値を入れてやると

$$\begin{array}{ll}
 (+) \text{ case: } \nu = 0 & T_i = \Sigma_i^{(+)} T_0 \\
 \nu = i & T_0 = \Sigma_i^{(+)} T_i \\
 \nu = k \neq i & i \in_{ijk} T_j = \Sigma_i^{(+)} T_k \\
 (-) \text{ case: } \nu = 0 & -T_i = T_0 \Sigma_i^{(-)T} \\
 \nu = i & -T_0 = T_i \Sigma_i^{(-)T} \\
 \nu = k \neq i & i \in_{ijk} T_j = T_k \Sigma_i^{(-)T}
 \end{array}$$

解: 自然な選択として  $\Sigma_i^{(+)} = \sigma_i$  ととる。

$\Rightarrow$  (+) 方程式の解

$$T_0 = 1, \quad T_i = \sigma_i \tag{83}$$

$\Rightarrow$  (-) の方程式より  $\Sigma_i^{(-)}$  が決まる :

$$\Sigma_i^{(-)} = -\sigma_i^T = -\sigma_i^* \tag{84}$$

以後、慣習として  $T_\mu$  を  $\sigma_\mu$  と書く。

$$(\sigma_\mu)_{\alpha\dot{\alpha}} = T_{\alpha\dot{\alpha},\mu} = (1, \vec{\sigma}) \quad (85)$$

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -i & 0 \\ 0 & 1 & i & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad T^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & i & -i & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} T^\dagger \quad (86)$$

- $T$  の列は  $1, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  の成分をベクトルとして並べたもの
- これらのベクトルは直交しており (複素) ノルムは  $2 \Leftrightarrow T^{-1}T = \delta_\nu^\mu$ .
- $T^{-1}$  の行は、 $1, \sigma_1^*, \sigma_2^*, \sigma_3^*$  をベクトルとして並べたもの

□  $T^{-1}$  の組み替え  $\Rightarrow \bar{\sigma}^\mu$  の定義:

$T$  の添え字の構造:  $T_{\alpha\dot{\beta},\mu}$  (ペア  $(\alpha\dot{\beta})$  で「行」添え字を表す)

逆行列  $T^{-1}$  の添え字の構造:  $(T^{-1})^{\mu,\alpha\dot{\beta}}$

## 2 × 2 行列としての解釈:

$$T_{\alpha\dot{\alpha},\mu} \equiv (\sigma_{\mu})_{\alpha\dot{\alpha}} \quad (87)$$

$$(T^{-1})^{\mu,\alpha\dot{\beta}} \equiv \frac{1}{2}(\bar{\sigma}^{\mu})^{\dot{\beta}\alpha} \quad (88)$$

$\alpha\dot{\beta}$  をペアでひとつの添え字と見なすのではなく、それぞれを行および列の添え字と見なすには、 $\alpha\dot{\beta}$  の添え字の順番を入れ替えるのが自然。

例

$$(T^{-1})^{\mu,\alpha\dot{\beta}} T_{\alpha\dot{\beta},\mu} = \frac{1}{2}(\bar{\sigma}^{\mu})^{\dot{\beta}\alpha} (\sigma_{\mu})_{\alpha\dot{\beta}} \quad (89)$$

$\bar{\sigma}^{\mu}$  の具体形

$$(\bar{\sigma}^{\mu})^{\dot{\alpha}\beta} = (1, \vec{\sigma})^{\dot{\alpha}\beta} \quad (90)$$

$$(\bar{\sigma}_{\mu})^{\dot{\alpha}\beta} = (1, -\vec{\sigma})^{\dot{\alpha}\beta} \quad (91)$$

□  $\sigma_\mu$  と  $\bar{\sigma}^\mu$  の性質:

(i)  $TT^{-1} = 1$  より

$$(\sigma_\mu)_{\alpha\dot{\beta}}(\bar{\sigma}^\mu)^{\dot{\gamma}\delta} = 2\delta_\alpha^\delta\delta_{\dot{\beta}}^{\dot{\gamma}} \quad (92)$$

(ii)  $T^{-1}T = 1$  より

$$\frac{1}{2}\text{Tr}(\bar{\sigma}^\mu\sigma_\nu) = \delta_\nu^\mu \quad (93)$$

(iii) 基本的な bilinear 恒等式:

$$\sigma_\mu\bar{\sigma}_\nu + \sigma_\nu\bar{\sigma}_\mu = 2\eta_{\mu\nu} \quad (94)$$

$$\bar{\sigma}_\mu\sigma_\nu + \bar{\sigma}_\nu\sigma_\mu = 2\eta_{\mu\nu} \quad (95)$$

これらは次の表示より簡単に示される:

$$\sigma_\mu = \eta_{0\mu} - \eta_{\mu i}\sigma_i, \quad \bar{\sigma}_\nu = \eta_{0\nu} + \eta_{\nu j}\sigma_j \quad (96)$$

(iv)  $\sigma_\mu$  と  $\bar{\sigma}_\mu$  の関係

Pauli 行列の基本関係式

$$\epsilon \sigma_i \epsilon^T = -\sigma_i^*, \quad \sigma_i^T = \sigma_i^* \quad (97)$$

これより、

$$\epsilon \sigma_\mu^T \epsilon^T = \epsilon (1, \vec{\sigma}^T) \epsilon^T = (1, -\vec{\sigma}) = \bar{\sigma}_\mu \quad (98)$$

### 3.1.6 $SO(1, 3)$ と $SL(2, C) \otimes SL(2, C)^*$ の具体的な関係

$x^\mu$  のローレンツ変換

$$x' = \Lambda x = e^{-i\theta_k J^{(+)}_k} e^{-i\theta_k^* J^{(-)}_k} x \quad (99)$$

$SL(2, C) \otimes SL(2, C)^*$  の形に直すために左から  $T$  を作用 :

$$\begin{aligned}
 Tx' &= Te^{-i\theta_k J^{(+)}_k} T^{-1} Te^{-i\theta_k^* J^{(-)}_k} T^{-1} Tx \\
 &= e^{-i\theta_k \mathcal{J}_k^{(+)}} e^{-i\theta_k^* \mathcal{J}_k^{(-)}} Tx \\
 &= (M \otimes M^*) Tx
 \end{aligned} \tag{100}$$

$$M \equiv e^{-i\theta_k \sigma_k / 2} \in SL(2, C) \tag{101}$$

$$M^* = e^{i\theta_k^* \sigma_k^* / 2} \in SL(2, C)^* \tag{102}$$

$\sigma_\nu$  行列を用いると、(100) は次のように書ける :

$$\begin{aligned}
 \text{左辺} &= (Tx')_{\alpha\dot{\alpha}} = (\sigma_\mu)_{\alpha\dot{\alpha}} x'^\mu \\
 \text{右辺} &= M_\alpha^\beta M_{\dot{\alpha}}^{\dot{\beta}} (\sigma_\nu)_{\beta\dot{\beta}} x^\nu = (M \sigma_\nu M^\dagger)_{\alpha\dot{\alpha}} x^\nu
 \end{aligned} \tag{103}$$

- $SO(1, 3)$  と  $SL(2, C) \otimes SL(2, C)^*$  の関係のまとめ

$$\sigma_\mu x'^\mu = M \sigma_\nu x^\nu M^\dagger \quad (104)$$

$$\sigma_\mu \Lambda^\mu_\nu = M \sigma_\nu M^\dagger \quad (105)$$

$$\Lambda = e^{-i\theta_k J^{(+)}_k} e^{-i\theta_k^* J^{(-)}_k} \quad (106)$$

$$M = e^{-i\theta_k \sigma_k / 2} \in SL(2, C) \quad (107)$$

### 3.1.7 $SL(2, C)$ の行列表現

$SL(2, C)$  の代数は  $SU(2)$  の代数と同型

$\Rightarrow SL(2, C)$  の表現論  $\simeq$  (スピン) 角運動量の理論

$u_\alpha = SL(2, C)$  の基本表現の基底 = スピン  $1/2$  のスピナー  
全ての表現の building block

$SL(2, C)$  変換

$$u'_\alpha = M_\alpha^\beta u_\beta, \quad M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad ad - bc = 1 \quad (108)$$

$$u'_1 = au_1 + bu_2$$

$$u'_2 = cu_1 + du_2$$

生成子  $\mathcal{J}_3 = \frac{1}{2}\sigma_3$  に対応する無限小変換に対して

$$\begin{pmatrix} u'_1 \\ u'_2 \end{pmatrix} = (1 + \theta \mathcal{J}_3) \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

$$\therefore u'_1 = \left(1 + \frac{1}{2}\theta\right) u_1, \quad j_3 = \frac{1}{2} \quad (109)$$

$$u'_2 = \left(1 - \frac{1}{2}\theta\right) u_2, \quad j_3 = -\frac{1}{2} \quad (110)$$

## $n + 1$ 次元表現

$u_1$  と  $u_2$  を用いて作られる次数  $n$  の  $n + 1$  個の斉次式の集合を考える :

$$\zeta_k \equiv u_1^{n-k} u_2^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n = \text{integer} \quad (111)$$

$SL(2, C)$  変換に対して

$$\begin{aligned} \zeta'_k &= u_1'^{n-k} u_2'^k = (Mu)_1^{n-k} (Mu)_2^k \\ &= (au_1 + bu_2)^{n-k} (cu_1 + du_2)^k \\ &\equiv \mathcal{D}_{kl}(M) \zeta_l \end{aligned} \quad (112)$$

$n + 1$  個の  $\zeta_k$  は  $(n + 1)$  次元の行列  $\mathcal{D}(M)$  によって変換される。

---

演習 3.7  $\mathcal{D}(M'M) = \mathcal{D}(M')\mathcal{D}(M)$  が成り立つ、すなわち、 $\mathcal{D}(M)$  は  $SL(2, C)$  の  $n + 1$  次元表現を与えることを示せ。

解:

$$\begin{aligned} & \mathcal{D}(M')_{kl} \mathcal{D}(M)_{lm} \zeta_m \\ &= \mathcal{D}(M')_{kl} (au_1 + bu_2)^{n-l} (cu_1 + du_2)^l \\ &= (a'(au_1 + bu_2) + b'(cu_1 + du_2))^{n-k} (c'(au_1 + bu_2) + d'(cu_1 + du_2))^k \\ &= ((a'a + b'c)u_1 + (a'b + b'd)u_2)^{n-k} + ((c'a + d'c)u_1 + (c'b + d'd)u_2)^k \\ &= ((M'M)_{11}u_1 + (M'M)_{12}u_2)^{n-k} + ((M'M)_{21}u_1 + (M'M)_{22}u_2)^k \\ &= \mathcal{D}(M'M)_{kl} \zeta_l \end{aligned} \tag{113}$$

---

表現のスピン: 最も高いスピンを持つ状態は  $\zeta_0 = u_1^n$ 。  $1 + \theta \mathcal{J}_3$  変換に対して

$$\zeta'_0 = (u'_1)^n = \left(1 + \frac{1}{2}\theta\right)^n u_1^n \simeq \left(1 + \frac{n}{2}\theta\right) \zeta_0 \tag{114}$$

従ってスピン  $j = n/2$ 。表現の次元  $n + 1 = 2j + 1$ 。

以下この  $(2j + 1)$  次元表現を  $\mathcal{D}^j(M)$  と記す。

□ 例 :

- $\mathcal{D}^0(M) = 1$ . 自明な 1 次元表現
- $\mathcal{D}^{1/2}(M) = M$ . 基本表現そのもの

Clebsh-Gordan 分解:

角運動量の場合と同様に、次の CG 分解が成り立つ:

$$\mathcal{D}^{j_1} \otimes \mathcal{D}^{j_2} = \mathcal{D}^{j_1+j_2} \oplus \mathcal{D}^{j_1+j_2-1} \oplus \dots \oplus \mathcal{D}^{|j_1-j_2|} \quad (115)$$

以下で頻繁に用いる基本的な分解

$$\mathcal{D}^{1/2} \otimes \mathcal{D}^{1/2} = \mathcal{D}^1 \oplus \mathcal{D}^0 \quad (116)$$

### 3.1.8 $SL(2, C) \times SL(2, C)^*$ の表現

全く同様に、 $SL(2, C) \times SL(2, C)^*$  の有限次元表現を作ることができる。  
基本的な基底ベクトルと表現行列：

$$\zeta_{kk'} = (u_1^{2j-k} u_2^k)(u_1^{2j'-k'} u_2^{k'}) \quad (117)$$

$$0 \leq k \leq 2j, \quad 0 \leq k' \leq 2j' \quad (118)$$

$$\zeta'_{kk'} = \mathcal{D}^{jj'}(M, M^*)_{kk'; ll'} \zeta_{ll'} \quad (119)$$

$(2j + 1)(2j' + 1)$  次元の(既約)表現を与える。

□ 例：

- $\mathcal{D}^{00}(M, M^*) = 1$
- $\mathcal{D}^{\frac{1}{2}0}(M, M^*) = M$
- $\mathcal{D}^{0\frac{1}{2}}(M, M^*) = M^*$
- $\mathcal{D}^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(M, M^*) = M \otimes M^*$       Lorentz ベクトルの変換 (cf (100))

### 3.1.9 ローレンツベクトルのスピナー表示

□ 基本関係式 :

$(\sigma_\mu)_{\alpha\dot{\beta}}$  の本質:

$SO(3, 1)$  ベクトル  $\iff SL(2, C) \times SL(2, C)^*$  の  $\mathcal{D}^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$  表現

$$V_{\alpha\dot{\beta}} \equiv (\sigma_\mu)_{\alpha\dot{\beta}} V^\mu \quad (120)$$

逆の関係: これを  $(\bar{\sigma}^\mu)^{\dot{\beta}\alpha}$  と縮約 :

$$V_{\alpha\dot{\beta}} (\bar{\sigma}^\mu)^{\dot{\beta}\alpha} = (\sigma_\nu)_{\alpha\dot{\beta}} (\bar{\sigma}^\mu)^{\dot{\beta}\alpha} V^\nu = \text{Tr}(\sigma_\nu \bar{\sigma}^\mu) V^\nu = 2V^\mu$$

↓

$$V^\mu = \frac{1}{2} \text{Tr}(V \bar{\sigma}^\mu) \quad (121)$$

□ スカラー積  $V^\mu U_\mu$  のスピナー表現 :

下付 bispinor から上付き bispinor を定義:

$$\begin{aligned} U^{\alpha\dot{\beta}} &= \epsilon^{\alpha\gamma} \epsilon^{\dot{\beta}\dot{\delta}} U_{\gamma\dot{\delta}} = \epsilon^{\alpha\gamma} \epsilon^{\dot{\beta}\dot{\delta}} (\sigma_\mu)_{\gamma\dot{\delta}} U^\mu \\ &= (\epsilon \sigma_\mu \epsilon^T)^{\alpha\dot{\beta}} U^\mu = (\epsilon \sigma_\mu^T \epsilon^T)^{\dot{\beta}\alpha} U^\mu \\ &= (\bar{\sigma}_\mu)^{\dot{\beta}\alpha} U^\mu \end{aligned} \quad (122)$$

これと  $V_{\alpha\dot{\beta}}$  を縮約  $\Rightarrow$  不変量

$$\begin{aligned} V_{\alpha\dot{\beta}} U^{\alpha\dot{\beta}} &= (\sigma_\mu)_{\alpha\dot{\beta}} (\bar{\sigma}^\nu)^{\dot{\beta}\alpha} V^\mu U_\nu \\ &= \text{Tr}(\sigma_\mu \bar{\sigma}^\nu) V^\mu U_\nu = 2V^\mu U_\mu \end{aligned} \quad (123)$$

□ 微分演算子のスピナー表現：

微分  $\partial_\mu$  も Lorentz ベクトル  $\Rightarrow$  bi-spinor で表せる

$$\partial_{\alpha\dot{\beta}} = (\sigma_\mu)_{\alpha\dot{\beta}} \partial^\mu = T_{\alpha\dot{\beta},\mu} \partial^\mu \quad (124)$$

具体形:

$$\begin{pmatrix} \partial_{1\dot{1}} \\ \partial_{1\dot{2}} \\ \partial_{2\dot{1}} \\ \partial_{2\dot{2}} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -i & 0 \\ 0 & 1 & i & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_T \begin{pmatrix} \partial_0 \\ -\partial_1 \\ -\partial_2 \\ -\partial_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_0 - \partial_3 \\ -\partial_1 + i\partial_2 \\ -\partial_1 - i\partial_2 \\ \partial_0 + \partial_3 \end{pmatrix}$$

次の公式も有用：

$$\begin{aligned} \partial_{\alpha\dot{\beta}} \partial^{\gamma\dot{\beta}} &= (\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\beta}} (\bar{\sigma}^\nu)^{\dot{\beta}\gamma} \partial_\mu \partial_\nu \\ &= \frac{1}{2} (\sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu + \sigma^\nu \bar{\sigma}^\mu)_{\alpha}{}^{\gamma} \partial_\mu \partial_\nu \\ &= \delta_\alpha^\gamma \partial^\mu \partial_\mu = \delta_\alpha^\gamma \partial^2 \end{aligned} \quad (125)$$

$$\begin{aligned}
\partial_{\alpha\dot{\beta}}\partial^{\alpha\dot{\gamma}} &= (\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\beta}}(\bar{\sigma}^\nu)^{\dot{\gamma}\alpha}\partial_\mu\partial_\nu \\
&= \frac{1}{2}(\bar{\sigma}^\nu\sigma^\mu + \bar{\sigma}^\mu\sigma^\nu)^{\dot{\gamma}\dot{\beta}}\partial_\mu\partial_\nu \\
&= \delta_{\dot{\beta}}^{\dot{\gamma}}\partial_\mu\partial^\mu = \partial_{\dot{\beta}}^{\dot{\gamma}}\partial^2
\end{aligned} \tag{126}$$

ここで $\dot{\beta}$ と $\dot{\gamma}$ を縮約すると

$$\partial_{\alpha\dot{\beta}}\partial^{\alpha\dot{\beta}} = 2\partial^2 \tag{127}$$

### 3.1.10 2階のローレンツテンソルのスピナー表現

$T^{\mu\nu}$  = 一般の二階のテンソル。

各ベクトル添え字をスピナーに変換：

$$T_{\alpha\dot{\beta};\gamma\dot{\delta}} = (\sigma_\mu)_{\alpha\dot{\beta}}(\sigma_\nu)_{\gamma\dot{\delta}}T^{\mu\nu} \tag{128}$$

左辺  $\in \mathcal{D}^{\frac{11}{22}} \otimes \mathcal{D}^{\frac{11}{22}}$ 。

$SL(2, C)$  および  $SL(2, C)^*$  に対して、Clebsch-Gordan 分解。

$$\frac{1}{2} \otimes \frac{1}{2} = 1_s \oplus 0_a, \quad a = \text{antisymmetric}, \quad s = \text{symmetric}$$

従って、全体の分解は

$$\mathcal{D}^{\frac{11}{22}} \otimes \mathcal{D}^{\frac{11}{22}} = \underbrace{\mathcal{D}^{11}(9)}_{\text{sym. traceless}} \oplus \underbrace{\mathcal{D}^{10}(3)}_{\text{SD}} \oplus \underbrace{\mathcal{D}^{01}(3)}_{\text{ASD}} \oplus \underbrace{\mathcal{D}^{00}(1)}_{\text{scalar}} \quad (129)$$

これは次のテンソルの分解に対応：

$$\begin{aligned} T^{\mu\nu} &= \left( T^{(\mu\nu)} - \frac{1}{4} \eta^{\mu\nu} T^\rho{}_\rho \right) + T^{[\mu\nu]} + \frac{1}{4} \eta^{\mu\nu} T^\rho{}_\rho \\ &= (10 - 1) \oplus 6 \oplus 1 \end{aligned} \quad (130)$$

ここで

$$T^{(\mu\nu)} = \frac{1}{2}(T^{\mu\nu} + T^{\nu\mu}), \quad T^{[\mu\nu]} = \frac{1}{2}(T^{\mu\nu} - T^{\nu\mu}) \quad (131)$$

以下で、特に

$$\begin{aligned}
 T^{[\mu\nu]} &= T_{SD}^{[\mu\nu]} + T_{ASD}^{[\mu\nu]} \\
 &\quad \downarrow \quad \quad \downarrow \\
 &\quad \mathcal{D}^{10}(3) \quad \mathcal{D}^{01}(3)
 \end{aligned}
 \tag{132}$$

をを説明。

□ (Anti-)Self-Dualな反対称テンソル：

$F^{\mu\nu}$  = 反対称テンソル：

その双対 (dual)  $\tilde{F}_{\mu\nu}$ ：

$$\tilde{F}_{\mu\nu} \equiv \frac{i}{2} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F^{\rho\sigma}
 \tag{133}$$

$$\text{ここで } \epsilon_{0123} \equiv 1, \quad \epsilon^{0123} = -1
 \tag{134}$$

$i$ の因子を付けておくと次の関係が成り立つ：

$$\tilde{\tilde{F}}_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}
 \tag{135}$$

証明：

$$\begin{aligned}\tilde{\tilde{F}}_{\mu\nu} &= \frac{i}{2}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\tilde{F}^{\rho\sigma} = \frac{i}{2}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\frac{i}{2}\epsilon^{\rho\sigma\lambda\tau}F_{\lambda\tau} \\ &= -\frac{1}{4}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon^{\lambda\tau\rho\sigma}F_{\lambda\tau} = \frac{1}{2}(\delta_{\mu}^{\lambda}\delta_{\nu}^{\tau} - \delta_{\mu}^{\tau}\delta_{\nu}^{\lambda})F_{\lambda\tau} = F_{\mu\nu}\end{aligned}\quad (136)$$

Self-dual (SD) および anti-self-dual(ASD) テンソルの定義:

$$\text{(SD)} \quad \tilde{F}_{\mu\nu}^{(+)} = F_{\mu\nu}^{(+)} \quad (137)$$

$$\text{(ASD)} \quad \tilde{F}_{\mu\nu}^{(-)} = -F_{\mu\nu}^{(-)} \quad (138)$$

- 任意の反対称テンソルは、常にSDとASD部分に分解できる：

$$F_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}^{(+)} + F_{\mu\nu}^{(-)} \quad (139)$$

$$F_{\mu\nu}^{(+)} = \frac{1}{2}(F_{\mu\nu} + \tilde{F}_{\mu\nu}), \quad F_{\mu\nu}^{(-)} = \frac{1}{2}(F_{\mu\nu} - \tilde{F}_{\mu\nu}) \quad (140)$$

$F_{\mu\nu}^{(+)}$  と  $F_{\mu\nu}^{(-)}$  は互いに複素共役であることに注意：

$$F_{\mu\nu}^{(-)} = F_{\mu\nu}^{(+)*} \quad (141)$$

## (A)SD テンソルのローレンツ変換性

正規ローレンツ変換 (*i.e.*  $\det \Lambda = +1$ ) のもとで、(A)SD テンソルは(A)SD テンソルに写像される

---

演習 3.8  $F^{\mu\nu}$  がSDならば、それを正規ローレンツ変換したものの  $F'^{\mu\nu} = \Lambda^\mu_\rho \Lambda^\nu_\sigma F^{\rho\sigma}$  もまたSDであることを示せ。

解:

$$\begin{aligned}\tilde{F}'_{\mu\nu} &= \frac{i}{2} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F'^{\rho\sigma} \\ &= \frac{i}{2} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \Lambda^\rho_\tau \Lambda^\sigma_\lambda F^{\tau\lambda} \\ &= \frac{i}{2} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \Lambda^\rho_\tau \Lambda^\sigma_\lambda \frac{i}{2} \epsilon^{\tau\lambda\alpha\beta} F_{\alpha\beta}\end{aligned}\tag{142}$$

逆行列  $\Lambda^\mu_\nu$  は次の関係式から求まる:

$$\Lambda_\nu^\rho \Lambda^\nu_\sigma = \delta^\rho_\sigma\tag{143}$$

これより、

$$F_{\alpha\beta} = \Lambda^\gamma_\alpha \Lambda^\delta_\beta F'_{\gamma\delta}\tag{144}$$

$\epsilon^{0123} = -1$  を用いると、

$$\begin{aligned}
 \tilde{F}'_{\mu\nu} &= -\frac{1}{4}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\Lambda^\rho{}_\tau\Lambda^\sigma{}_\lambda\epsilon^{\tau\lambda\alpha\beta}\Lambda^\gamma{}_\alpha\Lambda^\delta{}_\beta F'_{\gamma\delta} \\
 &= -\frac{1}{4}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon^{\rho\sigma\gamma\delta}F'_{\gamma\delta}\det\Lambda \\
 &= \det\Lambda F'_{\mu\nu} = F'_{\mu\nu} \quad // \tag{145}
 \end{aligned}$$

□ (A)SD テンソルのスピナー表示 :

SDテンソル  $\in \mathcal{D}^{10}$  : すなわち

$$T_{(\alpha\gamma)} = \frac{1}{2}(T_{\alpha\gamma} + T_{\gamma\alpha}) \tag{146}$$

ここで

$$\begin{aligned}
 T_{\alpha\gamma} &\equiv \epsilon^{\beta\delta}T_{\alpha\beta;\gamma\delta} = \epsilon^{\beta\delta}(\sigma_\mu)_{\alpha\beta}(\sigma_\nu)_{\gamma\delta}T^{\mu\nu} \\
 &= (\sigma_\mu\epsilon\sigma_\nu^T)_{\alpha\gamma}T^{\mu\nu} = (\sigma_\mu\bar{\sigma}_\nu\epsilon)_{\alpha\gamma}T^{\mu\nu} \tag{147}
 \end{aligned}$$

$\sigma_\mu\bar{\sigma}_\nu\epsilon$  の対称性を調べる :

$$\begin{aligned}
 (\sigma_\mu\bar{\sigma}_\nu\epsilon)^T &= \epsilon^T\bar{\sigma}_\nu^T\sigma_\mu^T = (\epsilon^T\bar{\sigma}_\nu\epsilon)^T(\epsilon^T\sigma_\mu^T\epsilon)\epsilon^T \\
 &= \sigma_\nu\bar{\sigma}_\mu\epsilon^T = -\sigma_\nu\bar{\sigma}_\mu\epsilon \tag{148}
 \end{aligned}$$

これを使うと

$$\begin{aligned} T_{(\alpha\gamma)} &= \frac{1}{2} [(\sigma_\mu \bar{\sigma}_\nu - \sigma_\nu \bar{\sigma}_\mu) \epsilon]_{\alpha\gamma} T^{\mu\nu} \\ &= \frac{1}{2} [(\sigma_\mu \bar{\sigma}_\nu - \sigma_\nu \bar{\sigma}_\mu) \epsilon]_{\alpha\gamma} T^{[\mu\nu]} \\ &= -i(\sigma_{\mu\nu} \epsilon)_{\alpha\gamma} T^{[\mu\nu]} \end{aligned} \quad (149)$$

ここで

$$(\sigma_{\mu\nu})_{\alpha}{}^{\beta} \equiv \frac{i}{2} (\sigma_\mu \bar{\sigma}_\nu - \sigma_\nu \bar{\sigma}_\mu)_{\alpha}{}^{\beta} \quad (150)$$

以前の考察より、 $\sigma_{\mu\nu}$  はSDテンソルであるはず。すなわち

$$\sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{2} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \sigma^{\rho\sigma} \quad (151)$$

---

演習 3.9 これを  $\sigma^\mu, \bar{\sigma}^\mu$  の具体的な形を用いて示せ。

---

これを用いると、

$$\begin{aligned} T_{(\alpha\gamma)} &= -i\frac{i}{2}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}(\sigma^{\rho\sigma}\epsilon)_{\alpha\gamma}T^{[\mu\nu]} \\ &= -i(\sigma^{\rho\sigma}\epsilon)_{\alpha\gamma}\tilde{T}_{[\rho\sigma]} = -i(\sigma_{\rho\sigma}\epsilon)_{\alpha\gamma}\tilde{T}^{[\rho\sigma]} \end{aligned} \quad (152)$$

従って(149)と比較すると

$$T_{(\alpha\beta)} = -i(\sigma_{\mu\nu}\epsilon)_{\alpha\beta}T^{(+)\mu\nu} \quad (153)$$

ASD テンソル  $\in \mathcal{D}^{01}$  も同様 :

$$(\bar{\sigma}_{\mu\nu})^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \equiv \frac{i}{2}(\bar{\sigma}_{\mu}\sigma_{\nu} - \bar{\sigma}_{\nu}\sigma_{\mu})^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \quad (154)$$

$$\tilde{\bar{\sigma}}_{\mu\nu} = -\bar{\sigma}_{\mu\nu} \quad (155)$$

$$T_{(\dot{\alpha}\dot{\beta})} = \epsilon^{\alpha\gamma}T_{\alpha\dot{\beta};\gamma\dot{\delta}} = i(\epsilon^T\bar{\sigma}_{\mu\nu})_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}T^{(-)\mu\nu} \quad (156)$$

---

演習 3.10 これらの関係式を証明せよ。

---

## 3.2 相対論的自由場の方程式の構築

ローレンツ群とその表現  $\implies$  ローレンツ共変な場の方程式

$SL(2, C) \times SL(2, C)^*$  の分解を最大限利用

### 3.2.1 Klein-Gordon(scalar) 場の方程式

スカラー場  $\phi \in \mathcal{D}^{00}$

共変性を満たす最も簡単な微分方程式

$$\partial_{\alpha\dot{\beta}}\phi = 0 \quad (= (\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\beta}}\partial_\mu\phi) \quad (157)$$

しかし、 $\partial_\mu\phi = 0 \rightarrow \phi = \text{constant}$ : 自明な配位のみゆえ不可。

- 非自明な方程式を得るには、不変な微分  $\partial_{\alpha\dot{\beta}}\partial^{\alpha\dot{\beta}} = 2\partial^2$  を用いる必要あり。

$\phi$  に対して一次に限れば、最も一般的な方程式は、

$$\frac{1}{2} \partial_{\alpha\dot{\beta}} \partial^{\alpha\dot{\beta}} \phi = \partial^2 \phi = -m^2 \phi$$

$\therefore (\partial^2 + m^2) \phi = 0$  Klein-Gordon 方程式 (158)

フーリエ変換  $\implies$  相対論的な基本分散関係

$$E^2 = \vec{p}^2 + m^2 \quad (159)$$

この基本分散関係はすべての相対論的な自由場に対して要請される。

### 3.2.2 Weyl 方程式

Weyl 場  $\xi_\alpha \in \mathcal{D}^{\frac{1}{2}0}$

最も簡単な共変微分方程式:

$$\partial^{\alpha\dot{\beta}} \xi_\alpha = (\bar{\sigma}^\mu)^{\dot{\beta}\alpha} \partial_\mu \xi_\alpha = 0 \quad \text{Weyl 方程式} \quad (160)$$

$\bar{\sigma}^\mu = (1, \vec{\sigma}) \quad (\mu \text{ は上付き})$

- これは、スカラー場の場合と異なり、非自明な内容を持つ。
- $m^2 = 0$  の KG 方程式を満たす:

$$0 = \partial_{\gamma\dot{\beta}} \partial^{\alpha\dot{\beta}} \xi_{\alpha} = \delta_{\gamma}^{\alpha} \partial^2 \xi_{\alpha} = \partial^2 \xi_{\gamma} \quad (161)$$

- 具体形と物理的内容

$$(\partial_t + \sigma_i \partial_i) \xi = 0 \quad \Leftrightarrow \quad E - \vec{p} \cdot \vec{\sigma} = 0 \quad (162)$$

Helicity 1 を持つ massless フェルミオンを表す :

$$\text{helicity} \equiv h = \frac{\vec{p} \cdot \vec{\sigma}}{p} = 1 \quad (163)$$

反 Weyl 場  $\eta^{\dot{\beta}} \in \mathcal{D}^{0\frac{1}{2}}$

$$\partial_{\alpha\dot{\beta}} \eta^{\dot{\beta}} = (\sigma^{\mu})^{\alpha\dot{\beta}} \partial_{\mu} \eta^{\dot{\beta}} = 0 \quad (164)$$

$$(\partial_t - \sigma_i \partial_i) \eta^{\dot{\beta}} = 0 \quad \sigma^{\mu} = (1, -\vec{\sigma}) \quad (165)$$

$$h = -1 \quad (166)$$

Helicity  $-1$  を持つ massless のフェルミオンを表す。

### 3.2.3 Dirac 方程式

Weyl 方程式は massless の fermion しか記述できない。

Massive な fermion に対しては、 $\xi_\alpha \in \mathcal{D}^{\frac{1}{2}0}$  と  $\eta^{\dot{\beta}} \in \mathcal{D}^{0\frac{1}{2}}$  の両方が必要。

これらを用いると、次の閉じた方程式系が書ける：

$$\partial^{\alpha\dot{\beta}}\xi_\alpha = a\eta^{\dot{\beta}} \quad \left( \mathcal{D}^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} \otimes \mathcal{D}^{\frac{1}{2}0} = \cancel{\mathcal{D}^{1\frac{1}{2}}} \oplus \mathcal{D}^{0\frac{1}{2}} \right) \quad (167)$$

$$\partial_{\alpha\dot{\beta}}\eta^{\dot{\beta}} = b\xi_\alpha \quad \left( \mathcal{D}^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} \otimes \mathcal{D}^{0\frac{1}{2}} = \cancel{\mathcal{D}^{\frac{1}{2}1}} \oplus \mathcal{D}^{\frac{1}{2}0} \right) \quad (168)$$

$a, b$  は質量の次元を持つ。

各々の成分が KG 方程式を満たすことを要求

$\partial_{\gamma\dot{\beta}}$  を最初の方程式に作用させて、第2式を用いると

$$\begin{aligned} \partial_{\gamma\dot{\beta}}\partial^{\alpha\dot{\beta}}\xi_\alpha &= \delta_\gamma^\alpha \partial^2 \xi_\alpha = -m^2 \xi_\gamma = a \partial_{\gamma\dot{\beta}}\eta^{\dot{\beta}} = ab \xi_\gamma \\ \therefore ab &= -m^2 \end{aligned} \quad (169)$$

場を適当に rescale  $\Rightarrow a = b$  とできる  $\Rightarrow a = b = -im$  ととれる：

$$\partial^{\alpha\dot{\beta}}\xi_{\alpha} = -im\eta^{\dot{\beta}} \quad (170)$$

$$\partial_{\alpha\dot{\beta}}\eta^{\dot{\beta}} = -im\xi_{\alpha} \quad (171)$$

## Dirac spinor と Dirac 方程式

$\xi_{\alpha}$  と  $\eta^{\dot{\beta}}$  を併せて、4成分の Dirac 場を定義：

$$\psi = \begin{pmatrix} \xi_{\alpha} \\ \eta^{\dot{\beta}} \end{pmatrix} \quad (172)$$

⇒ 上記の方程式系は次のようにまとめて書ける：

$$\begin{aligned} -i \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} \psi &= \begin{pmatrix} 0 & \partial_{\alpha\dot{\beta}} \\ \partial^{\alpha\dot{\beta}} & 0 \end{pmatrix} \psi \\ &= \begin{pmatrix} 0 & (\sigma^{\mu})_{\alpha\dot{\beta}}\partial_{\mu} \\ (\bar{\sigma}^{\mu})^{\dot{\beta}\alpha}\partial_{\mu} & 0 \end{pmatrix} \psi \end{aligned} \quad (173)$$

ガンマ行列  $\gamma^\mu$  を次のように定義：

$$\gamma^\mu \equiv \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -\vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \right\} \quad (174)$$

$\Rightarrow \psi$  に対する Dirac 方程式:

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0 \quad (175)$$

$\sigma^\mu$  と  $\bar{\sigma}^\mu$  が満たす基本的な bilinear 関係式

$$\sigma_\mu \bar{\sigma}_\nu + \sigma_\nu \bar{\sigma}_\mu = 2\eta_{\mu\nu} \quad (176)$$

$$\bar{\sigma}_\mu \sigma_\nu + \bar{\sigma}_\nu \sigma_\mu = 2\eta_{\mu\nu} \quad (177)$$

$\Rightarrow \gamma^\mu$  の満たす Clifford 代数:

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu} \quad (178)$$

- 高次元のディラック場を構成するには、この代数から出発するのが便利。

□ Chiral(Weyl) 射影 :

Dirac場  $\in \mathcal{D}^{\frac{1}{2}0} \oplus \mathcal{D}^{0\frac{1}{2}}$

各成分を抽出する射影 = chiral (または Weyl) 射影

$\gamma_5$  行列を次のように定義 :

$$\gamma_5 \equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (179)$$

$$\gamma_5^2 = 1 \quad (180)$$

明らかに

$$\gamma_5 \begin{pmatrix} \xi_\alpha \\ \eta^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_\alpha \\ -\eta^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix} \quad (181)$$

$\gamma_5$  の固有値 = chirality. 欲しい射影は

$$\mathcal{P}_\pm \equiv \frac{1}{2}(1 \pm \gamma_5), \quad \mathcal{P}_\pm^2 = \mathcal{P}_\pm, \quad \mathcal{P}_+\mathcal{P}_- = 0 \quad (182)$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_+\psi &= \xi \in \mathcal{D}^{\frac{1}{2}0} \\ \mathcal{P}_-\psi &= \eta \in \mathcal{D}^{0\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

### 3.2.4 ベクトル場 $V^\mu$ の満たす方程式: Proca 及び Maxwell 方程式

Massive ベクトル場: Proca 方程式  $\xrightarrow{m \rightarrow 0}$  Maxwell 方程式

以下 massive の場合を考察:

□ 一般的な構造の解析 :

$$\text{ベクトル場 } V^\mu \Leftrightarrow \xi_{\alpha\beta} = (\sigma_\mu)_{\alpha\beta} V^\mu \in \mathcal{D}^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$$

$$\text{微分 } \partial_\nu \Leftrightarrow \partial_{\alpha\beta} = (\sigma^\nu)_{\alpha\beta} \partial_\nu \in \mathcal{D}^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$$

$\partial_\nu V^\mu \Leftrightarrow \partial_{\alpha\beta} \xi_{\gamma\delta}$  は次のような表現に分解される :

$$\mathcal{D}^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} \otimes \mathcal{D}^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} = \mathcal{D}^{11} \oplus \mathcal{D}^{10} \oplus \mathcal{D}^{01} \oplus \mathcal{D}^{00} \quad (183)$$

(1: 対称表現 0: 反対称表現 )

このままでは、右辺は多く (16個) の成分を持つことになる。これを次の操作で制限する。

1.  $SL(2)$  添え字のひとつのペアを縮約 (例:  $\epsilon^{\alpha\gamma}$  との縮約)  $\Rightarrow$  反対称化  $\Rightarrow$  対称部分  $\mathcal{D}^{11}$  が落ちる。
2. 残りの部分の添え字を対称化  $\Rightarrow$  反対称部分  $\mathcal{D}^{00}$  が落ちる。
3.  $\Rightarrow \mathcal{D}^{10}$  と  $\mathcal{D}^{01}$  が残る。  $\Rightarrow$  新たな場  $\chi \in \mathcal{D}^{10}$  および  $\eta \in \mathcal{D}^{01}$  を導入。
4.  $\chi$  の運動項を得るために、 $\partial$  を  $\chi$  に作用させると

$$\mathcal{D}_{22}^{\frac{11}{2}} \otimes \mathcal{D}^{10} = \mathcal{D}_{22}^{\frac{31}{2}} \oplus \mathcal{D}_{22}^{\frac{11}{2}}$$

上記と同様に、添え字のペアを縮約  $\Rightarrow \mathcal{D}_{22}^{\frac{31}{2}}$  部分が落ち、 $\mathcal{D}_{22}^{\frac{11}{2}}$  のみが残る。これはベクトル場  $\xi$  そのものと同定できる。

$$5. \partial\eta \text{ に対する同様の考察 } \Rightarrow \mathcal{D}_{22}^{\frac{11}{2}} \otimes \mathcal{D}^{01} = \cancel{\mathcal{D}_{22}^{\frac{13}{2}}} \oplus \mathcal{D}_{22}^{\frac{11}{2}} \ni \xi$$

これで場  $\xi \in \mathcal{D}_{22}^{\frac{11}{2}}$ ,  $\chi \in \mathcal{D}^{10}$ ,  $\eta \in \mathcal{D}^{01}$  に対して方程式系が閉じる。

具体的にこれを書き下すと<sup>3</sup>

$$\begin{aligned} (i) \quad & \partial^{\alpha(\dot{\beta}} \xi_{\alpha}^{\dot{\gamma})} = a_1 \eta^{(\dot{\beta}\dot{\gamma})} \in \mathcal{D}^{01} \text{ (ASD)} \\ (ii) \quad & \partial_{\alpha\dot{\beta}} \eta^{(\dot{\beta}\dot{\gamma})} = a_2 \xi_{\alpha}^{\dot{\gamma}} \in \mathcal{D}^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} \text{ (vector)} \\ (iii) \quad & \partial_{(\alpha\dot{\gamma}} \xi^{\dot{\gamma}}_{\beta)} = a_3 \chi_{(\alpha\beta)} \in \mathcal{D}^{10} \text{ (SD)} \\ (iv) \quad & \partial^{\alpha\dot{\beta}} \chi_{(\alpha\gamma)} = a_4 \xi^{\dot{\beta}}_{\gamma} \in \mathcal{D}^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} \text{ (vector)} \end{aligned}$$

このタイプの方程式: **Dirac-Fierz-Pauli 方程式**

- 場の成分の数 :  $4(\xi_{\alpha}^{\dot{\gamma}}) + 3(\eta^{\dot{\beta}\dot{\gamma}}) + 3(\chi_{\alpha\beta}) = 10$
- 運動方程式  $\Rightarrow$  独立成分は3成分 (以下で見る)。

---

<sup>3</sup>( ) は同種類の添え字の対称化を表す。

□ Dirac-Fierz-Paluli 方程式から Proca 方程式へ :

ローレンツ添え字を持った場で書き直し、ベクトル場が KG 方程式を満たすように定数  $a_i$  を定める。

必要な変換公式

$$\partial_{\alpha\dot{\beta}} = (\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\beta}} \partial_\mu \quad (184)$$

$$\partial^{\alpha\dot{\beta}} = (\bar{\sigma}^\mu)^{\dot{\beta}\alpha} \partial_\mu \quad (185)$$

$$\xi_{\alpha\dot{\beta}} = (\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\beta}} V_\mu$$

$$\therefore \xi_{\alpha\dot{\beta}} = \epsilon^{\dot{\beta}\gamma} \xi_{\alpha\dot{\gamma}} = (\sigma^\mu \epsilon^T)_{\alpha\dot{\beta}} V_\mu \quad (186)$$

$$\xi^{\dot{\beta}\gamma} = \epsilon^{\dot{\beta}\dot{\alpha}} \xi_{\dot{\alpha}\gamma}^T = (\epsilon \sigma^{\mu T})^{\dot{\beta}\gamma} V_\mu = (\bar{\sigma}^\mu \epsilon)^{\dot{\beta}\gamma} V_\mu \quad (187)$$

$$\chi_{\alpha\beta} = \frac{i}{2} (\sigma^{\mu\nu} \epsilon)_{\alpha\beta} F_{\mu\nu}^{(+)} \quad (188)$$

$$\eta_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} = -\frac{i}{2} (\epsilon^T \bar{\sigma}^{\mu\nu})_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} F_{\mu\nu}^{(-)}$$

$$\therefore \eta^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} = -\frac{i}{2} (\bar{\sigma}^{\mu\nu} \epsilon^T)^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} F_{\mu\nu}^{(-)} \quad (189)$$

注 : 以前の convention では、 $\chi_{\alpha\beta}$  は  $\chi_{\alpha\beta} = -i(\sigma^{\mu\nu} \epsilon)_{\alpha\beta} \chi_{\mu\nu}^{(+)}$  と定義されるが、後の式が

簡単になるように、 $\chi_{\mu\nu}^{(+)} = -\frac{1}{2}F_{\mu\nu}^{(+)}$  と置いた。同様に、 $\eta_{\mu\nu}^{(-)} = -\frac{1}{2}F_{\mu\nu}^{(-)}$ 。

## 方程式 (i) 及び (iii) の解析

方程式 (i) を再掲

$$\partial^{\alpha(\dot{\beta}}\xi_{\alpha}^{\dot{\gamma})} = a_1\eta^{(\dot{\beta}\dot{\gamma})} \quad (190)$$

上記の変換を行うと、Eq.(i) の左辺は

$$\begin{aligned} \text{LHS} &= \frac{1}{2} \left\{ (\bar{\sigma}^{\mu})^{\dot{\beta}\alpha} \partial_{\mu} (\sigma^{\nu} \epsilon^T)_{\alpha}^{\dot{\gamma}} V_{\nu} + (\dot{\beta} \leftrightarrow \dot{\gamma}) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ (\bar{\sigma}^{\mu} \sigma^{\nu} \epsilon^T)^{\dot{\beta}\dot{\gamma}} \partial_{\mu} V_{\nu} + (\dot{\beta} \leftrightarrow \dot{\gamma}) \right\} \end{aligned}$$

恒等式  $(\bar{\sigma}^{\mu} \sigma^{\nu} \epsilon^T)^T = -\bar{\sigma}^{\nu} \sigma^{\mu} \epsilon^T$  を用いてこれを書き直す

$$\begin{aligned} \text{LHS} &= \frac{1}{2} \left( (\bar{\sigma}^{\mu} \sigma^{\nu} - \bar{\sigma}^{\nu} \sigma^{\mu}) \epsilon^T \right)^{\dot{\beta}\dot{\gamma}} \partial_{\mu} V_{\nu} \\ &= \frac{1}{2i} (\bar{\sigma}^{\mu\nu} \epsilon^T)^{\dot{\beta}\dot{\gamma}} V_{\mu\nu} \end{aligned} \quad (191)$$

$$\text{ここで } V_{\mu\nu} \equiv \partial_{\mu} V_{\nu} - \partial_{\nu} V_{\mu} \quad (192)$$

$\bar{\sigma}^{\mu\nu}$  が ASD であることを考慮して Eq.(i) の右辺と比較すると、

$$a_1 F_{\mu\nu}^{(-)} = V_{\mu\nu}^{(-)} \quad (193)$$

全く同様にして、Eq.(iii) より

$$a_3 F_{\mu\nu}^{(+)} = -V_{\mu\nu}^{(+)} \quad (194)$$

方程式 (ii) 及び (iv) の解析

方程式 (ii) を再掲

$$\partial_{\alpha\dot{\beta}} \eta^{(\dot{\beta}\dot{\gamma})} = a_2 \xi_{\alpha}^{\dot{\gamma}} \quad (195)$$

左辺を書き換えると

$$\begin{aligned} \text{LHS} &= (\sigma^{\mu})_{\alpha\dot{\beta}} \partial_{\mu} \frac{1}{2i} (\bar{\sigma}^{\nu\rho} \epsilon^T)^{\dot{\beta}\dot{\gamma}} F_{\nu\rho}^{(-)} \\ &= \frac{1}{2i} (\sigma^{\mu} \bar{\sigma}^{\nu\rho} \epsilon^T)_{\alpha}^{\dot{\gamma}} \partial_{\mu} F_{\nu\rho}^{(-)} \end{aligned} \quad (196)$$

## $\sigma^\mu \bar{\sigma}^{\nu\rho}$ の分解公式

この積の群論的な構造:  $\mathcal{D}^{\frac{11}{22}} \otimes \mathcal{D}^{01} = \mathcal{D}^{\frac{11}{22}} \oplus \mathcal{D}^{\frac{13}{22}}$  。

$\mathcal{D}^{\frac{13}{22}}$  部分は、 $\sigma^\mu$  と  $\bar{\sigma}^{\nu\rho}$  が縮約され、スピナー添え字が反対称化されているので現れない。

$\Rightarrow \mathcal{D}^{\frac{11}{22}}$  に属する  $\sigma^\mu$  のみで書けるはず。可能な形は

$$\sigma^\mu \bar{\sigma}^{\nu\rho} = b(\eta^{\mu\nu} \sigma^\rho - \eta^{\mu\rho} \sigma^\nu) + c\epsilon^{\mu\nu\rho\lambda} \sigma_\lambda \quad (197)$$

係数  $b, c$  は添え字  $\mu, \nu, \rho$  に具体的な数を入れて比較すると容易に求まる。

$$\sigma^\mu \bar{\sigma}^{\nu\rho} = i(\eta^{\mu\nu} \sigma^\rho - \eta^{\mu\rho} \sigma^\nu) + \epsilon^{\mu\nu\rho\lambda} \sigma_\lambda \quad (198)$$

$$\bar{\sigma}^\mu \sigma^{\nu\rho} = i(\eta^{\mu\nu} \bar{\sigma}^\rho - \eta^{\mu\rho} \bar{\sigma}^\nu) + \epsilon^{\mu\nu\rho\lambda} \bar{\sigma}_\lambda \quad (199)$$

これらの恒等式を用いると、Eq. (ii) 及び (iv) から次の二つの式が得られる:

$$\partial^\mu F_{\mu\nu}^{(-)} = a_2 V_\nu \quad (200)$$

$$\partial^\mu F_{\mu\nu}^{(+)} = -a_4 V_\nu \quad (201)$$

- これより、 $a_2 \neq 0$  または  $a_4 \neq 0$  ならば、 $\partial^\mu V_\mu = 0$  となる

## 方程式系の整合性

### これまでのまとめ

$$\partial^\mu F_{\mu\nu}^{(-)} = a_2 V_\nu \quad (202)$$

$$\partial^\mu F_{\mu\nu}^{(+)} = -a_4 V_\nu \quad (203)$$

$$a_1 F_{\mu\nu}^{(-)} = V_{\mu\nu}^{(-)} \quad (204)$$

$$a_3 F_{\mu\nu}^{(+)} = -V_{\mu\nu}^{(+)} \quad (205)$$

$\partial^\mu$  を (204) に作用

$$\begin{aligned} a_1 \partial^\mu F_{\mu\nu}^{(-)} &= \partial^\mu V_{\mu\nu}^{(-)} = \frac{1}{2} \partial^\mu (V_{\mu\nu} - \tilde{V}_{\mu\nu}) \\ &= \frac{1}{2} (\partial^2 V_\nu - \partial_\nu (\partial \cdot V)) \quad \Leftrightarrow \partial^\mu \tilde{V}_{\mu\nu} = 0 \end{aligned} \quad (206)$$

式(202)を代入

$$a_1 a_2 V_\nu = \frac{1}{2}(\partial^2 V_\nu - \partial_\nu(\partial \cdot V)) \quad (207)$$

同様にして、(202)と(203)より

$$a_3 a_4 V_\nu = \frac{1}{2}(\partial^2 V_\nu - \partial_\nu(\partial \cdot V)) \quad (208)$$

- $V_\nu$ が質量  $m$  のKG方程式を満たすことを要求すると<sup>4</sup>

$$a_1 a_2 = a_3 a_4 = -\frac{m^2}{2} \quad (209)$$

$$a_1 = 1, a_3 = -1 \text{ を選択} \Rightarrow F_{\mu\nu}^{(\pm)} = V_{\mu\nu}^{(\pm)} \quad \Leftarrow (204), (205)$$
$$a_2 = -a_4 = -m^2/2$$

↓

**Proca 方程式**

---

<sup>4</sup>すでに述べたように、この場合には  $\partial \cdot V = 0$  は自動的。

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu V_\nu - \partial_\nu V_\mu \quad (210)$$

$$\partial^\mu F_{\mu\nu} = -m^2 V_\nu (\equiv j_\nu) \quad (211)$$

$$\partial^\mu V_\mu = 0 \quad (212)$$

- $m^2 \neq 0 \Rightarrow \partial^\mu V_\mu = 0$  は第2式から従う。

$\Rightarrow$  Proca 場は3個の独立な自由度を持つ。

- $m^2 = 0 \Rightarrow$  massless の Maxwell 方程式

この場合には、 $\partial^\mu V_\mu = 0$  の条件を課す必要がないことに注意。

- Proca 場の方程式は局所的なゲージ不変性を持たない。自発的対称性の破れによるヒッグズ機構(の一部)と解釈される。

□ Proca場の応用： Londonによる超伝導の有効理論:

Proca場の最初の出現： London兄弟による超伝導のマクロな有効理論<sup>5</sup>。

$V^\mu$ をeffectiveなMaxwell場 $A^\mu$ と同定。

⇒ Proca方程式: カレント  $\propto$  ベクトルポテンシャル

$$j^\mu = -m^2 A^\mu \quad \text{London 方程式 (の相対論的な形)} \quad (213)$$

電氣的なソースがなく (*i.e.*  $A_0 = 0$ ) しかも時間依存性がない ( $\partial_t^2 \vec{A} = 0$ )  
場合の massive な KG 方程式：

$$(-\vec{\nabla}^2 + m^2)\vec{A} = 0 \quad (214)$$

この curl をとり、 $\vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{B}$  を用いると、

$$\vec{\nabla}^2 \vec{B} = \frac{1}{\lambda_L^2} \vec{B}, \quad \lambda_L = \frac{1}{m} = \text{London penetration depth}$$

この解は、Meissner 効果を記述する:

$$\vec{B}(\vec{x}) = \vec{B}_0 e^{-\frac{1}{\lambda_L} \hat{n} \cdot \vec{x}}, \quad \hat{n}^2 = 1 \quad (215)$$

---

<sup>5</sup>F. London and H. London, Proc. Roy. Soc. (London) A149, (1935) 72.

---

演習 3.11 スピン 3/2 を持つ、massive な Rarita-Schwinger 場  $\psi_{\mu\alpha}$  の満たす方程式を、次の二つの既約表現を用いて構成せよ。

$$\xi_{(\alpha\beta)}^{\dot{\gamma}} \in \mathcal{D}^{1\frac{1}{2}}, \quad \chi_{\alpha}^{(\dot{\beta}\dot{\gamma})} \in \mathcal{D}^{\frac{1}{2}1} \quad (216)$$

注:  $\psi_{\mu\alpha}$  は 16 成分を持つように見えるのに対し、 $\xi$  と  $\chi$  は併せて 12 の自由度しか持たないことに注意。⇒  $\psi_{\mu\alpha}$  に拘束を課して、スピン 1/2 部分を表す 4 成分を落とす必要あり。

### 3.3 場のローレンツ不変な作用の構成

ミクロな基本作用の持つべき性質：

1. Locality:  $\Leftrightarrow$  作用は同一点での場の積で構成され、微分の数有限。
2. Reality or Hermiticity:  $\Leftarrow$  エネルギー＝ハミルトニアンは実。量子レベルでは、エルミート性の要請。特殊な場合を除いて(下の注参照)エルミート演算子の固有値は実。
3. Lorentz Invariance:

---

注: 特殊な場合には、エルミート演算子は複素固有値を持つことができる。 $\mathcal{O}$  = エルミート演算子、 $v$  = 固有値  $\lambda$  に属する固有ベクトルとすると

$$\begin{aligned}\mathcal{O}v &= \lambda v \\ \therefore (v, \mathcal{O}v) &= \lambda(v, v) = (\mathcal{O}v, v) = (v, \mathcal{O}v)^* = \lambda^*(v, v) \\ \therefore (\lambda - \lambda^*)(v, v) &= 0\end{aligned}\tag{217}$$

$\Rightarrow \lambda$  は、 $(v, v) \neq 0$  の場合は実。 $v$  がゼロノルムを持つ場合には  $\lambda$  は実である必要はない。

---

### 3.3.1 自由場の作用

上記の一般的要請を満たし、自由場の運動方程式を生成する作用を構成する。

単位系:  $\hbar = c = 1$  となるようにとる。

次元の勘定

$$\begin{aligned} S &\sim \hbar \sim px \sim Mcx \sim ML \sim 1 \\ \therefore L &\sim \frac{1}{M} \end{aligned} \quad (218)$$

以下演算子  $\mathcal{O}$  の mass 次元を  $[\mathcal{O}]$  と記す。

□ Klein-Gordon (scalar) 場:

運動方程式とそれを生成する作用

$$(\partial^2 + m^2)\phi = 0 \quad (219)$$

$$S = \int d^4x \frac{1}{2} \phi (\partial^2 + m^2) \phi \quad (220)$$

$\phi$  の次元: 運動項の部分から読み取る

$$0 = -4 + 2 + 2[\phi] \Rightarrow [\phi] = 1 \quad (221)$$

□ Weyl 場:

$\xi_\alpha \in \mathcal{D}^{\frac{1}{2}0}$  の場合: 運動方程式

$$\partial^{\alpha\dot{\beta}} \xi_\alpha = 0 \quad (222)$$

ローレンツ不変量を作るには、 $\mathcal{D}^{0\frac{1}{2}}$  のように変換する場が必要。

$\Rightarrow \xi_\alpha$  の複素共役  $(\xi_\alpha)^* = \xi_{\dot{\alpha}}^*$  を用いる。

明らかなローレンツ不変量は

$$\mathcal{I}_\xi = \xi_{\dot{\beta}}^* \partial^{\alpha\dot{\beta}} \xi_\alpha = \xi_{\dot{\beta}}^* (\bar{\sigma}^\mu)^{\dot{\beta}\alpha} \partial_\mu \xi_\alpha = \xi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \xi \quad (223)$$

## Reality の問題

- 線形運動方程式(222)のレベルでは、 $\xi_\alpha$  は通常の数(c#)の関数と見なせる。
- フェルミオンを記述する場としてその二次の作用を書くときには、フェルミオンに対してはコヒーレントな古典場は存在せず、第二量子化の形式

で意味のあるフェルミ場は既に量子化された反可換な振動子で記述されることに注意。

● ⇒ フェルミ場に対しては、何らかの有効な“古典場”の概念を導入して、その複素共役を定義しなければならない。

その定義は、経路積分法で用いられたときに、反可換な場を用いるオペレーター形式と整合的な結果を出すものでなければならない。

整合的な答え：  $\xi_\alpha$  はグラスマン代数の odd element (グラスマン数 = 反可換な  $c\#$ ) と解釈する。そのような要素  $\alpha, \beta$  は次の性質を満たすものとして定義される：

$$\alpha\beta = -\beta\alpha, \quad (\alpha\beta)^* \equiv \beta^*\alpha^* \quad (224)$$

「複素共役」“\*” はエルミート共役と同じ性質を持つように定義。

$\mathcal{I}_\xi$  の複素共役と正しい実作用 :

恒等式  $(\bar{\sigma}^\mu)^* = (\epsilon \sigma^{\mu T} \epsilon^T)^* = \epsilon \sigma^\mu \epsilon^T$  を用いると(223)の複素共役は、

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_\xi^* &= (\xi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \xi)^* = \partial_\mu \xi_{\dot{\alpha}}^* ((\bar{\sigma}^\mu)^{\beta\alpha})^* \xi_\beta = \partial_\mu \xi_{\dot{\alpha}}^* (\epsilon \sigma^\mu \epsilon^T)^{\beta\dot{\alpha}} \xi_\beta \\ &= \partial_\mu \xi_{\dot{\alpha}}^* (\epsilon \sigma^{\mu T} \epsilon^T)^{\dot{\alpha}\beta} \xi_\beta = \partial_\mu \xi_{\dot{\alpha}}^* (\bar{\sigma}^\mu)^{\dot{\alpha}\beta} \xi_\beta = \partial_\mu \xi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \xi \end{aligned} \quad (225)$$

- $\mathcal{I}_\xi + \mathcal{I}_\xi^*$  は全微分!  $\Rightarrow$  作用として用いることはできない。
- もう一つの実の組み合わせを採用:

$$\mathcal{L}_\xi = \frac{i}{2} (\xi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \xi - \partial_\mu \xi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \xi) = \frac{i}{2} \xi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \overleftrightarrow{\partial}_\mu \xi \quad (226)$$

$\delta \int d^4x \mathcal{L}_\xi = 0 \Rightarrow \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \xi = 0$ : 正しい運動方程式

$\eta^{\dot{\alpha}} \in \mathcal{D}^{0\frac{1}{2}}$  の場合:

$$\mathcal{L}_\eta = \frac{i}{2} \eta^\dagger \sigma^\mu \overleftrightarrow{\partial}_\mu \eta \quad (227)$$

Weyl (及び Dirac) 場の質量次元:  $4 = 1 + 2[\xi] \Rightarrow [\xi] = 3/2$

□ Dirac 場:

Dirac場のラグランジアンは運動項:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_\psi^{kin} &= \mathcal{L}_\xi + \mathcal{L}_\eta = \frac{i}{2}\xi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \xi + \frac{i}{2}\eta^\dagger \sigma^\mu \partial_\mu \eta \\ &= \frac{i}{2}(\eta^\dagger, \xi^\dagger) \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \overleftrightarrow{\partial}_\mu \\ \bar{\sigma}^\mu \overleftrightarrow{\partial}_\mu & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \\ &= \frac{i}{2}(\xi^\dagger, \eta^\dagger) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \gamma^\mu \overleftrightarrow{\partial}_\mu \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \\ &= \frac{i}{2}\psi^\dagger \gamma^0 \gamma^\mu \overleftrightarrow{\partial}_\mu \psi \\ &= \frac{i}{2}\bar{\psi} \gamma^\mu \overleftrightarrow{\partial}_\mu \psi\end{aligned}\tag{228}$$

ここで

$$\bar{\psi} \equiv \psi^\dagger \gamma^0 = \text{Dirac conjugate}\tag{229}$$

質量項:  $\xi$  と  $\eta$  を結ぶ

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_\psi^m &= -m\eta^\dagger\xi + \xi^\dagger\eta = -m(\xi^\dagger, \eta^\dagger) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \\ &= -m\bar{\psi}\psi\end{aligned}\tag{230}$$

全体のラグランジアン

$$\mathcal{L}_\psi = \mathcal{L}_\psi^{kin} + \mathcal{L}_\psi^m = \frac{i}{2}\bar{\psi}\gamma^\mu \overleftrightarrow{\partial}_\mu \psi - m\bar{\psi}\psi\tag{231}$$

作用 のレベルでは、表面項を無視すれば、次のよく見る形に書き換えられる：

$$\begin{aligned}- \int d^4x \frac{i}{2} \partial_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi &\simeq \int d^4x \frac{i}{2} \bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi \\ \therefore S_\psi &= \int d^4x \bar{\psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi\end{aligned}\tag{232}$$

□ Proca 場:

Proca 場の運動方程式

$$\begin{aligned}F_{\mu\nu} &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \\ \partial^\mu F_{\mu\nu} &= -m^2 A_\nu \\ \partial^\mu A_\mu &= 0\end{aligned}\tag{233}$$

これらは次の作用から生成されることが容易にチェックできる：

$$S_A = \int d^4x \left( -\frac{1}{4} F^{\mu\nu}[A] F_{\mu\nu}[A] + \frac{m^2}{2} A^\mu A_\mu \right)\tag{234}$$

- スカラー場の場合と同様  $A^\mu$  の次元は1。

### 3.3.2 相互作用ラグランジアン

□ Scalingの解析：

相互作用ラグランジアンの一般形：

$$\mathcal{L}_{int} = \sum_i g_i \mathcal{O}_i, \quad [g_i] = 4 - [\mathcal{O}_i] \quad (235)$$

一般に  $g_i$  は次元を持つ  $\Rightarrow$  エネルギー (mass) スケールを指定して始めてその「大きさ」を議論できる。

ある mass scale  $M$  で  $\mathcal{L}_{int}$  を定義し、これを無次元結合定数  $g_i^{(0)}$  を用いて書き直す：

$$\mathcal{L}_{int} = \sum_i \frac{g_i^{(0)}}{M^{[\mathcal{O}_i]-4}} \mathcal{O}_i \quad (236)$$

$M$  よりうんと低いスケール  $\sim \mu$  では、これらの項は次のように振る舞う：

$$\sum_i \frac{g_i^{(0)}}{M^{[\mathcal{O}_i]-4}} \mu^{[\mathcal{O}_i]} = \sum_i g_i^{(0)} \left( \frac{\mu}{M} \right)^{[\mathcal{O}_i]-4} \mu^4 \quad (237)$$

- 次元が4のオペレーターを基準にすると、低エネルギーでは、次元が4以上のオペレーターの寄与は非常に小さい。そのような  $\mathcal{O}_i =$  “irrelevant” operator
- 一方、 $M$  よりうんと大きなエネルギースケール  $\Lambda$  での振る舞いは、

$$\sum_i \frac{g_i^{(0)}}{M^{[\mathcal{O}_i]-4}} \Lambda^{[\mathcal{O}_i]} = \sum_i g_i^{(0)} \Lambda^4 \left( \frac{\Lambda}{M} \right)^{[\mathcal{O}_i]-4} \quad (238)$$

次元4のオペレーターと比較して、“irrelevant” operators の寄与は非常に大きくなり、しばしばコントロールすることができない“繰り込み不可能”な振る舞いを惹き起こす。

⇔ オペレーターの個数が当初は有限であっても、それを挿入したプロセスから無限個の高い次元のオペレーターが生成されてしまう。⇒ 後述

- たちのよい場の理論を作るには、ミクロな理論においてはそれらの“irrelevant”なオペレーターを除外する必要がある。

それから得られる 低エネルギー有効作用においては、それらのオペレーターは生成されるが、その係数は計算可能であり、通常無視できるほど小さい。

□ 繰り込み可能な相互作用 :

ローレンツ不変性を考慮すると、スピン  $0, \frac{1}{2}, 1$  を持つ場の許される (繰り込み可能な) 相互作用を列挙することができる<sup>6</sup>。

全微分と 内部対称性の添え字を除いて、許される相互作用は以下のようになる。

[O] = 2:

$$\phi^2, \quad A^2 \quad (239)$$

[O] = 3:

$$\phi^3, \quad \phi \partial \cdot A, \quad \bar{\psi} \psi, \quad \psi \gamma_5 \psi, \quad (240)$$

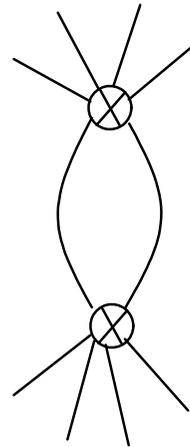
[O] = 4:

$$\begin{aligned} &\phi^4, \quad \partial \phi \cdot \partial \phi, \quad (A^2)^2, \quad \phi^2 A^2, \quad \phi^2 \partial \cdot A, \quad A^2 \partial \cdot A \\ &(\partial \cdot A)^2, \quad \bar{\psi} \psi \phi, \quad \bar{\psi} \gamma_5 \psi \phi, \quad \bar{\psi} \gamma^\mu \psi A_\mu, \quad \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma_5 \psi A_\mu \end{aligned} \quad (241)$$

<sup>6</sup>スピン  $3/2$  及び  $2$  を持つ場は重力理論と関係しており、場の理論のレベルでは摂動論的に繰り込み不可能であることが知られている。

繰り込み不可能な相互作用の例:

$\phi^6$  相互作用  $\Rightarrow$  1ループで8点関数が発散し、 $\log(\Lambda/m) \times \phi^8$  なる項が生成される。



$\phi^8$  相互作用があるとさらに10点関数が発散。

これが繰り返され、結局理論は有限の数の結合定数の調整では制御できなくなり、繰り込み不可能となる。

## 4 対称性の原理

### 4.1 Noether の定理

### 4.2 Schwinger の作用原理

#### 4.1 Noether の定理

系の対称性 (変換に対する不変性) の帰結を表現する基本定理:  
Emmy Noether (1918)

基本定理 : 一般の変換に対する作用の不変性から従う帰結  
応用

第一定理: 変換が有限次元の群の作用である場合

第二定理: 変換が無限次元の群 (ゲージ群) の作用である場合

□ 基本定理 :

一種類の場  $\phi(x)$  がある場合: (複数の場がある場合への拡張は容易。)

作用の一般形を次の形に書く<sup>1</sup> :

$$S = \int_{\Omega} [dx] \mathcal{L}(\phi(x), \partial_{\mu}\phi(x)) \quad (1)$$

$[dx]$  = 積分測度       $\Omega$  = 積分領域

一般的な無限小変換を考える

$$x^{\mu} \rightarrow y^{\mu} = x^{\mu} + \Delta x^{\mu}, \quad \Omega \rightarrow \Omega' \quad (2)$$

$$\phi(x) \rightarrow \phi'(y) = \phi(x) + \Delta\phi(x) \quad (3)$$

$\phi'$  は 関数形の変化 を表す。

$\Delta$  は total variation を表す記号。

(特別な場合:  $\phi(x)$  が “スカラー”  $\Leftrightarrow \Delta\phi = 0$ 。 内部対称性の場合:  
 $\Delta x^{\mu} = 0$ 。)

---

<sup>1</sup>高階の微分、 $\partial_{\mu}\partial_{\nu}\phi$  等、を許す場合への拡張は演習。

**Lie 変分** = 同一座標点  $x$  での場の形の変化:  $\bar{\delta}\phi(x) = \phi'(x) - \phi(x)$

(3) の左辺:  $\phi'(x + \Delta x) \simeq \phi'(x) + \Delta x^\mu \partial_\mu \phi(x)$

$$\Rightarrow \bar{\delta}\phi(x) = \phi'(x) - \phi(x) = \Delta\phi(x) - \Delta x^\mu \partial_\mu \phi(x) \quad (4)$$

∴ 全変分と Lie 変分の関係

$$\Delta\phi(x) = \bar{\delta}\phi(x) + \Delta x^\mu \partial_\mu \phi(x) \quad (5)$$

**Lagrange 微分:** Lagrange 微分  $\delta\mathcal{L}/\delta\phi$  を次のように定義:

$$\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\phi} \equiv \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} - \partial_\mu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\phi} \quad (6)$$

$\phi$  が運動方程式を満たす  $\Leftrightarrow$  Lagrange 微分がゼロ

Noetherの基本定理:

1. 基本恒等式: 上記の一般的な無限小変換のもとでの作用の変化は次のように書ける

$$S' - S = \int_{\Omega} [dx] \left( \partial_{\mu} j^{\mu} + \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \phi} \bar{\delta} \phi \right) \quad (7)$$

ここで current  $j^{\mu}$  は

$$j^{\mu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_{\mu} \phi} \bar{\delta} \phi + \Delta x^{\mu} \mathcal{L} \quad (8)$$



2. 基本定理: 上記の変換が系の対称変換である場合、すなわちそれに対して作用が任意の領域  $\Omega$  において不変である場合、局所的に

$$\partial_{\mu} j^{\mu} + \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \phi} \bar{\delta} \phi = 0 \quad (9)$$

が成り立つ。

さらに、運動方程式を満たす配位に対しては、カレントの保存  $\partial_\mu j^\mu = 0$  が成り立ち、space-like surface  $\Sigma$  上の積分で定義される charge が保存される：

$$0 = \int_{\Sigma_1}^{\Sigma_2} \partial_\mu j^\mu = \int_{\Sigma_2} j^\mu d\Sigma_\mu - \int_{\Sigma_1} j^\mu d\Sigma_\mu \quad (10)$$

$$\therefore Q(\Sigma_1) = Q(\Sigma_2), \quad Q(\Sigma) \equiv \int_{\Sigma} j^\mu d\Sigma_\mu \quad (11)$$

特に、 $\Sigma$  を  $t = \text{一定}$  の面にとればそれに直行するベクトル  $d\Sigma_\mu$  は  $(d^3x, 0, 0, 0)$  となり、 $Q = \int d^3x j^0$  と表される。

- 明らかに、基本定理は基本恒等式から直ちに従う。
- この段階での  $j^\mu$  はまだ変換の parameter を含んでいることに注意。

## 基本恒等式の証明:

変換後の作用は

$$S' = \int_{\Omega'} [dy] \mathcal{L}(\phi'(y), \partial_\mu \phi'(y)) \quad (12)$$

まず、場の変化を  $y$  での Lie 変分で書き表す:  $\phi'(y) = \phi(y) + \bar{\delta}\phi(y)$ 。  
微小量の一次のオーダーまでとると

$$S' = \int_{\Omega'} [dy] \mathcal{L}(\phi(y), \partial_\mu \phi(y)) + \int_{\Omega} [dx] \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \bar{\delta}\phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} \partial_\mu \bar{\delta}\phi \right) \quad (13)$$

第一項の積分領域  $\Omega'$  をもとに戻すために、 $x$  での表式に書き換える:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega'} [dy] \mathcal{L}[y] &= \int_{\Omega} \left| \frac{\partial y}{\partial x} \right| [dx] \mathcal{L}[x + \Delta x] \\ &= \int_{\Omega} \left| \frac{\partial y}{\partial x} \right| [dx] (\mathcal{L}[x] + \Delta x^\mu \partial_\mu \mathcal{L}) \end{aligned} \quad (14)$$

( $\partial_\mu \mathcal{L}$  は、 $\mathcal{L}$  の全ての  $x$  依存性についての微分。)

ヤコビアン の 計算:

行列  $M$  を  $M_{\mu}^{\nu} \equiv \partial_{\mu} \Delta x^{\nu}$  (=微小) と定義すると

$$\left| \frac{\partial y}{\partial x} \right| = \det |1 + M| = \exp \operatorname{Tr} \ln(1 + M) \simeq \exp \operatorname{Tr} M \simeq 1 + \partial_{\mu} \Delta x^{\mu}$$

$$\therefore [dy] = [dx](1 + \partial_{\mu} \Delta x^{\mu}) \quad (15)$$

これらを代入すると

$$\begin{aligned} S' &= \int_{\Omega} [dx](1 + \partial_{\rho} \Delta x^{\rho}) \left( \mathcal{L} + \Delta x^{\mu} \partial_{\mu} \mathcal{L} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \bar{\delta} \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_{\mu} \phi} \partial_{\mu} \bar{\delta} \phi \right) \\ &= \int_{\Omega} [dx] \left[ \mathcal{L} + \partial_{\mu} (\Delta x^{\mu} \mathcal{L}) + \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \phi} \bar{\delta} \phi + \partial_{\mu} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_{\mu} \phi} \bar{\delta} \phi \right) \right] \\ &= \int_{\Omega} [dx] \left[ \mathcal{L} + \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \phi} \bar{\delta} \phi + \partial_{\mu} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_{\mu} \phi} \bar{\delta} \phi + \Delta x^{\mu} \mathcal{L} \right) \right] \end{aligned} \quad (16)$$

第 1 項は  $S$  を与えるから、これを引くと、基本恒等式 (7) を得る。 //

Remark 1: ヤコビアン計算の幾何学的理解:

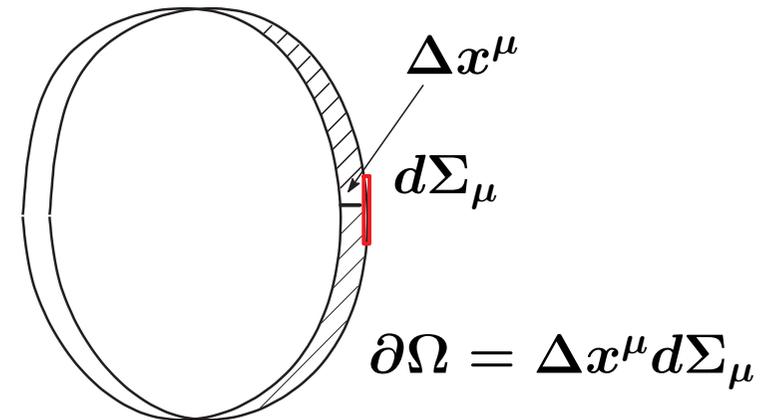
(13)の第一項と  $S$  の差をとると

$$\int_{\Omega'} [dy] \mathcal{L}[y] - \int_{\Omega} [dx] \mathcal{L}[x] \quad (17)$$

$\partial\Omega = \Omega' - \Omega$  の部分の体積は  $\Delta x^\mu d\Sigma_\mu$   
 従って、上記の差は Stokes の定理を用いて

$$\int_{\partial\Omega} d\Sigma_\mu \Delta x^\mu \mathcal{L}[x] = \int_{\Omega} [dx] \partial_\mu (\Delta x^\mu \mathcal{L}) \quad (18)$$

これは正しく  $\Delta x^\mu$  に依存する部分の寄与  
 を与えている。



Remark 2:  $S$ を不変にしない任意の変換の場合:

基本恒等式はこの場合でも成立。運動方程式を満たす配位を考え、領域を space-like な面  $\Sigma_1, \Sigma_2$  に囲まれた部分とすると

$$\Delta S = \int_{\Sigma_1}^{\Sigma_2} [dx] \partial_\mu j^\mu = G[\Sigma_2] - G[\Sigma_1] \quad (19)$$

$$\text{ここで } G[\Sigma] = \int_{\Sigma} j^\mu d\Sigma_\mu = \text{Charge} \quad (20)$$

この式は次節で述べる Schwinger の作用原理の基本式となる。

□ 適用例 1: 1 粒子の場合のエネルギー保存 :

Lagrangian  $L$  が時間  $t$  に陽に依らないなら (すなわち  $L = L(x(t), \dot{x}(t))$ )  
作用は時間並進

$$t \rightarrow t' = t + \epsilon \quad (21)$$

に対して不変。

粒子の座標  $x(t)$  は並進に対してスカラー  $\Leftrightarrow \Delta x = 0$

⇒ Lie 変分

$$\bar{\delta}x = 0 - \epsilon \partial_t x = -\epsilon \dot{x} \quad (22)$$

基本定理を適用 ⇒ 次の“カレント”が保存

$$j = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \bar{\delta}x + \epsilon L = p(-\epsilon \dot{x}) - \epsilon L = \epsilon(L - p\dot{x}) = -\epsilon H \quad (23)$$

$\epsilon$  は任意 ⇒  $H$  が保存

□ 適用例 2:  $U(1)$  対称性をもつ複素スカラー場理論における電荷保存 :

$\phi(x)$  = 複素スカラー場

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi^* - m^2 |\phi|^2 - \frac{\lambda}{4} |\phi|^4 \quad (24)$$

$\mathcal{L}$  は次の global な  $U(1)$  変換に対して不変

$$\phi'(x) = e^{-ie\Lambda} \phi(x) \quad (25)$$

$\Lambda$  を無限小とすれば

$$\Delta\phi(x) = \bar{\delta}\phi(x) = -ie\Lambda\phi(x) \quad (26)$$

$$\Delta\phi(x)^* = \bar{\delta}\phi(x)^* = ie\Lambda\phi(x)^* \quad (27)$$

基本定理を適用  $\Rightarrow$  次のカレントが保存

$$\begin{aligned} j^\mu &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\phi}\bar{\delta}\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\phi^*}\bar{\delta}\phi^* = \frac{1}{2}\partial^\mu\phi^*(-ie\Lambda\phi) + \frac{1}{2}\partial^\mu\phi(ie\Lambda\phi^*) \\ &= \frac{ie}{2}\phi^* \overleftrightarrow{\partial}^\mu \phi \Lambda \end{aligned} \quad (28)$$

$\Lambda$  は任意  $\Rightarrow$  有限な保存カレントとして

$$J^\mu = \frac{ie}{2}\phi^* \overleftrightarrow{\partial}^\mu \phi \quad (29)$$

を得る。

□ Noetherの第一定理：

作用を不変にする変換は、変換群  $G$  をなす。

$$\dim G = \begin{cases} \text{finite} : & \text{global sym} \\ \infty : & \text{local or gauge sym} \end{cases} \quad (30)$$

Noetherの第一定理 =  $G$  が有限な Lie 群の場合に基本定理を適用したもの。

$X_a$  :  $x^\mu$  に対する  $G$  の生成子

$T_a$  :  $\phi$  に対する  $G$  の生成子

$\epsilon^a$  : 無限小の global 変換の parameter

$$\Delta x^\mu = \epsilon^a X_a x^\mu = \epsilon^a (\xi_a^\nu(x) \partial_\nu) x^\mu = \xi_a^\mu(x) \epsilon^a \quad (31)$$

$$\Delta \phi = \epsilon^a T_a \phi \quad (32)$$

$\phi$  は一般に多成分場、 $T_a$  は行列だが、その成分の添え字は省略する。

Lie変分は

$$\bar{\delta}\phi = \Delta\phi - \Delta x^\mu \partial_\mu \phi = (T_a\phi - \xi_a^\mu \partial_\mu \phi)\epsilon^a \quad (33)$$

この変換に対して系が不変ならば、基本定理に代入し、 $\epsilon^a$ をはずすと次の有限な関係式を得る：

Noetherの第一定理

$$\partial_\mu j_a^\mu = -\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\phi}(T_a\phi - \xi_a^\mu \partial_\mu \phi) \quad (34)$$

$$j_a^\mu = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\phi}(T_a\phi - \xi_a^\mu \partial_\mu \phi) + \xi_a^\mu \mathcal{L} \quad (35)$$

運動方程式が成り立てば、currents  $j_a^\mu$  は保存する。

Remark 1:

$\mathcal{L}$  = 上記の変換に対して不変な Lagrange 密度。

$\mathcal{K}$  = 対称性を破る付加項  $\Rightarrow$  全 Lagrange 密度 =  $\mathcal{L} + \mathcal{K}$   
系全体の運動方程式が満たされているとすると、

$$\frac{\delta(\mathcal{L} + \mathcal{K})}{\delta\phi} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\phi} = -\frac{\delta\mathcal{K}}{\delta\phi} \quad (36)$$

$\mathcal{L}$  の部分に対しては Noether の定理 (34) が成り立つから

$$\begin{aligned} \partial_\mu j_a^\mu &= -\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\phi} (T_a\phi - \xi_a^\mu \partial_\mu\phi) \\ &= \frac{\delta\mathcal{K}}{\delta\phi} (T_a\phi - \xi_a^\mu \partial_\mu\phi) \neq 0 \end{aligned} \quad (37)$$

従って、current の保存則は付加項により一定の規則で破れる。これを、“partial conservation” と呼ぶ。

Remark 2:

- 内部対称性の場合:  $\Delta x^\mu = 0 \Rightarrow$  カレントは簡単な形  $j^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} \bar{\delta} \phi$ .  
このとき、基本定理から Lagrangian 自体が不変 であることが言える。

証明:

$$\begin{aligned} \bar{\delta} \mathcal{L} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \bar{\delta} \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} \partial_\mu \bar{\delta} \phi = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \phi} \bar{\delta} \phi + \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} \bar{\delta} \phi \right) \\ &\stackrel{j^\mu \text{の形}}{=} \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \phi} \bar{\delta} \phi + \partial_\mu j^\mu \stackrel{\text{基本定理}}{=} 0 \end{aligned} \quad (38)$$

- 逆に言えば、 $\Delta x^\mu \neq 0$  の一般の場合、Lagrangian の Lie variation で不変にならない部分は  $\Delta x^\mu \mathcal{L}$  項を与える。実際

$$\begin{aligned} \bar{\delta} \mathcal{L} &= \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \phi} \bar{\delta} \phi + \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} \bar{\delta} \phi \right) \\ &= \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \phi} \bar{\delta} \phi + \partial_\mu j^\mu - \partial_\mu (\Delta x^\mu \mathcal{L}) = -\partial_\mu (\Delta x^\mu \mathcal{L}) \end{aligned} \quad (39)$$

ここで、 $j^\mu$  は基本定理に現れる保存カレント  $(\partial \mathcal{L} / \partial \partial_\mu \phi) \bar{\delta} \phi + \Delta x^\mu \mathcal{L}$ 。

Remark 3:  $\epsilon^a \rightarrow \epsilon^a(x)$  のlocal化を利用して保存カレントを求める方法

1. 内部対称性の場合:

Lagrangian はもはや不変でなくなるが、それは  $\partial_\mu \phi$  の変換において  $\epsilon^a$  をlocal化したことから余分に生ずる項、すなわち  $T_a \phi \partial_\mu \epsilon^a$  のためであるから

$$\bar{\delta} \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} T_a \phi \partial_\mu \epsilon^a = j_a^\mu \partial_\mu \epsilon^a \quad (40)$$

$\partial_\mu \epsilon^a$  の係数として  $j_a^\mu$  が読み取れる。

2.  $\Delta x^\mu = \xi_a^\mu \epsilon^a \neq 0$  の場合:

恒等式(39)から出発。 $\partial_\mu j^\mu$  を  $\partial_\mu \epsilon^a$  を含む部分と含まない部分に次のように分けられる:

$$\partial_\mu j^\mu = \partial_\mu j_a^\mu \epsilon^a + j_a^\mu \partial_\mu \epsilon^a \quad (41)$$

ここで  $j_a^\mu$  は(35)で与えた保存カレント

$$j_a^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} (T_a \phi - \xi_a^\nu \partial_\nu \phi) + \xi_a^\mu \mathcal{L} \quad (42)$$

基本方程式  $(\delta\mathcal{L}/\delta\phi)\bar{\delta}\phi + \partial_\mu j_a^\mu \epsilon^a = 0$  を用いると、(39) は次のように書き換えられる

$$\begin{aligned}
 \bar{\delta}\mathcal{L} &= \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\phi}\bar{\delta}\phi + \underbrace{\partial_\mu j^\mu}_{\partial_\mu j_a^\mu \epsilon^a + j_a^\mu \partial_\mu \epsilon^a} - \partial_\mu(\Delta x^\mu \mathcal{L}) \\
 &= j_a^\mu \partial_\mu \epsilon^a - \partial_\mu(\underbrace{\Delta x^\mu}_{\xi_a^\mu \epsilon^a(x)} \mathcal{L}) \\
 &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\phi}(T_a\phi - \xi_a^\nu \partial_\nu\phi) \partial_\mu \epsilon^a + \xi_a^\mu \mathcal{L} \partial_\mu \epsilon^a - \partial_\mu(\xi_a^\mu \epsilon^a \mathcal{L}) \\
 &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\phi}(T_a\phi - \xi_a^\nu \partial_\nu\phi) \partial_\mu \epsilon^a - \partial_\mu(\xi_a^\mu \mathcal{L}) \epsilon^a \\
 &= j_a^{\mu,0} \partial_\mu \epsilon^a - \partial_\mu j_a^{\mu,1} \epsilon^a \tag{43}
 \end{aligned}$$

まとめ： 保存カレント  $j_a^\mu$  は  $\bar{\delta}\mathcal{L}$  の  $\partial_\mu \epsilon^a$  および  $\epsilon^a$  に比例する部分を読み取ることにより次のように求められる (符号に注意)

$$\bar{\delta}\mathcal{L} = j_a^{\mu,0} \partial_\mu \epsilon^a - \partial_\mu j_a^{\mu,1} \epsilon^a \quad (44)$$

$$j_a^\mu = j_a^{\mu,0} + j_a^{\mu,1} \quad (45)$$

□ 適用例: 1粒子の場合のエネルギー保存:

$$L = \frac{1}{2} \dot{x}^2 - V(x), \quad \bar{\delta}x = -\epsilon \dot{x} \quad (46)$$

ここで  $\epsilon \Rightarrow \epsilon(t)$  として  $\bar{\delta}\mathcal{L}$  を計算

$$\begin{aligned} \bar{\delta}L &= \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \bar{\delta}\dot{x} + \frac{\partial L}{\partial x} \bar{\delta}x = \dot{x} \frac{d}{dt} (-\epsilon \dot{x}) + \epsilon \dot{x} \frac{dV}{dx} = -\dot{\epsilon} \dot{x}^2 - \epsilon \dot{x} \ddot{x} + \epsilon \dot{x} \frac{dV}{dx} \\ &= \dot{\epsilon} \underbrace{(-\dot{x}^2)}_{j^0} - \epsilon \frac{d}{dt} \underbrace{\left( \frac{1}{2} \dot{x}^2 - V \right)}_{j^1} \end{aligned} \quad (47)$$

従って、求める保存カレントは  $j^0 + j^1 = -\frac{1}{2} \dot{x}^2 - V = -H$ 。

□ Noetherの第二定理 :

局所ゲージ変換に対して不変な理論に基本定理を適用

ゲージ変換の形:  $\epsilon^a(x)$  を局所パラメーターとして、一般的な次の形の total variation を扱う。

$$\Delta\phi = A_a(x, \phi, \partial\phi)\epsilon^a(x) + B_a^\mu(x, \phi, \partial\phi)\partial_\mu\epsilon^a(x) \quad (48)$$

$$\Delta x^\mu = C_a^\mu(x)\epsilon^a(x) \quad (49)$$

Lie 変分は  $\bar{\delta}\phi = \Delta\phi - \Delta x^\mu\partial_\mu\phi$ 。これは  $\Delta\phi$  と同タイプなので、次のように書く

$$\bar{\delta}\phi = a_a(x, \phi, \partial\phi)\epsilon^a(x) + b_a^\mu(x, \phi, \partial\phi)\partial_\mu\epsilon^a(x) \quad (50)$$

$$a_a = A_a - \partial_\mu\phi C_a^\mu, \quad b_a^\mu = B_a^\mu \quad (51)$$

- 通常の(非可換)ゲージ変換は( $\Delta x^\mu = 0$ とした)このタイプ
- 特にゲージ場の変換に対しては  $B_a^\mu$  項はゼロでない。

---

例: Maxwell 理論

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (52)$$

$$\text{ゲージ変換 } \bar{\delta}A_\mu = \partial_\mu\Lambda \quad (53)$$

$$\Leftrightarrow b_\mu^\nu = \delta_\mu^\nu, \quad \epsilon = \Lambda, \quad a = 0 \quad (54)$$

---

基本定理の適用

$$\partial_\mu j^\mu + \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\phi}(a_a\epsilon^a + b_a^\mu\partial_\mu\epsilon^a) = 0 \quad (55)$$

$$j^\mu = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\phi}(a_a\epsilon^a + b_a^\rho\partial_\rho\epsilon^a) + \Delta x^\mu\mathcal{L} \quad (56)$$

- 運動方程式を満たす配位に対して、 $j^\mu$  が保存。  
但し、 $j^\mu$  はまだ local parameter  $\epsilon^a(x)$  を含んでいる。
- $\epsilon^a(x)$  の特別な場合として、 $x$  に依らない global な変換もある。その場合には、上記の式で  $\partial_\mu\epsilon^a = 0$  とした関係式が成り立つ。

## 基本定理の有用な帰結

### 1. Localな恒等式の導出

(55) の第3項を書き換える：

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \phi} b_a^\mu \partial_\mu \epsilon^a = \partial_\mu \left( \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \phi} b_a^\mu \epsilon^a \right) - \partial_\mu \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \phi} b_a^\mu \epsilon^a - \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \phi} \epsilon^a \partial_\mu b_a^\mu \quad (57)$$

⇒ (55) は次の形になる：

$$\left( a_a \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \phi} - \partial_\mu \left( \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \phi} b_a^\mu \right) \right) \epsilon^a = -\partial_\mu \left( j^\mu + b_a^\mu \epsilon^a \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \phi} \right) \quad (58)$$

右辺は total divergence。

領域  $\Omega$  の boundary  $\partial\Omega$  上で  $\epsilon^a(x) = \partial_\mu \epsilon^a(x) = 0$  となるように parameter  $\epsilon^a(x)$  をとる。 ⇒ (56) より境界上で  $j^\mu = 0$

(58) を  $\Omega$  で積分すると、右辺はゼロとなり

$$\int_{\Omega} [dx] \left( a_a \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \phi} - \partial_{\mu} \left( \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \phi} b_a^{\mu} \right) \right) \epsilon^a = 0 \quad (59)$$

$\Omega$  の内部では  $\epsilon^a(x)$  はまだ任意  $\Rightarrow$  次の local な関係式を得る：

$$\partial_{\mu} \left( \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \phi} b_a^{\mu} \right) = a_a \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \phi} \quad (60)$$

- 運動方程式は用いていないので恒等式
- これは “covariant conservation” の形に書き換え可能。

$b_a^{\mu}$  の逆行列  $h_{\mu}^b$  を  $b_a^{\mu} h_{\mu}^b = \delta_a^b$  と定義

$a_a = a_b \delta_a^b = (a_b h_{\mu}^b) b_a^{\mu} \Rightarrow$  (60) は次の形に書ける：

$$\nabla_{\mu} \left( b_a^{\mu} \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \phi} \right) = 0, \quad \nabla_{\mu} \equiv \partial_{\mu} - a_b h_{\mu}^b \quad (61)$$

注: “covariant conservation” の式は、恒等式を書き換えただけであり、物理量の保存を表しているのではない。

---

例1. Maxwell理論の場合: (60)を書き下すと

$$\partial_\rho (\delta_\nu^\rho \partial_\mu F^{\mu\nu}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \partial_\mu \partial_\nu F^{\mu\nu} = 0 \quad (62)$$

これは確かに恒等式。

---

例2. Scalar 電気力学の場合:  $\phi = \text{complex scalar}$

Lagrangian

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} (D_\mu \phi)^* D^\mu \phi \quad (63)$$

$$D_\mu \equiv \partial_\mu + ieA_\mu \quad (64)$$

ゲージ変換

$$\bar{\delta} A_\mu = \partial_\mu \Lambda, \quad \bar{\delta} \phi = -ie\Lambda \phi \quad (65)$$

⇔ ゲージ変換の parameters

$$a_\mu = 0, \quad b_\mu^\nu = \delta_\mu^\nu \quad (66)$$

$$a_\phi = -ie\phi, \quad b_\phi^\nu = 0 \quad (67)$$

$$a_{\phi^*} = ie\phi^*, \quad b_{\phi^*}^\nu = 0 \quad (68)$$

Lagrange 微分

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta A^\nu} = \partial^\mu F_{\mu\nu} - J_\nu \quad (69)$$

$$\text{ここで } J_\nu = \frac{i}{2} e (\phi^* \overleftrightarrow{\partial}_\nu \phi) - e^2 A_\nu \phi^* \phi \quad (70)$$

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \phi} = -\frac{1}{2} (D^\mu D_\mu \phi)^* \quad (71)$$

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \phi^*} = -\frac{1}{2} (D^\mu D_\mu \phi) \quad (72)$$

(60) 式的具体形 :

$$\begin{aligned} 0 &= -ie\phi \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \phi} + ie\phi^* \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \phi^*} - \partial^\nu \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta A^\nu} \\ &= -ie\phi \left( -\frac{1}{2}(D^\mu D_\mu \phi)^* \right) + ie\phi^* \left( -\frac{1}{2}(D^\mu D_\mu \phi) \right) \\ &\quad - (\partial^\mu \partial^\nu F_{\mu\nu} - \partial^\nu J_\nu) \end{aligned} \tag{73}$$

- これが実際恒等式を与えていることは容易に確かめることができる。
- 恒等式  $\partial^\mu \partial^\nu F_{\mu\nu} = 0$  を適用したあと、 $\phi$  の運動方程式  $D^\mu D_\mu \phi = 0$  を課す  $\Rightarrow$  カレントの保存則  $\partial^\nu J_\nu = 0$
- $J_\nu$  は global な変換に対する不変性から導かれる Noether current に一致

## 2. 基本定理のさらなる帰結

Localな恒等式(60)を基本定理(58)に代入。⇒ (58)の左辺 = 0  
⇒ 保存則

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_\mu \left( j^\mu + b_a^\mu \epsilon^a \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \phi} \right) \\ &= \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} (a_a \epsilon^a + b_a^\nu \partial_\nu \epsilon^a) + C_a^\mu \epsilon^a \mathcal{L} + b_a^\mu \epsilon^a \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \phi} \right) \\ &= \partial_\mu \left( J_a^\mu \epsilon^a + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} b_a^\nu \partial_\nu \epsilon^a + b_a^\mu \epsilon^a \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \phi} \right) \end{aligned} \quad (74)$$

ここで

$$J_a^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} a_a + C_a^\mu \mathcal{L} = \text{通常} \text{の Noether カレント} \quad (75)$$

さらに運動方程式  $\delta\mathcal{L}/\delta\phi = 0$  を課すと

$$\begin{aligned}
 0 &= \partial_\mu \left( J_a^\mu \epsilon^a + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\phi} b_a^\nu \partial_\nu \epsilon^a \right) \\
 &= (\partial_\mu J_a^\mu) \epsilon^a + \left( J_a^\mu + \partial_\nu \left( \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\nu\phi} b_a^\mu \right) \right) \partial_\mu \epsilon^a + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\phi} b_a^\nu \partial_\mu \partial_\nu \epsilon^a \quad (76)
 \end{aligned}$$

$\epsilon^a(x)$  は任意  $\Rightarrow$  3つの関係式が同時に得られる :

$$(i) \quad \partial_\mu J_a^\mu = 0 \quad (77)$$

$$(ii) \quad J_a^\mu = -\partial_\nu \left( \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\nu\phi} b_a^\mu \right) \quad (78)$$

$$(iii) \quad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\phi} b_a^\nu \partial_\mu \partial_\nu \epsilon^a = 0 \quad (79)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\phi} b_a^\nu \text{ は } \mu, \nu \text{ に関して反対称} \quad (80)$$

(iii) の反対称テンソルを

$$\mathcal{F}_a^{\mu\nu} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\nu \phi} b_a^\mu \quad (81)$$

と置くと (ii) は

$$J_a^\mu = -\partial_\nu \mathcal{F}_a^{\mu\nu} \quad (82)$$

$\mathcal{F}_a^{\mu\nu}$  の反対称性  $\Rightarrow$  (i) は自明。

まとめ:

Local 対称性の場合には global 対称性によって保存するカレント  $J_a^\mu$  は必ず反対称テンソル  $(\partial \mathcal{L} / \partial \partial_\nu \phi) b_a^\mu$  の divergence で書け、自明に保存する形になる。

$\Rightarrow$  Gauss の定理により保存 charge は 2 次元表面積分で書ける :

$$Q_a = \int_V d^3x J_a^0 = - \int d^3x_V \partial_i \mathcal{F}_a^{i0} = \int_{\partial V} dS \hat{n}_i \mathcal{F}_a^{0i} \quad (83)$$

$\Leftrightarrow$  Gauss の法則の一般化

---

演習 1. Maxwell理論およびscalar電気力学の場合に、具体的にこれを確かめよ。

---

## 4.2 Schwingerの量子作用原理

- 古典解析力学のHamilton-Jacobi形式の量子版。
- 量子化の規則と量子的なネーター (Noether) の定理を統一的に得ることができる。

### 4.2.1 粒子系に対する量子作用原理

□ 古典力学の Hamilton-Jacobi形式の復習 :

$q_k(t)_{k=1\sim n}$ :  $n$  粒子に対する一般化された座標  
奇跡  $C$  に沿った古典的な作用

$$S_{21}[C] = \int_{t_1}^{t_2} dt L(q_k, \dot{q}_k, t) \quad (84)$$

- 端点を固定して変分  $\delta q_k$  を行う  $\Rightarrow$  運動方程式

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = 0 \quad (85)$$

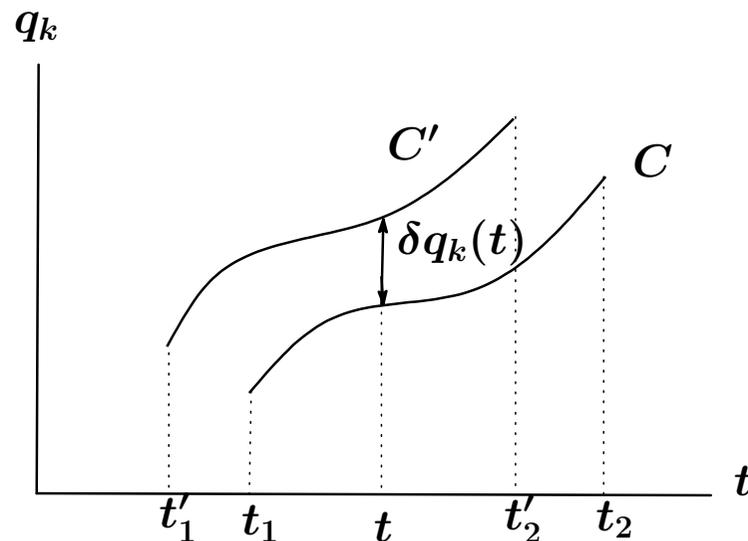
- 端点の変化も許して、二つの隣接する軌跡  $C$  と  $C'$  を考える

$$C : \quad q_k(t), \quad t_1 \leq t \leq t_2$$

$$C' : \quad q'_k(t) = q_k(t) + \delta q_k(t), \quad t'_1 \leq t \leq t'_2$$

$$t'_i = t_i + \Delta t_i, \quad i = 1, 2$$

$\Delta t_i$  及び  $\delta q_k$  はどちらも無限小。



端点の差を次のように定義:

$$\begin{aligned}
 \Delta q_k(t_i) &\equiv q'_k(t'_i) - q_k(t_i) \\
 &= q'_k(t'_i) - [q_k(t_i) + \delta q_k(t_i)] + \delta q_k(t_i) \\
 &= q'_k(t'_i) - q'_k(t_i) + \delta q_k(t_i) \\
 &= \dot{q}'_k \Delta t_i + \delta q_k(t_i) \simeq \dot{q}_k \Delta t_i + \delta q_k(t_i)
 \end{aligned} \tag{86}$$

$C$  と  $C'$  に沿った作用を比較する。 $C'$  に沿った作用は、

$$S_{21}[C'] = \int_{t'_1}^{t'_2} dt L' = \int_{t'_1}^{t_1} + \int_{t_1}^{t_2} + \int_{t_2}^{t'_2}$$

ここで  $L' \equiv L(q'_k, \dot{q}'_k, t)$

従って、無限小の量の一次までのオーダーで、作用の差は

$$\begin{aligned}
 \therefore \Delta S_{21} &= S_{21}[C'] - S_{21}[C] = \int_{t_1}^{t_2} (L' - L) dt + [L \Delta t]_1^2 \\
 &= \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right\} \delta q_k dt + \underbrace{\left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \delta q_k + L \Delta t \right]_1^2}_{\text{表面項}}
 \end{aligned}$$

表面項を (86) を用いて書き直し、運動量とハミルトニアン<sup>2</sup>の定義を使うと

$$\begin{aligned} \Delta S_{21} &= \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right\} \delta q_k dt + \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \Delta q_k - \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k - L \right) \Delta t \right]_1^2 \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right\} \delta q_k dt + [p_k \Delta q_k - H \Delta t]_1^2 \end{aligned} \quad (87)$$

従って、運動方程式を満たす軌跡に対して

$$\Delta S_{21} = [p_k \Delta q_k - H \Delta t]_1^2 \quad (88)$$

端点 1 を固定して、 $S$  を端点 2 の量の関数と見ると、これより古典力学の Hamilton-Jacobi 方程式を得る。

$$(i) \quad \frac{\partial S}{\partial q_k} = p_k, \quad (ii) \quad \frac{\partial S}{\partial t} + H = 0 \quad (89)$$

## □ 量子論に対する Schwinger の原理

上記の考察を量子力学の場合に拡張

- ◆ 古典的な“軌跡”  $\implies$  遷移振幅
- ◆ 時間並進、空間並進ならびに空間回転による軌跡の変化  $\implies$  状態ベクトルのユニタリ変換  $U = e^{iG}$

無限小変換

$$\begin{aligned} |\psi'\rangle &= U|\psi\rangle \simeq (1 + iG)|\psi\rangle \\ \therefore \Delta|\psi\rangle &= iG|\psi\rangle, \quad \Delta\langle\psi| = \langle\psi|(-iG) \end{aligned} \quad (90)$$

遷移振幅の変化

$$\begin{aligned} \Delta\langle q_k(t_2), t_2 | q_k(t_1), t_1 \rangle &= (\Delta\langle q_k(t_2), t_2 |) | q_k(t_1), t_1 \rangle + \langle q_k(t_2), t_2 | (\Delta | q_k(t_1), t_1 \rangle) \\ &= -\langle q_k(t_2), t_2 | iG(t_2) | q_k(t_1), t_1 \rangle + \langle q_k(t_2), t_2 | iG(t_1) | q_k(t_1), t_1 \rangle \\ &= \langle q_k(t_2), t_2 | \frac{1}{i} (G(t_2) - G(t_1)) | q_k(t_1), t_1 \rangle \end{aligned} \quad (91)$$

$G$ の端点での差  $\simeq$  表面項  $\Delta S_{21}$



**Schwinger の作用原理:**

作用  $S$  をハイゼンベルグ演算子  $q_k(t)$  の量子的汎関数と見なし、次の基本的関係式を原理として導入：

$$\Delta S_{21} = G(t_2) - G(t_1) \quad (92)$$

ここで  $\Delta S_{21}$  は(87)に現れたもの。

(92)の右辺はエルミート  $\Rightarrow$  作用もエルミート

- 通常の、 $[p, q] = -i$ の量子化条件の代わりにこれを原理として用いる

## Schwinger の作用原理の帰結

### 1. 量子論的運動方程式

(87) で与えられる  $\Delta S_{21}$  の形と比較

体積積分の部分がゼロ  $\Leftrightarrow$  量子論的な運動方程式が古典的な形に一致  
することを含んでいる<sup>2</sup>

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = 0 \quad (93)$$

### 2. 量子化の規則と Schrödinger 方程式

運動方程式が満たされる物理的な場合には、上記の原理は、次の演算子の間の関係式に帰着：

$$G(t) = p_k \Delta q_k - H \Delta t \quad (94)$$

<sup>2</sup>但し、量子論では演算子の順序が問題になるので、ここでは適当な順序が存在することを仮定している。

$G$  の定義に代入すると

$$\Delta|q_k, t\rangle = iG(t)|q_k, t\rangle = i(p_k \Delta q_k - H \Delta t)|q_k, t\rangle \quad (95)$$

⇒ 量子化の規則と Schrödinger 方程式

$$\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial q_k} |q_k, t\rangle = p_k |q_k, t\rangle \quad (96)$$

$$i \frac{\partial}{\partial t} |q_k, t\rangle = H |q_k, t\rangle \quad (97)$$

古典力学の Hamilton-Jacobi 形式の方程式の量子版になっている

### 3. 演算子の変換と正準量子化の規則

状態ベクトルのユニタリー変換に対応して、量子的演算子  $\mathcal{O}$  は次のように変換される：

$$\mathcal{O}' = U \mathcal{O} U^\dagger = (1 + iG) \mathcal{O} (1 - iG) \simeq \mathcal{O} + i[G, \mathcal{O}]$$

すなわち

$$\Delta \mathcal{O} = i[G, \mathcal{O}] \quad (98)$$

↓

正準量子化の規則の導出

$\mathcal{O} = q_j$ 、 $\Delta t = 0$ 、 $\Delta q_j = c$ 数、の場合を考える。⇒  $G = p_k \Delta q_k$

(98) は次の形をとる：

$$\Delta q_j = i[p_k \Delta q_k, q_j] = i[p_k, q_j] \Delta q_k \quad (99)$$

任意の変分  $\Delta q_j$  に対して成り立つためには、

$$i[p_k, q_j] = \delta_{kj} \quad (100)$$

#### 4. 対称変換の生成子としての $G$

変換で作用が不変  $\Delta S_{21} = 0 \stackrel{(92)\text{式}}{\iff} G(t_2) = G(t_1)$ :  $G$  は保存量  
同時に、(98)  $\Rightarrow G$  は対称変換の生成子  $\Leftrightarrow$  量子的Noetherの定理

例: 回転対称性

3次元空間での、 $q_k = x_k$  に対する  $i$  軸まわりの回転  
 $\lambda =$  無限小回転のパラメーター

$$\begin{aligned} x'_k &= x_k + \lambda \epsilon_{ijk} x_j \\ \therefore \Delta x_k &= \lambda \epsilon_{ijk} x_j \end{aligned} \quad (101)$$

作用がこの変換で不変  $\Rightarrow$  次の量は保存量かつ回転の生成子:

$$G \equiv \lambda J_i = p_k \Delta x_k = \lambda p_k \epsilon_{ijk} x_j = \lambda \epsilon_{ijk} x_j p_k \quad (102)$$

これは良く知られた角運動量演算子 //

## 5. Schwinger の作用原理の一般性

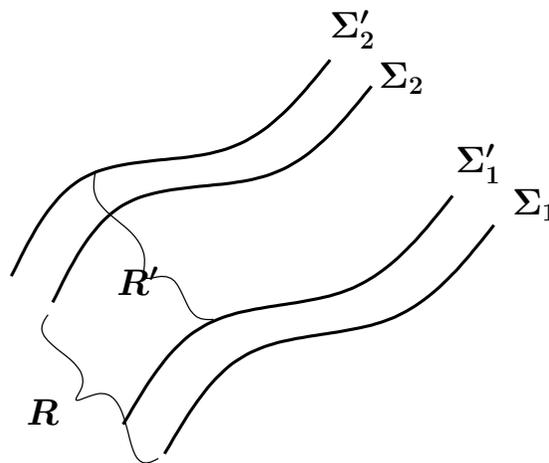
この原理はラグランジアンに依らない。⇒ 相互作用がある場合にも適用可能。

### 4.2.2 量子作用原理の場の理論への適用

場の集合:  $\phi_a(x)$

場の配位は space-like な面  $\Sigma$  上で指定。場の動力学は  $\Sigma$  に垂直な “時間” 方向への発展として記述。(Euclidean でも良い)

仮定: 場は空間的な無限遠で十分に早くゼロにいく ⇒ 表面項は効かず、部分積分が自由にできる。



二つのタイプの変分：

1. 座標の変化

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + \Delta x^{\mu} \quad (103)$$

2. 場の Lie 変分

$$\phi'_a(x) = \phi_a(x) + \delta\phi_a(x) \quad (104)$$

場の Lie 変分は面  $\Sigma$  上で定義されたエルミートな演算子  $G[\Sigma]$  で生成される：

$$\delta\phi_a(x) = i[G[\Sigma], \phi_a(x)] \quad (105)$$

$R$  = space-like な面  $\Sigma_1$  及び  $\Sigma_2$  を境界とする領域

$R'$  =  $R$  を座標変換 (103) で移したイメージ

Noether の基本定理の手順で作用の変化を計算

$$\Delta S = \int_R \left\{ \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_a} - \partial_{\mu} \frac{\mathcal{L}}{\partial \partial_{\mu} \phi_a} \right) \delta\phi_a + \partial_{\mu} \mathcal{J}^{\mu} \right\} d^n x \quad (106)$$

$$\mathcal{J}^{\mu} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_{\mu} \phi_a} \delta\phi_a + \mathcal{L} \Delta x^{\mu} = (\text{quantum}) \text{ current} \quad (107)$$

Gauss の定理

$$\int_R \partial_\mu \mathcal{J}^\mu d^n x = \int_{\Sigma_2} \mathcal{J}^\mu d\Sigma_\mu - \int_{\Sigma_1} \mathcal{J}^\mu d\Sigma_\mu \quad (108)$$

場の total variation  $\Delta\phi_a$

$$\Delta\phi_a(x) \equiv \phi'_a(x') - \phi_a(x) = \partial_\mu \phi_a(x) \Delta x^\mu + \delta\phi_a(x) \quad (109)$$

これを用いてカレントを書き換える

$$\begin{aligned} \mathcal{J}^\mu &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi_a} (\Delta\phi_a - \partial_\nu \phi_a \Delta x^\nu) + \mathcal{L} \Delta x^\mu \\ &= \pi_a^\mu \Delta\phi_a - (\pi_a^\mu \partial^\nu \phi_a - \eta^{\mu\nu} \mathcal{L}) \Delta x_\nu \\ &= \pi_a^\mu \Delta\phi_a - T^{\mu\nu} \Delta x_\nu \end{aligned} \quad (110)$$

ここで

$$\pi_a^\mu \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi_a} \quad (111)$$

$$\begin{aligned} T^{\mu\nu} &\equiv \pi_a^\mu \partial^\nu \phi_a - \eta^{\mu\nu} \mathcal{L} = \text{energy-momentum tensor} \\ &= \text{粒子の場合の Hamiltonian の一般化} \end{aligned} \quad (112)$$

Schwinger の量子作用原理を適用:

$$\Delta S = G[\Sigma_2] - G[\Sigma_1] \quad (113)$$

↓

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_a} - \partial_\mu \frac{\mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi_a} = 0 \quad (114)$$

$$G[\Sigma] = \int_\Sigma \mathcal{J}^\mu d\Sigma_\mu \quad (115)$$

□ (量子的)Noether の定理

$\Delta S = 0 \implies G$  は面  $\Sigma$  によらない  $\implies$  カレントが保存

$$\int_{\Sigma_2} \mathcal{J}^\mu d\Sigma_\mu = \int_{\Sigma_1} \mathcal{J}^\mu d\Sigma_\mu \quad (116)$$

$$\partial_\mu \mathcal{J}^\mu = 0 \quad (117)$$

特に  $\Sigma$  が平坦な時間一定の面の場合、保存チャージは通常形をとる:

$$Q = \int \mathcal{J}^0 dV \quad (118)$$

□ 場の量子化の規則の導出

$\Delta x^\mu = 0$  (従って  $\Delta \phi_a = \delta \phi_a$ ) の場合を考える。

$\Rightarrow \mathcal{J}^\mu = \pi_a^\mu \Delta \phi_a$ . 作用原理から<sup>3</sup>

$$\Delta \phi_a(\vec{x}, t) = i \left[ \underbrace{\int d^3 x' \pi_b^0(\vec{x}', t) \Delta \phi_b(\vec{x}', t)}_G, \phi_a(\vec{x}, t) \right] \quad (119)$$

ボゾンの場合: 交換子 -

フェルミオンの場合: 反交換子 +

を区別

$$\begin{aligned} \Delta \phi_a(\vec{x}, t) = & i \int d^3 x' \pi_b^0(\vec{x}', t) \left[ \Delta \phi_b(\vec{x}', t), \phi_a(\vec{x}, t) \right]_{\mp} \\ & \pm i \int d^3 x' \left[ \pi_b^0(\vec{x}', t), \phi_a(\vec{x}, t) \right]_{\mp} \Delta \phi_b(\vec{x}', t) \end{aligned}$$

---

<sup>3</sup>二点が同一の space-like な面に乗っていればよい。ここではその面を時間が一定の面にとっている。

これを満たすには

$$(*) \quad \left[ \Delta \phi_b(\vec{x}', t), \phi_a(\vec{x}, t) \right]_{\mp} = 0 \quad (120)$$

$$i \left[ \pi_b^0(\vec{x}', t), \phi_a(\vec{x}, t) \right]_{\mp} = \delta_{ab} \delta^3(\vec{x} - \vec{x}') \quad (121)$$

添え字  $a$  と  $b$  は任意。  $\Rightarrow$   $(*)$  より

$$\begin{aligned} 0 &= \left[ \Delta \phi_b(\vec{x}', t), \phi_a(\vec{x}, t) \right]_{\mp} + \left[ \phi_b(\vec{x}', t), \Delta \phi_a(\vec{x}, t) \right]_{\mp} \\ &= \Delta \left[ \phi_b(\vec{x}', t), \phi_a(\vec{x}, t) \right]_{\mp} \end{aligned} \quad (122)$$

これが任意の変分に対して成り立つためには

$$\left[ \phi_b(\vec{x}', t), \phi_a(\vec{x}, t) \right]_{\mp} = 0 \quad (123)$$

$\Delta \pi_a^0$  に対して同様の解析を繰り返すと、

$$\left[ \pi_b^0(\vec{x}', t), \pi_a^0(\vec{x}, t) \right] = 0 \quad (124)$$

□ Globalな内部対称性のある場合への適用

Globalな $U(1)$ 対称性を持つ系を考える。

$\phi_a$ を複素場とし、作用が次のglobalな位相の変換に対して不変とする：

$$\phi_a(x) \rightarrow \phi'_a(x) = e^{i\lambda} \phi_a(x), \quad \lambda = \text{実定数} \quad (125)$$

$$\therefore \Delta\phi_a(x) = i\lambda\phi_a(x) \quad (126)$$

保存生成子 (チャージ) は

$$G = \int d^3x \pi_a^0 \Delta\phi_a(x) = i\lambda \int d^3x \pi_a^0 \phi_a \equiv i\lambda Q \quad (127)$$

$\Rightarrow \pi_a^0$ は $\phi_a$ と逆のチャージを持つ

$$\Delta\pi_a^0(x) = i[G, \pi_a^0(x)] = -i\lambda\pi_a^0(x) \quad (128)$$

重要な点： この変換は、量子化の規則を導いた時に用いた一般的な (内部) 変分の特別な場合

$\Rightarrow$  この量子的な変換則は 自動的に量子化の規則と整合的になっている。

演習 2. このことを具体的に確かめよ。さらに、これを non-abelian global 変換  $\phi'_a = (e^{i\vec{\theta}\cdot\vec{T}})_{ab}\phi_b$  の場合に拡張せよ。

## 5 自由な量子スカラー場と2点関数

- ◆ 自由なスカラー場の量子化の整理
- ◆ 摂動論で基本となる幾つかの2点関数の構成

### 5.1 スカラー場の作用

エルミートなスカラー場の典型的な Lagrangian :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - m^2 \phi^2) - V(\phi) \quad (1)$$

$$= \frac{1}{2}(\dot{\phi}^2 - (\vec{\nabla} \phi)^2 - m^2 \phi^2) - V(\phi) \quad (2)$$

共役運動量と Hamiltonian density

$$\pi = \dot{\phi} \quad (3)$$

$$\mathcal{H} = \pi \dot{\phi} - \mathcal{L} = \frac{1}{2}(\pi^2 + (\vec{\nabla} \phi)^2 + m^2 \phi^2) + V(\phi) \quad (4)$$

場の同時刻交換関係 (ETCR): Schwinger の作用原理  $\Rightarrow$  相互作用をする場合にも次の形を採用すべきである

$$[\phi(\vec{x}, t), \pi(\vec{y}, t)] = i\delta(\vec{x} - \vec{y}), \quad \text{rest} = 0 \quad (5)$$

運動方程式

$$(\partial^2 + m^2)\phi + \frac{dV(\phi)}{d\phi} = 0 \quad (6)$$

- 相互作用があるため、この方程式の完全解を厳密に求めることはできない  $\Rightarrow$  ETCR を物理的なエネルギー-運動量の固有モードの生成消滅演算子で実現することは困難。

- 相互作用が弱い領域では、 $V(\phi)$  を自由場からの摂動として取り扱うことができる。

実際は、相互作用自体のために、結合定数がエネルギースケールによって変化

$\Rightarrow$  摂動が良い領域は実はその計算をして見たあとで初めて明らかになることに注意。(cf. QCD の例)

## 5.2 自由なスカラー場の量子化

### 5.2.1 Fourier モード展開

自由な Klein-Gordon 方程式は  $\phi$  について線形  $\Rightarrow$  完全な固有振動モード展開可能

□ 3次元 Fourier 変換を用いる方法 :

$\phi(\vec{x}, t)$  を 3次元 Fourier 変換

$$\phi(\vec{x}, t) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \phi(\vec{k}, t) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \quad (7)$$

KG 方程式に代入  $\Rightarrow \phi(\vec{k}, t)$  の一般解が求まる :

$$\begin{aligned} \frac{d^2\phi(\vec{k}, t)}{dt^2} + E_k^2\phi(\vec{k}, t) &= 0 \\ E_k &\equiv \sqrt{\vec{k}^2 + m^2} \\ \therefore \phi(\vec{k}, t) &= \phi_+(\vec{k})e^{-iE_k t} + \phi_-(\vec{k})e^{iE_k t} \end{aligned} \quad (8)$$

$\phi(\vec{x}, t)$  はエルミート  $\Leftrightarrow \phi(\vec{k}, t)^\dagger = \phi(-\vec{k}, t)$

これより

$$\phi_-(\vec{k})^\dagger = \phi_+(-\vec{k})$$

$$\therefore \phi(\vec{x}, t) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \left( \phi_+(\vec{k}) e^{-iE_k t + i\vec{k}\cdot\vec{x}} + \phi_+(\vec{k})^\dagger e^{iE_k t - i\vec{k}\cdot\vec{x}} \right)$$

$\phi_+(\vec{k})$  を rescale して次の量を定義：

$$a(\vec{k}) \equiv \sqrt{2E_k} \phi_+(\vec{k}) \quad (9)$$

すると

$$\phi(x) = \phi^{(+)}(x) + \phi^{(-)}(x) \quad (10)$$

$$\phi^{(+)}(x) = \int d^3k f_k(x) a(\vec{k}), \quad \phi^{(-)}(x) = \phi^{(+)}(x)^\dagger \quad (11)$$

ここで

$$f_k(x) \equiv \frac{e^{-ik \cdot x}}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_k}} \quad (12)$$

$$k \cdot x \equiv E_k t - \vec{k} \cdot \vec{x} \quad (13)$$

この関数は以下で基本的な役割を果たす。

□ 4次元 Fourier 変換を用いる方法 :

明白にローレンツ共変な形の取り扱い : 4次元 Fourier 変換を用いる

$$\phi(x) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^{3/2}} \tilde{\phi}(k) e^{-ikx} \quad (14)$$

ここで、 $kx \equiv k_\mu x^\mu = k^0 x^0 - \vec{k} \cdot \vec{x}$

この段階では  $k^0$  は  $\vec{k}$  と独立。

KG方程式に代入

$$\int d^4k (-k^2 + m^2) \tilde{\phi}(k) e^{-ikx} = 0$$
$$\therefore (k^2 - m^2) \tilde{\phi}(k) = 0 \quad \Leftarrow e^{-ikx} \text{ の完全性} \quad (15)$$

$$k^2 - m^2 \neq 0 \Rightarrow \tilde{\phi}(k) = 0$$

$$k^2 - m^2 = 0 \Rightarrow \tilde{\phi}(k) \text{ はゼロでなくても良い。}$$

解は

$$\tilde{\phi}(k) = \delta(k^2 - m^2) \chi(k) \quad (16)$$

$$\chi(k) = \text{任意、但し } \chi(-k)^\dagger = \chi(k)$$

有用な公式： ( $\Leftarrow f(x)$  をそのゼロ点のまわりで展開し  $\delta(ax) = \delta(x)/|a|$  を用いる)

$$\delta(f(x)) = \sum_{\substack{y \\ f(y)=0}} \frac{\delta(x-y)}{\left| \frac{df}{dy} \right|} \quad (17)$$

この公式より

$$\begin{aligned}\delta(k^2 - m^2) &= \delta((k^0)^2 - (\vec{k}^2 + m^2)) = \delta((k^0)^2 - E_k^2) \\ &= \frac{1}{2E_k} (\delta(k^0 - E_k) + \delta(k^0 + E_k))\end{aligned}\quad (18)$$

(14)に代入し、 $k^0$ 積分を実行

$$\begin{aligned}\phi(x) &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2} 2E_k} \int dk^0 (\delta(k^0 - E_k) + \delta(k^0 + E_k)) \chi(k) e^{-ikx} \\ &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2} 2E_k} \left( \chi(E_k, \vec{k}) e^{-i(E_k t - \vec{k} \cdot \vec{x})} + \chi(-E_k, \vec{k}) e^{i(E_k + \vec{k} \cdot \vec{x})} \right) \\ &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2} 2E_k} \left( \chi(E_k, \vec{k}) e^{-i(E_k t - \vec{k} \cdot \vec{x})} + \chi(-E_k, -\vec{k}) e^{i(E_k - \vec{k} \cdot \vec{x})} \right) \\ &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2} 2E_k} (\chi(k) e^{-ik \cdot x} + \chi^\dagger(k) e^{ik \cdot x})\end{aligned}\quad (19)$$

ここで、 $k = (E_k, \vec{k})$

$\chi(k) = \sqrt{2E_k} a(\vec{k})$  で  $a(\vec{k})$  を導入すると、以前と同じ結果を得る。

□  $f_k(x)$  の性質と  $a(\vec{k})$  の逆解き公式 :

以下の  $f_k(x)$  の性質は基本的:

$$(i) \quad \int d^3x f_k(x) f_{k'}(x) = \frac{e^{-2iE_k t}}{2E_k} \delta(\vec{k} + \vec{k}') \quad (20)$$

$$(ii) \quad \int d^3x f_k^*(x) f_{k'}(x) = \frac{1}{2E_k} \delta(\vec{k} - \vec{k}') \quad (21)$$

$$(iii) \quad \int d^3x f_k^*(x) i \overleftrightarrow{\partial}_0 f_{k'}(x) = \delta(\vec{k} - \vec{k}') \quad (\text{完全性}) \quad (22)$$

$$(iv) \quad \int d^3x f_k(x) i \overleftrightarrow{\partial}_0 f_{k'}(x) = 0 \quad (23)$$

(iii)  $\Rightarrow \phi(x)$  から  $a(\vec{k})$  を取り出せる

$$a(\vec{k}) = \int d^3x f_k^*(x) i \overleftrightarrow{\partial}_0 \phi(x) \quad (24)$$

$$a^\dagger(\vec{k}) = \int d^3x f_k(x) (-i \overleftrightarrow{\partial}_0) \phi(x) \quad (25)$$

---

(i) ~ (iv) の証明は容易。例として (iii) をチェック：

$$\begin{aligned}\int d^3x f_k^*(x) i \overleftrightarrow{\partial}_0 f_{k'}(x) &= \int d^3x \frac{1}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_k 2E_{k'}}} \left( e^{ik \cdot x} i \partial_0 e^{-ik' \cdot x} - i \partial_0 e^{ik \cdot x} e^{-ik' \cdot x} \right) \\ &= \int d^3x \frac{1}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_k 2E_{k'}}} (E_{k'} + E_k) e^{i(k-k') \cdot x} \\ &= \frac{E_{k'} + E_k}{2\sqrt{E_k E_{k'}}} \delta(\vec{k} - \vec{k}') = \delta(\vec{k} - \vec{k}')\end{aligned}\tag{26}$$

---

□  $a(\vec{k})$  と  $a^\dagger(\vec{k})$  の交換関係

逆解き公式を使うと、基本的なETCRから  $[a(\vec{k}), a^\dagger(\vec{k}')] = \delta(\vec{k} - \vec{k}')$  等が計算できる：

$$[a(\vec{k}), a^\dagger(\vec{k}')] = \delta(\vec{k} - \vec{k}')\tag{27}$$

$$[a(\vec{k}), a(\vec{k}')] = [a^\dagger(\vec{k}), a^\dagger(\vec{k}')] = 0\tag{28}$$

---

演習 1. これらの交換関係をチェックせよ。

解: 最初の交換関係を示す。

$$\begin{aligned} [a(\vec{k}), a^\dagger(\vec{k}')] &= \int d^3x d^3x' [f_k^*(x) \overleftrightarrow{\partial}_0 \phi(x), f_{k'} \overleftrightarrow{\partial}_0 \phi(x')] \\ &= \int d^3x d^3x' [f_k^*(x) \pi(x) - \partial_0 f_k^*(x) \phi(x), f_{k'}(x') \pi(x') - \partial_0 f_{k'}(x') \phi(x')] \\ &= \int d^3x d^3x' (f_k^*(x) i \partial_0 f_{k'}(x') i [\pi(x), \phi(x')]_{ET} \\ &\quad - f_{k'}(x') i \partial_0 f_k^*(x) i [\pi(x'), \phi(x)]_{ET}) \\ &= \int d^3x f_k^* i \overleftrightarrow{\partial}_0 f_{k'} = \delta(\vec{k} - \vec{k}') \end{aligned}$$

---

## 5.2.2 エネルギーと運動量

Noetherの定理  $\Rightarrow$  保存する4元運動量ベクトル

$$P^\mu = \int d^3x (\pi \partial^\mu \phi - g^{0\mu} \mathcal{L}) \quad (29)$$

エネルギーと運動量に分けて具体的に書くと

$$E = P^0 = \int d^3x \frac{1}{2} (\dot{\phi}^2 + (\vec{\nabla} \phi)^2 + m^2 \phi^2) \quad (30)$$

$$= \int d^3x \frac{1}{2} \left( \sum_{\mu} \partial^\mu \phi \partial^\mu \phi + m^2 \phi^2 \right) \quad (31)$$

$$P^i = \int d^3x \dot{\phi} \partial^i \phi = \int d^3x \partial^0 \phi \partial^i \phi \quad (32)$$

## Fourier モードを用いた表式

$\phi = \int d^3k (f_k a(\vec{k}) + f_k^* a^\dagger(\vec{k}))$  より

$$\partial^\mu \phi = \int d^3k (-ik^\mu) (f_k(x) a(\vec{k}) - f_k^*(x) a^\dagger(\vec{k})) \quad (33)$$

(i), (ii) を用いると次の公式を得る:

$$\begin{aligned} \int d^3x \partial^\mu \phi \partial^\nu \phi &= - \int d^3k d^3k' k^\mu k'^\nu (f_k(x) a(\vec{k}) - f_k^*(x) a^\dagger(\vec{k})) \\ &\quad \times (f_{k'}(x) a(\vec{k}') - f_{k'}^*(x) a^\dagger(\vec{k}')) \\ &= - \int \frac{d^3k}{2E_k} k^\mu k^\nu \left( a(\vec{k}) a(-\vec{k}) e^{-2iE_k t} + a^\dagger(\vec{k}) a^\dagger(-\vec{k}) e^{2iE_k t} \right) \\ &\quad + \int \frac{d^3k}{2E_k} k^\mu k^\nu \left( a(\vec{k}) a^\dagger(\vec{k}) + a^\dagger(\vec{k}) a(\vec{k}) \right) \end{aligned} \quad (34)$$

$$\begin{aligned} m^2 \int d^3x \phi(x)^2 &= \int \frac{d^3k}{2E_k} m^2 \left( a(\vec{k}) a(-\vec{k}) e^{-2iE_k t} + a^\dagger(\vec{k}) a^\dagger(-\vec{k}) e^{2iE_k t} \right) \\ &\quad + \int \frac{d^3k}{2E_k} m^2 \left( a(\vec{k}) a^\dagger(\vec{k}) + a^\dagger(\vec{k}) a(\vec{k}) \right) \end{aligned} \quad (35)$$

これらの公式中で  $k^0 = E_k$ 。

- エネルギー  $P^0$

$-k^\mu k_\mu + m^2 = 0 \Rightarrow aa$  と  $a^\dagger a^\dagger$  部分は消える。

残りは  $\sum k^\mu k_\mu + m^2 = E_k^2 + \vec{k}^2 + m^2 = 2E_k^2$ 。

$$\begin{aligned}
 P^0 &= \int d^3k \frac{E_k}{2} \left( a(\vec{k}) a^\dagger(\vec{k}) + a^\dagger(\vec{k}) a(\vec{k}) \right) \\
 &= \int d^3k E_k \left( a^\dagger(\vec{k}) a(\vec{k}) + \underbrace{\frac{1}{2}}_{\text{ゼロ点振動}(\infty)} \right)
 \end{aligned} \tag{36}$$

- 運動量  $\vec{P}$

被積分関数は  $\vec{k}$  の奇関数  $\Rightarrow aa$  と  $a^\dagger a^\dagger$  部分はゼロになる。

従って

$$\begin{aligned}
 \vec{P} &= \int d^3k \vec{k} \left( a^\dagger(\vec{k}) a(\vec{k}) + \frac{1}{2} \right) \\
 &= \int d^3k \vec{k} a^\dagger(\vec{k}) a(\vec{k})
 \end{aligned} \tag{37}$$

フォノンの場合に導いた式を再現。

### 5.3 正規順序積

上述のエネルギー演算子のように、しばしば場の積からなる演算子は発散を含む。

意味のある演算子  $\hat{O}$  : 状態空間での行列要素が有限

$$\langle \psi | \hat{O} | \chi \rangle = \text{finite}$$

相互作用があり理論が解けない場合、一般に状態空間がわからない  
⇒ 場の積からなる有限な演算子を定義することは難しい問題

自由場の場合： Fock 空間での行列要素が有限になるように場の積の順序を定義することが可能 **正規順序 (normal ordering)** の概念

$a$  = 消滅演算子、 $a^\dagger$  = 生成演算子

**“ $a$  to the right,  $a^\dagger$  to the left”**

記号 : : で表す

例 :  $aa^\dagger := a^\dagger a$ , :  $aaa^\dagger a^\dagger := a^\dagger a^\dagger aa$

●  $\mathcal{O} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n a_n^\dagger$  とすると、 $\langle 0 | \mathcal{O} | 0 \rangle$  は発散。  $\langle 0 | : \mathcal{O} : | 0 \rangle$  は有限

□ 場の正規順序積 (normal ordered product) :

$$\text{スカラー場の分解: } \phi(x) = \underbrace{\phi^{(+)}(x)}_{\ni a(\vec{k})} + \underbrace{\phi^{(-)}(x)}_{\ni a^\dagger(\vec{k})}$$

通常積

$$\begin{aligned} \phi(x)\phi(y) &= (\phi^{(+)}(x) + \phi^{(-)}(x))(\phi^{(+)}(y) + \phi^{(-)}(y)) \\ &= \phi^{(+)}(x)\phi^{(+)}(y) + \phi^{(+)}(x)\phi^{(-)}(y) \\ &\quad + \phi^{(-)}(x)\phi^{(+)}(y) + \phi^{(-)}(x)\phi^{(-)}(y) \end{aligned} \tag{38}$$

Normal-ordered product

$$\begin{aligned} : \phi(x)\phi(y) : &= (\phi^{(+)}(x) + \phi^{(-)}(x))(\phi^{(+)}(y) + \phi^{(-)}(y)) \\ &= \phi^{(+)}(x)\phi^{(+)}(y) + \phi^{(-)}(y)\phi^{(+)}(x) \\ &\quad + \phi^{(-)}(x)\phi^{(+)}(y) + \phi^{(-)}(x)\phi^{(-)}(y) \end{aligned} \tag{39}$$

これらの差はc#であり、

$$\begin{aligned}
 \phi(x)\phi(y) - : \phi(x)\phi(y) &:= [\phi^{(+)}(x), \phi^{(-)}(y)] \\
 &= \int d^3k d^3k' f_k(x) f_{k'}(y) [a(\vec{k}), a^\dagger(\vec{k}')] \\
 &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2E_k} e^{-ik \cdot (x-y)} \tag{40}
 \end{aligned}$$

$k^0 = E_k > 0 \Rightarrow$  次の4次元積分で書くことができる：

$$[\phi^{(+)}(x), \phi^{(-)}(y)] = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^3} \theta(k^0) \delta(k^2 - m^2) e^{-ik \cdot (x-y)} \tag{41}$$

$$\text{where } \theta(x) = \begin{cases} 1 & \text{for } x > 0 \\ 0 & \text{for } x < 0 \end{cases} \tag{42}$$

$\theta(x)$  は超関数であり、積分の中でのみ定義されるから、 $\theta(0)$  の値は必要ないが、しばしば  $\theta(0) = \frac{1}{2}$  と定義するのが便利。 .

## 5.4 Invariant commutator function とその性質

□ 交換子積と不変関数 :

交換子積  $[\phi(x), \phi(y)]$  は任意の  $x, y$  で計算できる :

$$\begin{aligned} [\phi(x), \phi(y)] &= [\phi^{(+)}(x), \phi^{(-)}(y)] + [\phi^{(-)}(x), \phi^{(+)}(y)] \\ &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^3} \epsilon(k^0) \delta(k^2 - m^2) e^{-ik \cdot (x-y)} \\ &\equiv i\Delta(x - y; m^2) = \text{invariant commutator function} \end{aligned} \quad (43)$$

$\epsilon(x)$  = “staircase function” または “stair step function” (階段関数)

$$\epsilon(x) \equiv \theta(x) - \theta(-x) = \begin{cases} 1 & \text{for } x > 0 \\ -1 & \text{for } x < 0 \end{cases} \quad (44)$$

□ Invariant function の性質 :

Invariant function :

$$i\Delta(x) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^3} \epsilon(k^0) \delta(k^2 - m^2) e^{-ikx} = [\phi(x), \phi(0)] \quad (45)$$

$$= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_k} (e^{-ikx} - e^{ikx}) \quad (46)$$

$\Delta$  の性質 :

1. Klein-Gordon 方程式を満たす。定義より明らか
2. Lorentz invariance: 定義より明らか
3. 奇関数 :  $\Delta(-x) = -\Delta(x)$

∴

$$\begin{aligned} \Delta(-x) &= \frac{1}{i} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^3} \epsilon(k^0) \delta(k^2 - m^2) e^{+ikx} \\ &\stackrel{k \rightarrow -k}{=} \frac{1}{i} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^3} \epsilon(-k^0) \delta(k^2 - m^2) e^{-ikx} \\ &= -\Delta(x) \quad \Leftarrow \quad \epsilon(-k^0) = -\epsilon(k^0) \end{aligned} \quad (47)$$

#### 4. Micro-causality *i.e.* $\Delta(x) = 0$ for $x^2 < 0$

∴  $\Delta(x)$  は Lorentz-invariant ゆえ、 $t = 0, \vec{x} \neq 0$  の場合を考えれば十分。上記の奇関数性より

$$\Delta(\vec{x}, t = 0) = -\Delta(-\vec{x}, t = 0)$$

一方

$$\begin{aligned}\Delta(\vec{x}, t = 0) &= \frac{1}{i} \int \frac{d^3 k dk^0}{(2\pi)^3} \epsilon(k^0) \delta(k^2 - m^2) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} \\ &= \frac{1}{i} \int \frac{d^3 k dk^0}{(2\pi)^3} \epsilon(k^0) \delta(k^2 - m^2) e^{+i\vec{k}\cdot\vec{x}} = \Delta(-\vec{x}, t = 0)\end{aligned}$$

従って

$$\Delta(x) = 0 \quad \text{for } x^2 < 0 \quad (48)$$

⇒ space-like に離れた点では、 $\phi(x)$  と  $\phi(0)$  は同時対角化でき因果的に無関係。

5. 時間微分に対する性質 :

$$i \frac{\partial}{\partial t} \Delta(x)|_{t=0} = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_k} \left( -iE_k e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} - iE_k e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \right) = -i\delta(\vec{x})$$

∴ Commutator の定義に戻って考えれば、次の正準交換関係

$$\left[ \dot{\phi}(x), \phi(0) \right]_{ET} = \frac{1}{i} \delta(\vec{x}) \quad (49)$$

を表しており、明白。

## 5.5 Feynman Propagator とその性質

□ 時間順序積 (Time-ordered product):

$\phi(x)$  を annihilation part  $\phi^{(+)}(x)$  と creation part  $\phi^{(-)}(x)$  に分解 :

$$\phi(x) = \phi^{(+)}(x) + \phi^{(-)}(x) \quad (50)$$

$$\phi(y)|0\rangle = \phi^{(-)}(y)|0\rangle \quad y \text{ での粒子の生成} \quad (51)$$

$$\langle 0|\phi(x) = \langle 0|\phi^{(+)}(x) \quad x \text{ での粒子の消滅} \quad (52)$$

⇒ 次の相関関数は  $y$  で粒子を生成して  $x$  で消滅させる振幅を表す。

$$\langle 0 | \phi(x) \phi(y) | 0 \rangle = \langle 0 | \phi^{(+)}(x) \phi^{(-)}(y) | 0 \rangle \quad (53)$$

- 但し、この解釈が成り立つには  $x^0 > y^0$  の時間順序が必要。  
 $x^0 < y^0$  の場合も併せて考えると

$$\begin{array}{ll} x^0 > y^0 & \langle 0 | \phi(x) \phi(y) | 0 \rangle \\ x^0 < y^0 & \langle 0 | \phi(y) \phi(x) | 0 \rangle \end{array}$$

次の時間順序積 (Time-ordered product or T-product) を定義するのが自然

$$T(\phi(x)\phi(y)) \equiv \theta(x^0 - y^0)\phi(x)\phi(y) + \theta(y^0 - x^0)\phi(y)\phi(x)$$

□ Feynman propagator の定義 :

$T$ -product 用いて Feynman propagator を次のように定義 :

$$i\Delta_F(x - y; m^2) \equiv \langle 0 | T(\phi(x)\phi(y)) | 0 \rangle \quad (54)$$

粒子の  $x$ - $y$  間の伝播の振幅を表す

□  $T$ -product の Lorentz 不変性 :

$\theta(x^0 - y^0) + \theta(y^0 - x^0) = 1$  を用いて  $T$ -product を書き換える :

$$T(\phi(x)\phi(y)) = \theta(x^0 - y^0)[\phi(x), \phi(y)] + \phi(y)\phi(x) \quad (55)$$

♠ 一般に  $\theta(x^0 - y^0)$  自体は Lorentz 不変ではない:

◆  $x - y$  が time-like な場合:

$(x^0 - y^0)^2 > (\vec{x} - \vec{y})^2 \Rightarrow x^0 - y^0$  はゼロになれない。  $\Rightarrow$  連続的な proper Lorentz 変換では符号を変えない  $\Rightarrow \theta(x^0 - y^0)$  は Lorentz 不変。

◆  $x - y$  が space-like な場合:

$(x^0 - y^0)^2 < (\vec{x} - \vec{y})^2 \Rightarrow x^0 - y^0$  はゼロを經由して正にも負にもなり得るから  $\theta(x^0 - y^0)$  は Lorentz 不変でない。

しかし space-like な場合 micro-causality より  $[\phi(x), \phi(y)] = 0$

$\Rightarrow$  T-product は Lorentz 不変な概念

□ Feynman propagator の具体形 :

$i\Delta_F$  は次のように invariant function  $\Delta$  で表すことができる :

$$\begin{aligned}
i\Delta_F(x - y) &= \langle 0 | T(\phi(x)\phi(y)) | 0 \rangle \\
&= \theta(x^0 - y^0) \langle 0 | \phi^{(+)}(x)\phi^{(-)}(y) | 0 \rangle + \theta(y^0 - x^0) \langle 0 | \phi^{(+)}(y)\phi^{(-)}(x) | 0 \rangle \\
&= \theta(x^0 - y^0) \langle 0 | [\phi^{(+)}(x), \phi^{(-)}(y)] | 0 \rangle \\
&\quad + \theta(y^0 - x^0) \langle 0 | [\phi^{(+)}(y), \phi^{(-)}(x)] | 0 \rangle \\
&= \theta(x^0 - y^0) i\Delta(x - y) + \theta(y^0 - x^0) i\Delta(y - x)
\end{aligned} \tag{56}$$

$\Delta$  の運動量表示を用いると

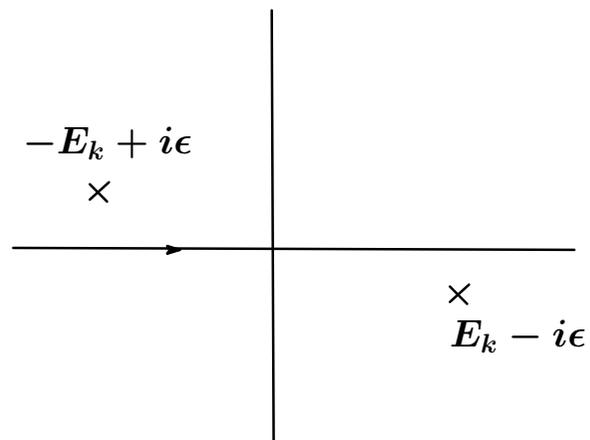
$$\begin{aligned}
i\Delta_F(x - y) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left\{ \theta(x^0 - y^0) \frac{e^{-ik \cdot (x-y)}}{2E_k} \right. \\
\left. + \theta(y^0 - x^0) \frac{e^{-ik \cdot (y-x)}}{2E_k} \right\}
\end{aligned} \tag{57}$$

- { } 内は有用な積分表示を持つことを示す。

次の積分を考える：

$$I \equiv \int \frac{dk^0}{2\pi i} \frac{e^{-ik^0(x^0-y^0)}}{(k^0 - E_k + i\epsilon)(k^0 + E_k - i\epsilon)} \quad (58)$$

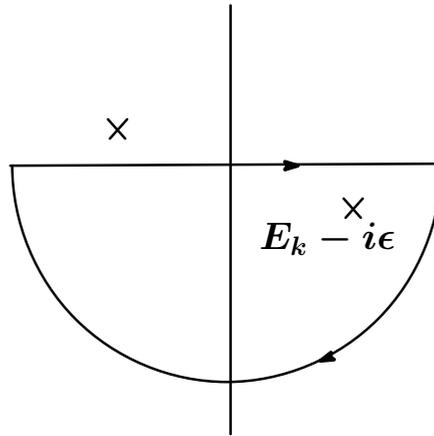
$k^0$ -plane での pole の位置



Complex  $k^0$  に対して

$$e^{-ik^0(x^0-y^0)} = e^{-i\Re k^0(x^0-y^0)} e^{\Im k^0(x^0-y^0)} \quad (59)$$

- $x^0 - y^0 > 0$  の場合: 下半面で  $\Im k^0 < 0$ 。そこで contour を閉じれば積分は無遠の半円周で収束。



留数定理より  $k^0 = E_k - i\epsilon$  の pole からの寄与を拾って

$$I = \frac{1}{2\pi i} (-2\pi i) \frac{1}{2E_k} e^{-iE_k(x^0 - y^0)} = -\frac{1}{2E_k} e^{-iE_k(x^0 - y^0)} \quad (60)$$

- $x^0 - y^0 < 0$  の場合: 上半面で contour を閉じて

$$I = -\frac{1}{2E_k} e^{-iE_k(y^0 - x^0)} \quad (61)$$

併せると

$$I = - \left\{ \theta(x^0 - y^0) \frac{1}{2E_k} e^{-iE_k(x^0 - y^0)} + \theta(y^0 - x^0) \frac{1}{2E_k} e^{-iE_k(y^0 - x^0)} \right\}$$

従って

$$\begin{aligned} i\Delta_F(x-y) &= i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ik \cdot (x-y)}}{(k^0 - E_k + i\epsilon)(k^0 + E_k - i\epsilon)} \\ &= i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ik \cdot (x-y)}}{k^{02} - (E_k - i\epsilon)^2} \end{aligned} \quad (62)$$

ここで

$$\begin{aligned} k^{02} - (E_k - i\epsilon)^2 &= k^{02} - (\vec{k}^2 + m^2) + 2i\epsilon E_k \\ &= k^2 - m^2 + i\epsilon \end{aligned} \quad (63)$$

⇒ 次の重要な積分表示を得る：

$$\Delta_F(x-y) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ik \cdot (x-y)}}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \quad (64)$$

□  $\Delta_F(x - y)$  の性質 :

1  $\Delta_F(x - y)$  は  $\delta$ -関数 source を持つ Klein-Gordon 方程式の解、*i.e.* Green 関数

$$(\partial^2 + m^2)i\Delta_F(x - y) = -i\delta^4(x - y) \quad (65)$$

証明 1: T-product による  $i\Delta_F$  の定義を用いる方法

Klein-Gordon 演算子を作用

$$\begin{aligned} & (\partial^2 + m^2)i\Delta_F(x - y) \\ &= (\partial^2 + m^2)\langle 0|\theta(x^0 - y^0)[\phi(x), \phi(y)] + \phi(y)\underbrace{\phi(x)}_{\text{消える}}|0\rangle \\ &= (\partial_t^2 - \nabla^2 + m^2)\langle 0|\theta(x^0 - y^0)[\phi(x), \phi(y)]|0\rangle \end{aligned} \quad (66)$$

$$\begin{aligned}
& \partial_t (\theta(x^0 - y^0) [\phi(x), \phi(y)]) \\
&= \underbrace{\delta(x^0 - y^0) [\phi(x), \phi(y)]}_0 + \theta(x^0 - y^0) [\dot{\phi}(x), \phi(y)] \\
& \partial_t^2 (\theta(x^0 - y^0) [\phi(x), \phi(y)]) \\
&= \underbrace{\delta(x^0 - y^0) [\dot{\phi}(x), \phi(y)]}_{-i\delta^4(x-y)} + \theta(x^0 - y^0) [\ddot{\phi}(x), \phi(y)]
\end{aligned}$$

従って、

$$\partial_t^2 \theta(x^0 - y^0) [\phi(x), \phi(y)] = -i\delta^4(x - y) + \theta(x^0 - y^0) [\partial_t^2 \phi(x), \phi(y)]$$

第二項は  $-\nabla^2 + m^2$  と併せて  $(\partial^2 + m^2)\phi(x)$  を形成し消える。

$$\therefore (\partial^2 + m^2)i\Delta_F(x - y) = -i\delta^4(x - y) \quad // \quad (67)$$

# 証明 1: $i\Delta_F$ の積分表示を用いる方法

## 有用な公式

$$(\star) \quad \frac{1}{\alpha + i\epsilon} = \mathcal{P}\frac{1}{\alpha} - i\pi\delta(\alpha) \quad (68)$$

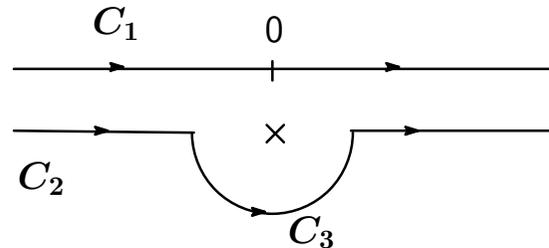
$\mathcal{P}\frac{1}{\alpha}$  は Cauchy の主値 (principal value)

ゼロを含む区間  $[a, b]$  の積分において

$$\int_a^b d\alpha \mathcal{P}\frac{1}{\alpha} f(\alpha) \equiv \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left( \int_a^{-\epsilon} d\alpha \frac{f(\alpha)}{\alpha} + \int_{\epsilon}^b d\alpha \frac{f(\alpha)}{\alpha} \right) \quad (69)$$

( $\star$ ) の証明:

$f(\alpha)$ :  $f(0)$  = finite な連続関数。図のような contour  $C_1, C_2 + C_3$  に沿った積分  $\int d\alpha f(\alpha)/(\alpha + i\epsilon)$  を考える。(  $C_2$  は半円周  $C_3$  をのぞいた部分)



明らかに、

$$\int_{C_2} + \int_{C_3} - \int_{C_1} = \text{residue at } \alpha = -i\epsilon$$

$C_3$  に沿った積分

$$\int_{C_3} = f(-i\epsilon) \int_{\pi}^{2\pi} i d\theta = \pi i f(0)$$

従って

$$\begin{aligned} \int_{C_1} d\alpha \frac{f(\alpha)}{\alpha + i\epsilon} &= \int_{C_2} d\alpha \mathcal{P} \frac{1}{\alpha} f(\alpha) + \pi i f(0) - \underbrace{2\pi i f(0)}_{\text{pole part}} \\ &= \int d\alpha \mathcal{P} \frac{1}{\alpha} f(\alpha) - i\pi \int d\alpha \delta(\alpha) f(\alpha) \quad // \quad (70) \end{aligned}$$

$\Delta_F$  が Green 関数であることの証明

$$\begin{aligned} & (\partial^2 + m^2)\Delta_F(x - y) \\ &= (\partial^2 + m^2) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ik \cdot (x-y)}}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \\ &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} (-k^2 + m^2) \left\{ \mathcal{P} \frac{1}{k^2 - m^2} - i\pi \delta(k^2 - m^2) \right\} e^{-ik \cdot x} \\ &= - \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ik \cdot x} = -\delta^4(x) \quad // \end{aligned} \tag{71}$$

## 2. $\Delta_F(x)$ の具体形とその漸近的振る舞い:

ベッセル関数の積分表示を用いると次のように書ける<sup>1</sup> :

$$\begin{aligned}\Delta_F(x) &= -D^c(x) \\ &= -\frac{1}{4\pi}\delta(x^2) + \frac{m}{8\pi\sqrt{x^2}}\theta(x^2)\left(J_1(m\sqrt{x^2}) - iN_1(m\sqrt{x^2})\right) \\ &\quad - \frac{mi}{4\pi^2\sqrt{-x^2}}\theta(-x^2)K_1(m\sqrt{-x^2})\end{aligned}\quad (72)$$

$$K_\nu(z) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z} \quad \text{for large positive } z$$

特徴:  $x^2 > 0$  (time-like) な場合は振動

$x^2 < 0$  (space-like) のときは遠距離で exponential 的に damp

---

<sup>1</sup>Bogoliubov -Shirkov

## 6 経路積分表示

経路積分 (path integral) = 量子力学の遷移振幅 (transition amplitude) を無限次元積分で表示する方法。

- 量子力学の本質である「(複素)揺らぎ」のオペレーター形式とは異なる表現法。
- 古典力学の作用原理との関係がつけやすい。
- 特別な極限で分配関数や相関関数の表示を与える。
- 統計熱力学との強い類似があり有用。

### 6.1 遷移振幅の経路積分表示: 有限自由度の場合

$|q\rangle$ : Schrödinger 表示における座標の固有関数

$$\hat{q}|q\rangle = q|q\rangle$$

対応する Heisenberg 表示の state と operator

$$|q, t\rangle \equiv e^{i\hat{H}t}|q\rangle \quad (1)$$

$$\hat{q}(t) \equiv e^{i\hat{H}t}\hat{q}e^{-i\hat{H}t} \quad (2)$$

$$\hat{q}(t)|q, t\rangle = q|q, t\rangle \quad (3)$$

### 6.1.1 位相空間での経路積分: (一次元の場合)

対象は、次のような 遷移振幅:

$$K(q, t|q', t') \equiv \langle q, t|q', t'\rangle = \langle q|e^{-i\hat{H}(t-t')}|q'\rangle \quad (4)$$

State の規格化と完全性 :

$$\langle q|q'\rangle = \delta(q - q'), \quad \langle p|p'\rangle = \delta(p - p')$$
$$\int dq|q\rangle\langle q| = 1, \quad \int dp|p\rangle\langle p| = 1$$

$\langle q|p\rangle$  = 運動量  $p$  の固有関数の座標表示

$$\begin{aligned} \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial q} \langle q|p\rangle &= p \langle q|p\rangle \\ \Rightarrow \langle q|p\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{iqp} \quad \text{とれる} \end{aligned} \quad (5)$$

規格化のチェック :

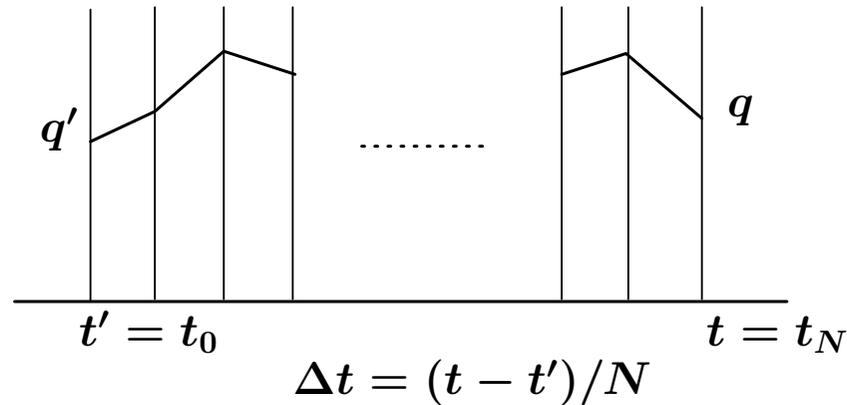
$$\int dp \langle q|p\rangle \langle p|q'\rangle = \int \frac{dp}{2\pi} e^{ip(q-q')} = \delta(q - q') \quad (6)$$

□  $K(q, t|q', t')$  の特徴付け :

**合成則:**  $K(q, t|q', t')$  の最も基本的な性質:

$$\int dq'' K(q, t|q'', t'') K(q'', t''|q', t') = K(q, t|q', t') \quad (7)$$

これを繰り返し適用。  $N$  個の小区間に分割して計算し  $N \rightarrow \infty$  極限をとる



無限小の区間に対する遷移振幅

$$\langle q_{i+1}, t_{i+1} | q_i, t_i \rangle \simeq \langle q_{i+1} | 1 - i\hat{H}\Delta t | q_i \rangle \quad (8)$$

第2項に対して  $p_i$  の完全系を挿入

$$\langle q_{i+1} | \hat{H}(\hat{p}, \hat{q}) | q_i \rangle = \int dp_i \langle q_{i+1} | p_i \rangle \langle p_i | \hat{H}(\hat{p}, \hat{q}) | q_i \rangle \quad (9)$$

### $\hat{H}$ 中の $\hat{p}, \hat{q}$ の operator ordering の問題

$\hat{p}$  と  $\hat{q}$  が積として mix しているときには、様々な ordering が可能:

例:  $pq$  or  $qp$        $qp^2$  or  $pqp$  or  $p^2q$ ,

差は  $\hbar$  以下のオーダー  $\Rightarrow$  古典論からは決められない。

Ordering の数だけ、量子論があり得る。

次の要請を置く：

- ◆ Hamiltonian がエルミートになること。
- ◆ 古典的な対称性が量子論においても保たれること

これでは一意に決まらない場合もある。

- 重要な問題だが、以下で考察する Hamiltonian は  $\hat{p}$  と  $\hat{q}$  が混ざらないもののみなので、ここではこの問題を追求しない。

---

計算の続き：

$\hat{p}$  と  $\hat{q}$  が混ざらない場合：

$$\langle p_i | \hat{H}(\hat{p}, \hat{q}) | q_i \rangle = H(p_i, q_i) \langle p_i | q_i \rangle \quad (10)$$

従って

$$\langle q_{i+1}, t_{i+1} | q_i, t_i \rangle \simeq \langle q_{i+1} | q_i \rangle - i \int dp_i H(p_i, q_i) \Delta t \langle q_{i+1} | p_i \rangle \langle p_i | q_i \rangle$$

$$\langle q_{i+1} | q_i \rangle = \int \frac{dp_i}{2\pi} \langle q_{i+1} | p_i \rangle \langle p_i | q_i \rangle \quad \text{を用いると}$$

$$\begin{aligned} & \langle q_{i+1}, t_{i+1} | q_i, t_i \rangle \\ &= \int \frac{dp_i}{2\pi} \exp(-i(H(p_i, q_i)\Delta t - p_i(q_{i+1} - q_i))) + \mathcal{O}((\Delta t)^2) \end{aligned}$$

この基本式を全区間に適用すると遷移振幅の phase-space path-integral 表示を得る：

$$\begin{aligned} K(q, t | q', t') &= \int \prod_{i=0}^{N-1} \frac{dp_i}{\sqrt{2\pi}} \prod_{i=0}^{N-1} \frac{dq_i}{\sqrt{2\pi}} \\ &\quad \cdot \exp\left(-i \sum_{i=0}^{N-1} H(p_i, q_i)\Delta t + i \sum_{i=0}^{N-1} p_i((q_{i+1} - q_i)/\Delta t)\Delta t\right) \\ &= \int_{\substack{q(t_0)=q' \\ q(t_N)=q}} \mathcal{D}p(t)\mathcal{D}q(t) \exp\left(i \int_{t'}^t dt''(p\dot{q} - H(p, q))\right) \end{aligned}$$

ここで、積分測度は

$$\mathcal{D}p(t) \equiv \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{i=0}^{N-1} \frac{dp_i}{\sqrt{2\pi}}, \quad \mathcal{D}q(t) \equiv \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{i=0}^{N-1} \frac{dq_i}{\sqrt{2\pi}}$$

- これはかなり形式的な表現。  
実際にこの無限積分を計算するには工夫が要る。

## 6.1.2 Lagrangian Path Integral

運動量  $p$  の積分  $\implies$  Lagrangian 形式の経路積分

1.  $p$ -依存性が quadratic な場合には  $p$ -積分は exact に実行可能。
2. 一般にはそのようなことはできないが、準古典 (WKB) 近似の範囲内で実行が可能な場合もある。

以下 1. の場合のみ考察。

次の形の Hamiltonian を考える：

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(q) \quad (11)$$

各区間  $i$  についての  $p$  積分の形:

$$I_i = \int \frac{dp_i}{\sqrt{2\pi}} \exp \left( -i \frac{p_i^2}{2m} \Delta t + ip_i \dot{q}_i \Delta t \right) \quad (12)$$

指数部分を平方完成

$$\left(-i\frac{p_i^2}{2m} + ip_i\dot{q}_i\right)\Delta t = -i\frac{\Delta t}{2m}(p_i - m\dot{q}_i)^2 + i\frac{m}{2}\dot{q}_i^2\Delta t$$

Gauss (Fresnel) 積分公式

$$\int_{-\infty}^{\infty} dp e^{-iap^2/2} = \sqrt{\frac{2\pi}{ia}} \quad (13)$$

を用いて積分を実行すると

$$I_i = \sqrt{\frac{m}{i\Delta t}} e^{i\frac{m}{2}\dot{q}_i^2\Delta t} \quad (14)$$

これより

$$\begin{aligned} K(q_f, t_f | q_i, t_i) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \int \prod_{i=0}^{N-1} \sqrt{\frac{m}{i\Delta t}} \frac{dq_i}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(i \int_{t_i}^{t_f} dt L(q, \dot{q})\right) \\ &\equiv \int_{\substack{q(t_i)=q_i \\ q(t_f)=q_f}} \mathcal{D}q(t) e^{i \int_{t_i}^{t_f} dt L(q, \dot{q})} \end{aligned} \quad (15)$$

ここで

$$L = \frac{m}{2}\dot{q}^2 - V(q) \quad (16)$$

## 6.2 経路積分の実行例

### 6.2.1 自由粒子

$$L = \frac{m}{2}\dot{q}^2, \quad q(t_i) = q_i, \quad q(t_f) = q_f \quad (17)$$

- **重要な方針:** 経路についての積分を、境界条件を満たす古典解  $q_{cl}(t)$  とその周りの fluctuation  $\tilde{q}(t)$  の積分に分けて考える:

$$q(t) = q_{cl}(t) + \tilde{q}(t) \quad (18)$$

$$\ddot{q}_{cl}(t) = 0, \quad q_{cl}(t_i) = q_i, \quad q_{cl}(t_f) = q_f \quad (19)$$

$$\tilde{q}(t_i) = \tilde{q}(t_f) = 0 \quad (20)$$

古典解の形

$$q_{cl}(t) = at + b \quad (21)$$

$$a = \frac{q_f - q_i}{t_f - t_i}, \quad b = \frac{q_i t_f - q_f t_i}{t_f - t_i} \quad (22)$$

作用：

$$\begin{aligned}
 S &= \frac{m}{2} \int_{t_i}^{t_f} dt (\dot{q}_{cl} + \dot{\tilde{q}})^2 \\
 &= \frac{m}{2} \int_{t_i}^{t_f} dt (a^2 + 2a\dot{\tilde{q}} + \dot{\tilde{q}}^2) \\
 &= \underbrace{\frac{m(q_f - q_i)^2}{2(t_f - t_i)}}_{S_{cl}} + \underbrace{ma \int_{t_i}^{t_f} dt \dot{\tilde{q}}}_0 + \frac{m}{2} \int_{t_i}^{t_f} dt \dot{\tilde{q}}^2 \\
 &= S_{cl} + \frac{m}{2} \int_{t_i}^{t_f} dt \dot{\tilde{q}}^2
 \end{aligned} \tag{23}$$

従って

$$K(q_f, t_f | q_i, t_i) = C(t_f, t_i) e^{iS_{cl}[q_f, q_i, t_f, t_i]} \tag{24}$$

$$C(t_f, t_i) = \underbrace{\int_{\substack{\tilde{q}(t_i)=0 \\ \tilde{q}(t_f)=0}} \mathcal{D}\tilde{q}(t) \exp\left(i\frac{m}{2} \int_{t_i}^{t_f} dt \dot{\tilde{q}}^2\right)}_{q_f, q_i \text{ に依らない}} \tag{25}$$

$C(t_f, t_i)$  は  $K$  の満たすべき合成則から決められる：

$$\begin{aligned}
K(q_f, t_f | q_i, t_i) &= C(t_f, t_i) \exp \left[ i \frac{m}{2} \frac{(q_f - q_i)^2}{t_f - t_i} \right] \\
&= \int dq K(q_f, t_f | q, t) K(q, t | q_i, t_i) \\
&= C(t_f, t) C(t, t_i) \int dq \exp \left[ i \frac{m}{2} \underbrace{\left( \frac{(q_f - q)^2}{t_f - t} + \frac{(q - q_i)^2}{t - t_i} \right)}_{(*)} \right]
\end{aligned}$$

$$(*) = \dots = A(x - B)^2 + \frac{Q^2}{T} \quad (26)$$

$$\text{where } x = q - q_i, \quad Q = q_f - q_i, \quad T = t_f - t_i \quad (27)$$

$$A = \frac{t_f - t_i}{(t_f - t)(t - t_i)}, \quad B = \frac{Q}{T}(t - t_i)^2 \quad (28)$$

積分は Gauss (Fresnel) 積分

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \exp \left( i \frac{m}{2} A(x - B)^2 \right) = \left[ \frac{2\pi}{im} \frac{(t_f - t)(t - t_i)}{t_f - t_i} \right]^{1/2} \quad (29)$$

$C(t, t') = \alpha(t - t')^{-1/2}$  と置くと、容易に  $\alpha = (im/2\pi)^{1/2}$ 。

$$K(q_f, t_f | q_i, t_i) = \left(\frac{im}{2\pi}\right)^{1/2} \frac{1}{\sqrt{t_f - t_i}} \exp\left(i\frac{m}{2} \frac{(q_f - q_i)^2}{t_f - t_i}\right) \quad (30)$$

これは  $q_f, t_f$  を変数としたときの“拡散方程式” (Schrödinger 方程式) の解

---

演習 1. 次の Lagrangian で与えられる調和振動子に対して、同様の方法で遷移振幅を求めよ。

$$L = \frac{1}{2}\dot{x}^2 - \frac{\omega^2}{2}x^2 \quad (31)$$

## 6.3 Operator形式との関係

### 6.3.1 Operator insertion を伴う遷移振幅

#### □ 1-insertion:

Time interval を  $(0, T)$ : 時刻  $t$  ( $0 < t < T$ ) に  $q(t)$  を挿入したときの  
振幅 :

$$\begin{aligned} & \int \mathcal{D}q e^{i \int_0^T dt' L(t')} q(t) \\ &= \int dq \langle q_f, T | q, t \rangle q \langle q, t | q_i, 0 \rangle \\ &= \int dq \langle q_f, T | \hat{q}(t) | q, t \rangle \langle q, t | q_i, 0 \rangle \\ &= \langle q_f, T | \hat{q}(t) | q_i, 0 \rangle \end{aligned} \tag{32}$$

従って operator 形式では  $\hat{q}(t)$  を挿入した振幅になる。

#### □ 2-insertion:

$q(t)$  と  $q(t')$  を挿入:  $\Rightarrow$  これらを insert する場所は  $t$  と  $t'$  の順序による。

Operator の積との関係は

$$\begin{aligned} t > t' & \quad \hat{q}(t)\hat{q}(t') \\ t < t' & \quad \hat{q}(t')\hat{q}(t) \end{aligned}$$

これは **T-product** に他ならない。従って

$$\int \mathcal{D}q e^{iS} q(t)q(t') = \langle q_f, T | \mathbf{T}(\hat{q}(t)\hat{q}(t')) | q_i, 0 \rangle \quad (33)$$

### 6.3.2 **T\*-product**

より正確には、経路積分で実現されるのは、T-product ではなく、**T\*-product**:

$$\begin{aligned} T^* (\partial_{t_1} \mathcal{O}_1(t_1) \mathcal{O}_2(t_2) \cdots \mathcal{O}_n(t_n)) & \equiv \partial_{t_1} T^* (\mathcal{O}_1(t_1) \mathcal{O}_2(t_2) \cdots \mathcal{O}_n(t_n)) \\ T^* (q(t_1) \cdots q(t_n)) & \equiv T(q(t_1) \cdots q(t_n)) \end{aligned}$$

$\mathcal{O}_i(t_i)$  = は任意の (一般に微分を含む) operator。

**T\*-product は完全に Lorentz 共変な概念**

通常の T-product は (微分しない範囲では Lorentz 共変だが) 微分すると  $\theta(x^0 - y^0)$  から  $\delta$ -function を出すので注意。

□ 簡単な場合の例 :

◆ 一階の微分の場合 : この場合は T-product は T\*-product と一致 :

$$\begin{aligned}\partial_t T(q(t)q(t')) &= \partial_t (\theta(t-t')q(t)q(t') + \theta(t'-t)q(t')q(t)) \\ &= (q(t)^2 - q(t')^2)\delta(t-t') + T(\partial_t q(t)q(t')) \\ &= T(\partial_t q(t)q(t'))\end{aligned}\tag{34}$$

◆ 二階微分の場合: このときは異なる結果 :

$$\begin{aligned}T^*(\partial_t q(t)\partial_{t'} q(t')) &= \partial_t \partial_{t'} T(q(t)q(t')) \\ &\neq T(\partial_t q(t)\partial_{t'} q(t'))\end{aligned}$$

実際

$$\partial_t \partial_{t'} T^*(\partial_t q(t)q(t')) = T(\partial_t q(t)\partial_{t'} q(t')) + [q(t), \dot{q}(t')]$$

## 6.4 $n$ 点 Green 関数の経路積分表示 $i\epsilon$ 処方、基底状態の射影、及び Euclid 化

### 6.4.1 $i\epsilon$ 処方

Minkowski 空間での経路積分: 場  $\phi(x)$  の大きな揺らぎに対して  $e^{iS}$  が激しく振動  $\Rightarrow$  well-defined ではない。

これを回避する最も簡単な処方:  $|\phi(x)| \gg 1$  に対して exponential damping を引き起こす因子

$$e^{-\int d^4x \frac{1}{2}\epsilon\phi(x)^2}, \quad \epsilon = \text{無限小} > 0 \quad (35)$$

を付け加えて定義すること。

$\Leftrightarrow$  Mass term がある場合、 $m^2 \rightarrow m^2 - i\epsilon$  とすることに相当。

**より有用な見方:** Hamiltonian に小さな (虚数の) 摂動を加えたと考え  
る。即ち

$$H \rightarrow H + \delta H \quad (36)$$

$$\delta H = -i\hbar = -i\frac{\epsilon}{2} \int d^3x \phi(x)^2 \quad (37)$$

## 6.4.2 Large-time 極限と基底状態の射影

上記の摂動の影響は 1次の摂動論 で解析できる。

$n$  番目の状態のエネルギーシフト :

$$E'_n = E_n + \langle n | \delta H | n \rangle = E_n - i h_n \quad (38)$$

$$\text{ここで } h_n \equiv \langle n | h | n \rangle \quad (39)$$

⇒ 経路積分において、始状態の部分を見ると

$$\begin{aligned} e^{i(H+\delta H)t_I} |\psi_I\rangle &= \sum_n e^{iE'_n t_I} |n\rangle \langle n | \psi_I\rangle \\ &= e^{iE'_0 t_I} |0\rangle \langle 0 | \psi_I\rangle + \sum_{m \neq 0} e^{iE'_m t_I} |m\rangle \langle m | \psi_I\rangle \\ &= e^{iE_0 t_I - h_0 t_I} \left\{ |0\rangle \langle 0 | \psi_I\rangle + \sum_{m \neq 0} e^{i(E_m - E_0) t_I} e^{\Delta h_m t_I} |m\rangle \langle m | \psi_I\rangle \right\} \end{aligned} \quad (40)$$

$$\text{where } \Delta h_m = h_m - h_0 = \frac{\epsilon}{2} \int d^3x (\langle m | \phi(x)^2 | m \rangle - \langle 0 | \phi(x)^2 | 0 \rangle) \quad (41)$$

Excited state での  $\phi(x)^2$  の期待値は真空でのそれより大(であると期待される:後で議論)

$\Rightarrow \Delta h_m > 0 \Rightarrow t_I \rightarrow -\infty$  の極限で  $\{ \quad \}$  内は第 1 項 (真空からの寄与) が dominate

同様に終状態に対して  $t_F \rightarrow \infty$  の極限で

$$\langle \psi_F | e^{-i(H+\delta H)t_F} \longrightarrow \langle \psi_F | 0 \rangle \langle 0 | e^{-iE_0 t_F + h_0 t_F} \quad (42)$$

- Operator を挿入した振幅は、挿入しない振幅で割って定義されるから、ここに現れた指数因子はすべて分母分子で相殺。

$\Rightarrow$  この極限で振幅は始状態及び終状態に依らなくなり、 **time-ordered Green's function** を与える：

$$\lim \frac{\int \mathcal{D}\phi(x) \mathcal{O}(x_1) \cdots \mathcal{O}(x_n) e^{iS}}{\int \mathcal{D}\phi(x) e^{iS}} = \frac{\langle 0 | T^*(\mathcal{O}(x_1) \cdots \mathcal{O}(x_n)) | 0 \rangle}{\langle 0 | 0 \rangle}$$

□  $\delta H = -ih$ における  $h$ の choice:

$h$ は、 $|m\rangle \neq |0\rangle$ に対して  $h_m - h_0 > 0$ となるものを採るべし。特に、

$$h = \epsilon H \quad (43)$$

ととると、明らかに

$$\epsilon H_m - \epsilon H_0 = \epsilon(E_m - E_0) > 0 \quad (44)$$

このとき

$$\begin{aligned} H' &= H - i\epsilon H = e^{-i\epsilon} H \\ \therefore H't &= e^{-i\epsilon} Ht = H e^{-i\epsilon t} \end{aligned} \quad (45)$$

$\Leftrightarrow t \rightarrow te^{-i\epsilon}$ のように時間軸を回転させることに対応。

もし、 $\epsilon$ を連続的に大きくしていく過程で complex  $t$ -plane に singularityがないとすると、 $\epsilon = \pi/2$ ととってもよい。この場合には

$$t \rightarrow e^{-i\pi/2}t = -it \equiv -i\tau \quad (46)$$

すなわち、あたかも Euclidean space に移行した形となる。

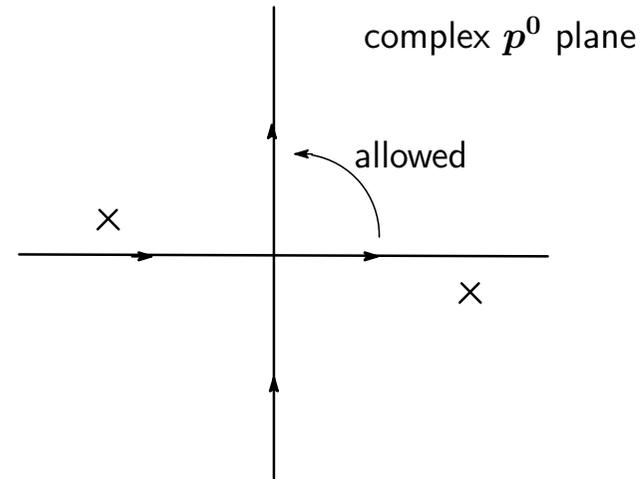
すると

$$i \int dt (\partial_t \phi)^2 \rightarrow i \int d(-i\tau) (i\partial_\tau \phi)^2 = - \int d\tau (\partial_\tau \phi)^2 < 0 \quad (47)$$

⇒ convergence は保証される。

Propagator を見ると、図のように  $p^0$  の contour を反時計回りに虚軸に回しても mass-shell pole を通らない。

⇒ 次のような書き換えができる。



$$\int_{-\infty}^{\infty} dp^0 = i \int_{-\infty}^{\infty} dp_E^0 \quad (48)$$

まとめ:

$$p^0 \rightarrow ip_E^0, \quad t \rightarrow \frac{1}{i}\tau \quad (49)$$

のルールで **Euclid化**することによって収束する amplitude が定義できる。

# 7 Feynman ルールと 生成汎関数

場の理論における最も重要な量 = 相関関数 (Green 関数)

この章の内容

- Green 関数の総体を扱う生成汎関数 (generating functional) の定義と性質
- 生成汎関数を摂動論で求める際に有用な Feynman ルールの導出

## 7.1 Green 関数の generating functional $Z[J]$

簡単のため、 $\phi^4$  理論を例にとる。

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{m}{2} \phi^2 - \frac{\lambda}{4!} \phi^4 \quad (1)$$

$$S[\phi] = \int d^4x \left( \frac{1}{2} \phi K \phi - \frac{\lambda}{4!} \phi^4 \right) \quad (2)$$

$$K = -(\partial^2 + m^2) \quad (3)$$

## 基本場の $n$ 点関数

$$\begin{aligned} G^{(n)}(x_1, x_2, \dots, x_n) &= \langle \phi(x_1) \phi(x_2) \cdots \phi(x_n) \rangle \\ &= \langle 0 | T^*(\phi(x_1) \phi(x_2) \cdots \phi(x_n)) | 0 \rangle \end{aligned} \quad (4)$$

## その経路積分表示

$$G^{(n)}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{N} \int \mathcal{D}\phi e^{iS} \phi(x_1) \phi(x_2) \cdots \phi(x_n) \quad (5)$$

$$N = \int \mathcal{D}\phi e^{iS} \quad (6)$$

すべての  $G^{(n)}$  を同時に扱う標準的な方法: **生成汎関数** (generating functional):

$$\begin{aligned} Z[J] &\equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int d^4x_1 \cdots \int d^4x_n G^{(n)}(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &\quad \cdot (iJ(x_1))(iJ(x_2)) \cdots (iJ(x_n)) \\ &= \frac{1}{N} \int \mathcal{D}\phi \exp(iS[\phi] + iJ \cdot \phi) \end{aligned} \quad (7)$$

$$J \cdot \phi \equiv \int d^4x J(x) \phi(x) \quad (8)$$

- $\phi$  をスピンと見れば、 $J$  は磁場にあたる。
- $(1/i)(\delta/\delta J(x)) \Rightarrow \phi(x)$  が一つ指数関数の肩からおりてくる。

$Z[J]$  を図示すると

$$Z[J] = 1 + \text{diagram}_1 + \text{diagram}_2 + \dots + \text{diagram}_3 + \dots$$

□  $Z[J]$  の摂動展開 :

$\lambda$  が小さいとして、 $Z[J]$  を  $\lambda$  の巾で展開して計算。

$\Rightarrow$  作用を free な部分と相互作用部分に分ける :

$$\begin{aligned} S_0[\phi] &= \int d^4x \frac{1}{2} ((\partial\phi)^2 - m^2\phi^2) \\ &= \int d^4x \frac{1}{2} \phi(-\partial^2 - m^2)\phi \end{aligned} \tag{9}$$

$$S_I[\phi] = -\frac{\lambda}{4!} \int d^4x \phi(x)^4 \tag{10}$$

- 以下 しばらく全体の規格化の因子  $1/N$  は忘れて考える

◇ 自由な理論に対する generating functional  $Z_0[J]$  :

$$Z_0[J] = \int \mathcal{D}\phi \exp(iS_0[\phi] + iJ \cdot \phi) \quad (11)$$

指数部分は  $\phi$  の二次式  $\Rightarrow$  ガウス積分が容易に実行できる:

$$\frac{1}{2}\phi K \phi + J \cdot \phi = \frac{1}{2}(\phi + K^{-1}J)K(\phi + K^{-1}J) - \frac{1}{2}JK^{-1}J \quad (12)$$

$$\therefore Z_0[J] = \exp\left(-\frac{i}{2}JK^{-1}J\right) \quad (13)$$

ここで  $K^{-1}(x, y) = \Delta_F(x - y)$  は Feynman propagator :

$$-(\partial^2 + m^2 - i\epsilon)K^{-1}(x, y) = \delta^4(x - y)$$

$$K^{-1}(x - y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} K^{-1}(p) e^{-ip \cdot (x - y)}$$

$$K^{-1}(p) = \frac{1}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \quad (14)$$

□  $Z[J]$  のうまい書き換え :

$\delta/\delta(iJ)$  を作用  $\Leftrightarrow \phi$  の挿入

$Z[J]$  は次のように書ける

$$Z[J] = G \left[ \frac{\delta}{\delta(iJ)} \right] F[iJ] \quad (15)$$

ここで、

$$G \left[ \frac{\delta}{\delta(iJ)} \right] = \exp \left( iS_I \left[ \underbrace{\delta/\delta(iJ)}_{\sim \phi} \right] \right) \quad (16)$$

$$F[iJ] = \exp \left( \frac{i}{2} (iJ) \Delta_F(iJ) \right) = Z_0[J] = \text{free part} \quad (17)$$

これを  $S_I$  の巾で展開  $\Leftrightarrow$  摂動展開

◇ この展開を得るためのよりうまい方法あり。  $\Rightarrow$  Feynman diagram の規則

まず、自明な書き換えをする

$$G \left[ \frac{\delta}{\delta(iJ)} \right] F[iJ] = G \left[ \frac{\delta}{\delta(iJ)} \right] F[iJ] e^{iJ\phi} \Big|_{\phi=0} \quad (18)$$

$\phi = 0$  と置く前に、これを次のように書き換える

$$G \left[ \frac{\delta}{\delta(iJ)} \right] F[iJ] e^{iJ\cdot\phi} = G \left[ \frac{\delta}{\delta(iJ)} \right] F \left[ \frac{\delta}{\delta\phi} \right] e^{iJ\cdot\phi} \quad (19)$$

$G$  と  $F$  の操作は交換するから、これはさらに次のように書き直せる：

$$= F \left[ \frac{\delta}{\delta\phi} \right] G \left[ \frac{\delta}{\delta(iJ)} \right] e^{iJ\cdot\phi} = F \left[ \frac{\delta}{\delta\phi} \right] G[\phi] e^{iJ\cdot\phi} \quad (20)$$

従って、結局

$$G \left[ \frac{\delta}{\delta(iJ)} \right] F[iJ] = F \left[ \frac{\delta}{\delta\phi} \right] G[\phi] e^{iJ\cdot\phi} \Big|_{\phi=0} \quad (21)$$

これより、 $Z[J]$  に対する非常に便利な表式を得る：

$$(\star) \quad Z[J] = \exp \left( \frac{1}{2} \frac{\delta}{\delta \phi} \Delta \frac{\delta}{\delta \phi} \right) \exp (iS_I[\phi] + iJ \cdot \phi) \Big|_{\phi=0} \quad (22)$$

$$\text{ここで} \quad \Delta = i\Delta_F \quad (23)$$

- $S_I$  で展開  $\Rightarrow$  摂動論
- 記号の簡略化をすると便利 :

$$\frac{\delta}{\delta \phi} \Delta \frac{\delta}{\delta \phi} = \int d^4x_1 d^4x_2 \frac{\delta}{\delta \phi(x_1)} \Delta(x_1 - x_2) \frac{\delta}{\delta \phi(x_2)} = \Delta_{ij} \partial_i \partial_j \quad (24)$$

$$\frac{\delta}{\delta \phi(x_i)} = \partial_i \quad (25)$$

添え字  $i \Leftrightarrow \phi(x_i)$      $\sum_i \Leftrightarrow x_i$  積分。

□ ファインマン図による表現: 簡単な例 :

0点関数 (vacuum bubble):  $\mathcal{O}(J^0)$

基本公式(\*)で  $J = 0$  とおき、 $e^{iS_I}$  を展開。最初の非自明な項

$$iS_I[\phi] = -i\frac{\lambda}{4!}\phi^4 \quad (26)$$

最後に  $\phi = 0$  と置くので、ゼロにならないためには  $\exp(\frac{1}{2}\Delta_{ij}\partial_i\partial_j)$  部分から4つの微分が必要。

これは Taylor 展開の第2項から生ずる。従って求める寄与は

$$\frac{1}{2!} \left( \frac{1}{2} \Delta_{ij} \partial_i \partial_j \right)^2 \left( -i\frac{\lambda}{4!} \phi^4 \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} \right)^2 \left( -i\frac{\lambda}{4!} \right) \Delta_{12} \Delta_{34} \partial_1 \partial_2 \partial_3 \partial_4 \phi_i^4 \quad (27)$$

(1は  $j_1$  の略と考える。)

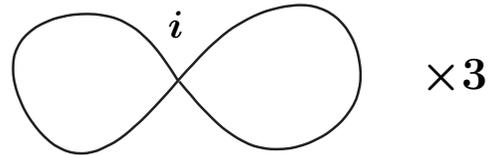
$\partial_i \phi_j = \delta_{ij}$  を用い、同一の添え字に付いては和をとる。

$\partial_4 \phi_i^4 = 4\delta_{4i} \phi_i^3$  のように次々と微分  $\Rightarrow$  因子  $4!$ 。

結果：

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(-i\frac{\lambda}{4!}\right) 4! \Delta_{ii} \Delta_{ii} = \underbrace{\frac{1}{2}(-i\lambda)}_{\text{standard factor}} \times \underbrace{\frac{1}{4}}_{\text{symmetry factor}} \times \Delta_{ii} \Delta_{ii} \quad (28)$$

これは次の2-loop vacuum bubble diagramで表される：



$Z[J=0] = \int \mathcal{D}\phi e^{iS}$  = すべての vacuum bubble diagrams の寄与の和

$\Rightarrow \int \mathcal{D}\phi e^{iS}$  で割ると、すべての vacuum bubble を取り除いたものが得られる。(規格化の意味)

$$Z[J] = \frac{\int \mathcal{D}\phi e^{iS+iJ\cdot\phi}}{\int \mathcal{D}\phi e^{iS}} \quad (29)$$

## 2点関数 (propagator): $\mathcal{O}(J^2)$

$\mathcal{O}(\lambda^0)$ : 自由な (tree level の) propagator

$\mathcal{O}(\lambda)$  1-loop の propagator :

Taylor展開における3次の項  $(S_I + J \cdot \phi)^3 \ni 3S_I J J$  から生ずる。

寄与 :

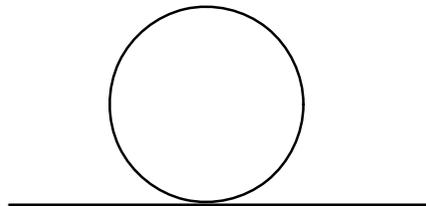
$$\frac{i^3}{3!} \times 3 \times S_I[\phi](J \cdot \phi)^2 = \frac{i^3}{3!} \times 3 \times \left( \frac{-i\lambda}{4!} \right) \phi_i^4 J_j \phi_j J_k \phi_k \quad (30)$$

今度は6個の微分が必要。  $\Leftarrow \exp(\frac{1}{2}\Delta_{ij}\partial_i\partial_j)$  の展開の3次の項。

従って、求める寄与は

$$\frac{i^3}{3!} \times 3 \times \left( \frac{-i\lambda}{4!} \right) \frac{1}{3!} \times \left( \frac{1}{2} \right)^3 J_j J_k \Delta_{12} \Delta_{34} \Delta_{56} \partial_1 \partial_2 \cdots \partial_6 (\phi_i^4 \phi_j \phi_k) \quad (31)$$

Diagram は次の形:



微分の演算は容易だが、若干面倒。

うまい計算の規則 ← 縮約に関する combinatorics の理解

□ 縮約の Combinatorics:

相関関数の計算に関する **ファインマン規則**

combinatorics のルールが非常に規則的になっていることに起因。

● 二つの場の積の場合:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \frac{\delta}{\delta\phi} \Delta \frac{\delta}{\delta\phi} (\phi_1 \phi_2) &= \frac{1}{2} \frac{\delta}{\delta\phi_i} \Delta_{ij} (\delta_{j1} \phi_2 + \phi_1 \delta_{j2}) \\ &= \frac{1}{2} \Delta_{ij} (\delta_{j1} \delta_{i2} + \delta_{j2} \delta_{i1}) \\ &= \Delta_{12} \quad (\because \Delta_{ij} = \Delta_{ji})\end{aligned}$$

●  $2n$  個の積  $\phi_1 \phi_2 \cdots \phi_{2n}$  の場合:

$$\frac{1}{n!} \left( \frac{1}{2} \frac{\delta}{\delta\phi} \Delta \frac{\delta}{\delta\phi} \right)^n (\phi_1 \phi_2 \cdots \phi_{2n}) = \frac{1}{n! 2^n} \left( \frac{\delta}{\delta\phi} \Delta \frac{\delta}{\delta\phi} \right)^n (\phi_1 \phi_2 \cdots \phi_{2n})$$

最初の  $\delta/\delta\phi$  は  $2n$  個の異なる  $\phi_i$  に働く。

二番目の微分  $\delta/\delta\phi$  は残りの  $2n - 1$  の  $\phi_i$  に働く。

これを繰り返す  $\Rightarrow$  微分から生ずる項の数は  $(2n)!$  となる。  
これと  $1/2^n n!$  の因子を組み合わせると

$$\frac{(2n)!}{2^n n!} = \frac{(2n)!!(2n-1)!!}{2^n n!} = (2n-1)!!$$

### この数の理解

Propagators の異なる積の combinations の数を求める。

1つの  $\phi_i$  を選択  $\Rightarrow$  これと pair をなすことができる  $\phi_j$  の数は  $2n - 1$ 。

$\Rightarrow 2n - 1$  個の異なる propagator

のこりの  $2n - 2$  個の  $\phi$  の中からまた1つ選ぶ  $\Rightarrow \Rightarrow 2n - 3$  個の異なる propagator の choice

この操作を繰り返す  $\Rightarrow n$  個の propagator の  $(2n - 1)!!$  通りの異なる積が得られる。



次の簡明な公式

$$\frac{1}{n!} \left( \frac{1}{2} \frac{\delta}{\delta\phi} \Delta \frac{\delta}{\delta\phi} \right)^n (\phi_1 \phi_2 \cdots \phi_{2n}) = \sum_{\text{distinct}} \Delta_{i_1 i_2} \Delta_{i_3 i_4} \cdots \Delta_{i_{2n-1} i_{2n}} \quad (32)$$

右辺の各項の係数は丁度 1: 可能な propagator の組み合わせが一回ずつ実現。

⇒  $\phi_i$  を結ぶ線に一つの propagator を対応させることができる。

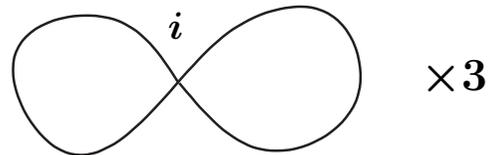
□ Symmetry factor の勘定 :

上記のルールは、相互作用 vertex のように、同一点での場の積を挿入する場合には修正が必要になる。

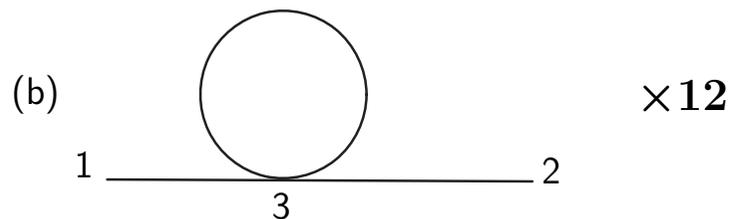
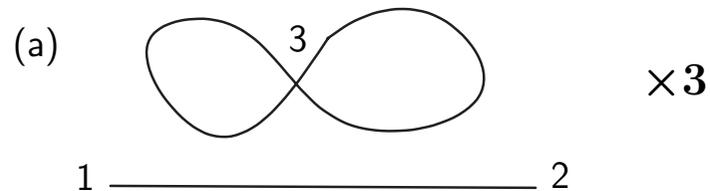
例 1  $\phi^4$ : すべて異なる位置の場合には  $(4 - 1)!! = 3$  通りの diagrams が生成される。これらは次の表式と対応

$$\Delta_{12} \Delta_{34} + \Delta_{13} \Delta_{24} + \Delta_{14} \Delta_{23} \quad (33)$$

しかし、すべての位置が同じ場合には、図としては同一になる。  
 $\Rightarrow$  因子3が掛かる。



例2  $\phi_1\phi_2\phi_3^4$ : すべての位置が異なれば、 $(6 - 1)!! = 15$ 個の異なる図が生成される。実際には独立な図の数は2個。



(a)  $\Delta_{12}$  と vacuum bubble からなる。これに掛かる因子は3。  
 (b)  $\phi_1$  と  $\phi_2$  両方を  $\phi_3^4$  と contract する仕方は  $4 \times 3 = 12$  通り。  
 併せれば正しく 15 個の図に対応

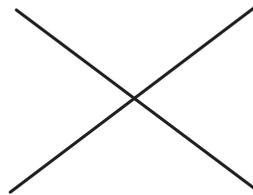
## Symmetry factor の勘定:

- まずすべての点が異なるとして生成される図の数を勘定。
- 次に同一点を同定したときの独立な図をすべて描き、それに対する重複の数を勘定

## 7.2 連結 (connected) グリーン関数に対する生成汎関数 $W[J]$

グリーン関数に寄与する diagrams = **connected** + **disconnected**

4点関数



connected



disconnected

物理的に非自明なダイナミクスを表すのは連結相関関数。

非連結相関関数 = 連結なもの組み合わせ

連結グリーン関数の生成汎関数  $W[J]$  :

$$\begin{aligned} iW[J] &\equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int d^4x_1 \cdots \int d^4x_n G^{(n),c}(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &\quad \cdot (iJ(x_1))(iJ(x_2)) \cdots (iJ(x_n)) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} G_{i_1 i_2 \dots i_n}^{(n),c} (iJ_{i_1})(iJ_{i_2}) \cdots (iJ_{i_n}) \end{aligned} \quad (34)$$

□  $Z[J]$  と  $W[J]$  の関係 :

## 1. Combinatoric Method

$Z[J]$  に寄与する項を連結成分の数で分類。

$n$  個の連結成分を持つ項は  $W[J]^n$  から生ずる。

どの  $W[J]$  の因子から来るかは区別しないので  $n$  個の  $W[J]$  の因子の並べ方の数  $n!$  で割らねばならない。

各  $W[J]$  に  $i$  をつける convention を採用すれば、次の関係を得る :

$$Z[J] = \sum \frac{i^n}{n!} W[J]^n = e^{iW[J]} \quad (35)$$

統計物理との対応:

$W[J] \sim$  Helmholtz の自由エネルギー  $F(V, T)$       $V \sim J, T \sim \hbar$

注: 場を適当に rescale  $\Rightarrow$  温度  $T$  は coupling constant に対応

$\phi^4$  理論の例:  $\phi = \lambda^{-1/2} \chi$  とおいて作用を書き換えると、

$$S = \frac{1}{\lambda} \int d^4x \left( \frac{1}{2} \partial_\mu \chi \partial^\mu \chi - \frac{m}{2} \chi^2 - \frac{1}{4!} \chi^4 \right) \quad (36)$$

$\therefore T \sim \hbar \lambda$

- 全相関関数と連結相関関数の関係の具体例:

$$\langle \phi_i \rangle_c = \frac{1}{Z} \frac{\delta}{\delta i J_i} Z = \frac{\delta i W}{\delta i J_i} = \frac{\delta W}{\delta J_i} \quad (37)$$

$Z$ で割ることで、disconnected diagramsを取り除いている。

2点関数

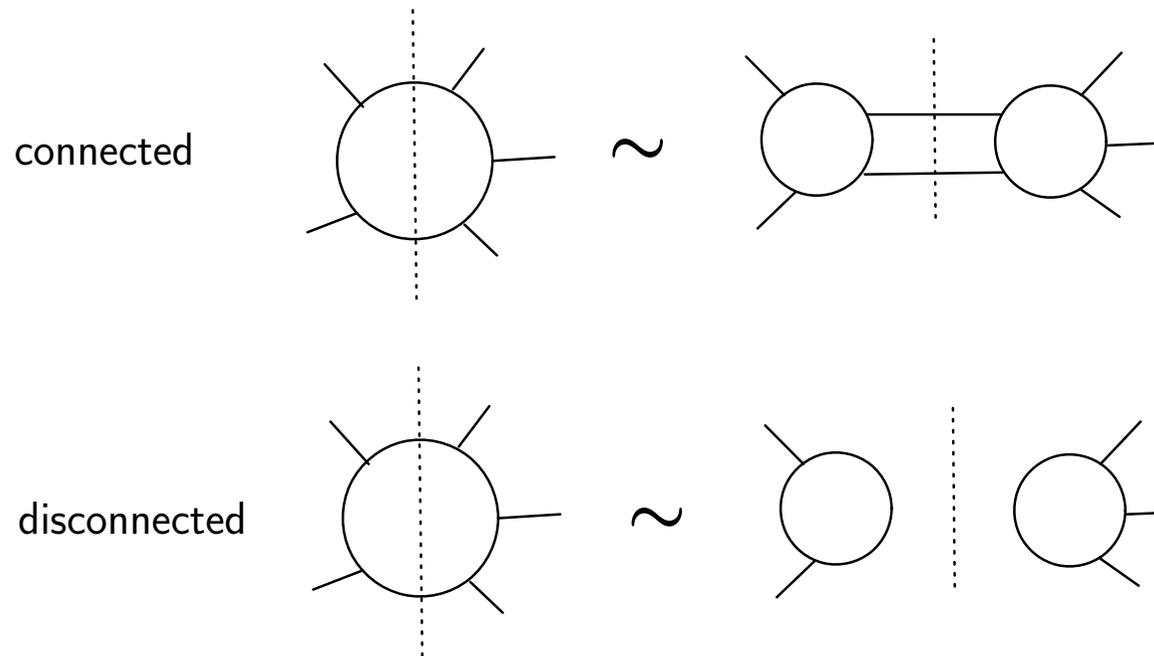
$$\begin{aligned}\langle \phi_i \phi_j \rangle &= \frac{1}{Z} \frac{\delta}{\delta i J_i} \frac{\delta}{\delta i J_j} Z = \frac{1}{Z} \frac{\delta}{\delta i J_i} \left( \frac{\delta i W}{\delta i J_j} Z \right) \\ &= \frac{\delta^2 i W}{\delta i J_i \delta i J_j} + \frac{\delta i W}{\delta i J_i} \frac{\delta i W}{\delta i J_j} \\ &= \langle \phi_i \phi_j \rangle_c + \langle \phi_i \rangle_c \langle \phi_j \rangle_c\end{aligned}\tag{38}$$

## 2. $W[J]$ の物理的な特徴

$W[J]$  が connected な相関関数の母関数の物理的理解

← **cluster decomposition** に対する性質

$N$ -点関数を二つの cluster にわけ、それらを space-like な遠方に引き離す。



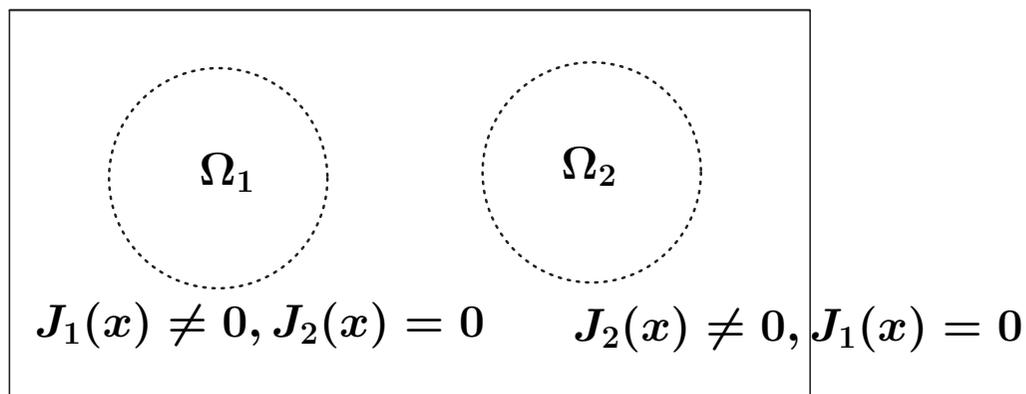
Connectedの場合: 長距離の propagator が現れる  $\Rightarrow$  damp してゼロになる。

Disconnectedの場合: そこで切れば、damp しない。

この違いで、connected graph を区別することができる。



系を有限な箱に入れ、source を局所的な support を持つ二つの部分に分解



$$J(x) = J_1(x) + J_2(x)$$

作用  $S$  が local interaction のみを含むとすると、

$$\begin{aligned}
 S[\phi] + J \cdot \phi &= \int_{\Omega_1} d^n x (\mathcal{L} + J_1 \cdot \phi) + \int_{\Omega_2} d^n x (\mathcal{L} + J_2 \cdot \phi) \\
 &+ \int_{x \notin \Omega_1, \Omega_2} d^n x \mathcal{L} \quad (J_i \text{ に依らない}) + \text{境界 } \partial\Omega_i \text{ からの寄与}
 \end{aligned}
 \tag{39}$$

Generating functional は次のように factorize:

$$Z[J] = Z_1[J_1] \cdot Z_2[J_2] \cdot Z_{12}[J_1, J_2] \tag{40}$$

$$Z_i[J_i] = \int_{x \in \Omega_i} \mathcal{D}\phi e^{i(S + J_i \cdot \phi)}, \quad Z_{12} = \text{境界 } \partial\Omega_i \text{ からの寄与} \tag{41}$$

ここで全系を linear に scale up して、無限大 volume にする。  
 $\Rightarrow$  境界からの寄与  $Z_{12}$  は無視できる。  $Z = e^{iW}$  を用いると

$$W[J] = W_1[J_1] + W_2[J_2] \quad (42)$$

これを  $J$  の巾で展開して連結相関関数を定義。

$$\begin{aligned} iW[J] &= \sum \frac{1}{n!} \int dx_1 dx_2 \cdots dx_n iG_c^{(n)}(x_1, \dots, x_n) (iJ(x_1)) \cdots (iJ(x_n)) \\ &= \sum \frac{1}{n!} \int dx_1 \cdots dx_p dy_{p+1} \cdots dy_n \\ &\quad \times iG_c^{(n)}(x_1, \dots, x_p, y_{p+1}, \dots, y_n) i^n J_1(x_1) \cdots J_1(x_p) \\ &\quad \times J_2(y_{p+1}) \cdots J_2(y_n) \\ &\quad x_i \in \Omega_1, \quad y_j \in \Omega_2 \end{aligned}$$

この表式が  $iW_1[J_1] + iW_2[J_2]$  と分解しなければならない。

⇒ 二つの source が混合した部分はゼロとなる必要あり。

$$G_c^{(n)}(x_1, \dots, x_p, y_{p+1} \dots y_n) \longrightarrow 0 \quad \text{as } \min |x_i - y_j| \rightarrow \infty \quad (43)$$

これはまさしく **connected な相関関数** がもつ性質  
 Disconnected diagrams は これを満たさない。

- 注：これは非摂動論的にも成立する

### 7.3 1PI グラフに対する生成汎関数 = 有効作用

- $W[J] \Leftrightarrow$  Helmholtz の自由エネルギー  $F(V, T)$
- **有効作用  $\Gamma[\Phi]$**   $\Leftrightarrow$  Gibbs の自由エネルギー  $G(P, T)$

$V \leftrightarrow J$  から  $P \leftrightarrow \Phi_i$  への Legendre 変換で得られる。

$$\Phi_i \equiv \frac{\delta iW}{\delta iJ_i} = \frac{\delta W}{\delta J_i} = \langle \phi_i \rangle_c \text{ in the presence of } J_i \quad (44)$$

$$(-i\Gamma[\Phi]) \equiv (iJ_i)\Phi_i - iW \quad \Rightarrow \quad \Gamma[\Phi] = W - J_i\Phi_i \quad (45)$$

(44) を逆に解いた式も非常に重要。(45) を  $\Phi_i$  で汎関数微分すると、

$$\begin{aligned}\frac{\delta(-i\Gamma)}{\delta\Phi_i} &= \frac{\delta(-i(W - J_i\Phi_i))}{\delta\Phi_i} = -\frac{\delta iW}{\delta\Phi_i} + \frac{\delta iJ_j}{\delta\Phi_i}\Phi_j + iJ_i \\ &= -\frac{\delta iJ_j}{\delta\Phi_i}\frac{\delta W}{\delta J_j} + \frac{\delta iJ_j}{\delta\Phi_i}\Phi_j + iJ_i\end{aligned}\quad (46)$$

(44) より、第1項と2項はキャンセルするから、

$$\frac{\delta(-i\Gamma)}{\delta\Phi_i} = iJ_i \quad \Rightarrow \quad \frac{\delta\Gamma}{\delta\Phi_i} = -J_i\quad (47)$$

注:  $-i\Gamma, iW, iJ$  のように適当に  $i$  をつけたものを基本と考えると、統計物理との対応が良くなると同時に、符号の規則が系統的になる。

□  $\Gamma[\Phi]$  の意味 :

具体的に  $\Gamma[\Phi]$  を計算して、その意味を見る。

- **2点関数:** (47) の左側の式を  $iJ_i$  で微分すると

$$\delta_{ij} = \frac{\delta^2(-i\Gamma)}{\delta iJ_i \delta \Phi_j} = \frac{\delta \Phi_k}{\delta iJ_i} \frac{\delta^2(-i\Gamma)}{\delta \Phi_k \delta \Phi_j} = \langle \phi_i \phi_k \rangle \frac{\delta^2(-i\Gamma)}{\delta \Phi_k \delta \Phi_j} \quad (48)$$

従って

$$\frac{\delta^2(-i\Gamma)}{\delta \Phi_k \delta \Phi_j} = \langle \phi_k \phi_j \rangle^{-1} \quad (49)$$

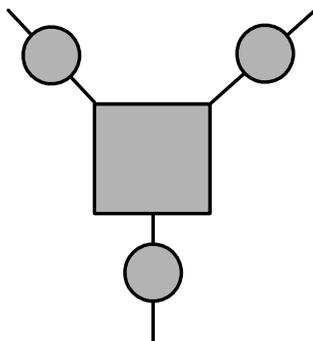
これは inverse propagator、すなわち wave operator を表す。

- **3点関数:** (48) を  $iJ_\ell$  で微分すると、

$$0 = \langle \phi_i \phi_k \phi_\ell \rangle \langle \phi_k \phi_j \rangle^{-1} + \langle \phi_i \phi_k \rangle \langle \phi_\ell \phi_m \rangle \frac{\delta^3(-i\Gamma)}{\delta \Phi_m \delta \Phi_k \delta \Phi_j}$$

$$\therefore \langle \phi_i \phi_j \phi_k \rangle = \langle \phi_i \phi_{i'} \rangle \langle \phi_j \phi_{j'} \rangle \langle \phi_k \phi_{k'} \rangle \frac{i\delta^3\Gamma}{\delta \Phi_{i'} \delta \Phi_{j'} \delta \Phi_{k'}} \quad (50)$$

これは、propagator の足を取り去った amputated 3-point function を表す。

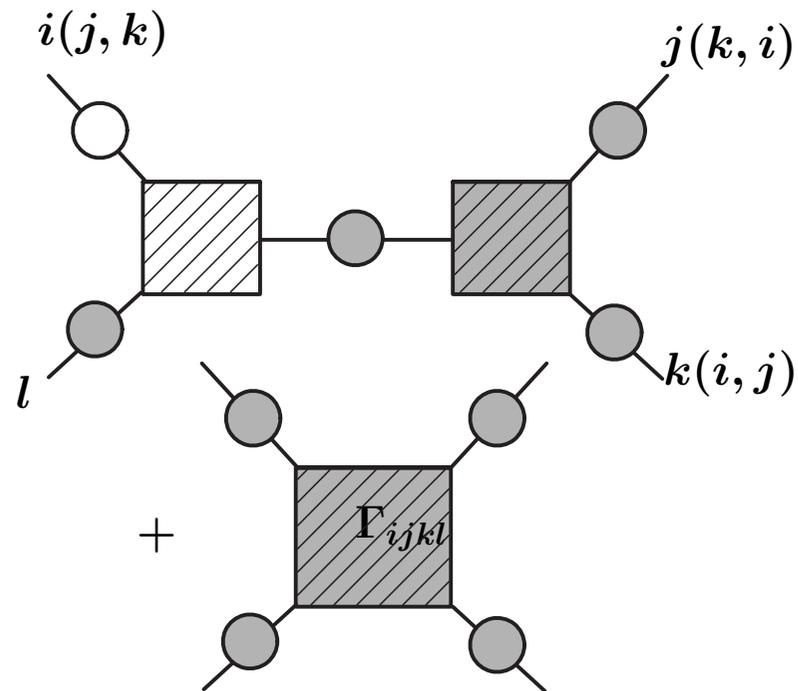


- この式をさらに  $iJ_\ell$  で微分すると、

$$\langle \phi_i \phi_j \phi_k \phi_\ell \rangle = \frac{\delta}{\delta iJ_\ell} (\langle \phi_i \phi_{i'} \rangle \langle \phi_j \phi_{j'} \rangle \langle \phi_k \phi_{k'} \rangle) \frac{i\delta^3 \Gamma}{\delta \Phi_{i'} \delta \Phi_{j'} \delta \Phi_{k'}} + \langle \phi_i \phi_{i'} \rangle \langle \phi_j \phi_{j'} \rangle \langle \phi_k \phi_{k'} \rangle \langle \phi_\ell \phi_{\ell'} \rangle \frac{i\delta^4 \Gamma}{\delta \Phi_{i'} \delta \Phi_{j'} \delta \Phi_{k'} \delta \Phi_{\ell'}}$$

1行目の微分  $\Rightarrow$  3つの connected 3-pt functions を生み出す  
 これらはそれぞれ上記の公式(50)を用いて  $\Gamma^{(3)}$  で書き直せる。





予想:  $\Gamma = 1$  粒子線で切って二つに分けられないような  
**1 粒子既約 (1-particle-irreducible=1PI)** なグラフの総体

$$\Gamma_{i_1 i_2 \dots i_n} \equiv \frac{i \delta^n \Gamma}{\delta \Phi_{i_1} \delta \Phi_{i_2} \dots \delta \Phi_{i_n}} \quad (51)$$

$$\Gamma = \frac{i}{2} \Phi_i G_{ij}^{-1} \Phi_j - i \sum \frac{1}{n!} \Gamma_{i_1 i_2 \dots i_n} \Phi_{i_1} \Phi_{i_2} \dots \Phi_{i_n} \quad (52)$$

2点関数のみ少し例外

$$\Gamma_{ij} \equiv -G_{ij}^{-1} \quad (53)$$

□ Tree levelでの作用との比較：

Tree levelでは $\Gamma$ はもともとの作用と一致。

例 Scalar理論 (積分記号を省略)

$$\begin{aligned} \Gamma^{(0)} &= \frac{1}{2} \Phi_i (\Delta_F^{-1})_{ij} \Phi_j - \sum \frac{1}{n!} \lambda_{i_1 i_2 \dots i_n} \Phi_{i_1} \Phi_{i_2} \dots \Phi_{i_n} \\ &= \frac{i}{2} \Phi_i \Delta_{ij}^{-1} \Phi_j - \sum \frac{1}{n!} \lambda_{i_1 i_2 \dots i_n} \Phi_{i_1} \Phi_{i_2} \dots \Phi_{i_n} \end{aligned} \quad (54)$$

上記の一般形と比較すると

$$\Gamma_{i_1 i_2 \dots i_n}^{(0)} = -i \lambda_{i_1 i_2 \dots i_n} \quad (55)$$

□  $\Gamma$  の物理的有用性 :

$$\frac{\delta\Gamma}{\delta\Phi_i} = -J_i = 0 \quad (56)$$

外部 source をゼロにする条件。  $\Leftrightarrow$  量子効果も含めた運動方程式

- $S$  行列との関係

#### 7.4 $\Gamma[\Phi]$ が 1PI diagram の生成汎関数であることの証明

**1PI diagram**  $\Leftrightarrow$  どの1本のline(propagator)を切断しても diagram はまだ connected

Effective action  $\Gamma[\Phi]$  がこのような diagrams の生汎関数になっていることを以下で示す。(以下では 簡単のため  $\Phi$  の代わりに  $\phi$  と書く。)

□ Propagator を切断する trick:

作用を次のように少し modify :

$$S_\epsilon = \frac{1}{2} \int dx dy \phi(x) \phi(y) [K(x, y) + \epsilon] + V(\phi) \quad (57)$$

$$K(x, y) = \text{wave operator}, \quad \epsilon = \text{small parameter} \quad (58)$$

Modified propagator  $\Delta_\epsilon$  を次のように定義 :

$$\int dz \Delta_\epsilon(x, z) [K(z, y) + \epsilon] = \delta(x - y) \quad (59)$$

$\Delta_\epsilon$  を  $\epsilon$  の巾で展開

$$\Delta_\epsilon = \Delta + \epsilon \Delta^{(1)} + \dots \quad (60)$$

$$\Delta = K^{-1} = \text{通常} \text{の propagator} \quad (61)$$

(59) の  $\epsilon$  の一次の項は

$$\epsilon \int dz \left[ \Delta(x, z) + \Delta^{(1)}(x, z) \underbrace{\Delta^{-1}}_K(z, y) \right] = 0 \quad (62)$$

$\Delta(y, w)$  を掛けて  $y$  で積分

$$\int dz \Delta(x, z) \int dy \Delta(y, w) + \Delta^{(1)}(x, w) = 0 \quad (63)$$

ここで  $\eta(x) \equiv \int dz \Delta(x, z)$  と定義

$$\Delta^{(1)}(x, y) = -\eta(x)\eta(y) \quad (64)$$

従って、modified propagator は次の構造を持つ：

$$\Delta_\epsilon(x, y) = \Delta(x, y) - \epsilon \eta(x)\eta(y) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (65)$$

$\epsilon$  の一次の項は factorize しているので、これを insert すると、Feynman diagram の対応する line が切断される。

∴ 示すべきこと：  $\Delta_\epsilon$  を用いて構成した  $\Gamma_\epsilon[\phi]$  において、 $\mathcal{O}(\epsilon)$  で生成される diagrams が依然としてすべて connected であること。

□  $\Gamma_\epsilon[\phi]$  の構成 :

まず  $Z_\epsilon[J]$  を  $\mathcal{O}(\epsilon)$  まで構成。

作用に付け加えた余分な  $\epsilon$  に比例する項を考慮すると、

$$\begin{aligned} Z_\epsilon[J] &\equiv e^{iW_\epsilon[J]} = \int \mathcal{D}\phi \left( 1 + i\frac{\epsilon}{2} \int dx dy \phi(x)\phi(y) \right) e^{i(S+J\cdot\phi)} + \mathcal{O}(\epsilon^2) \\ &= \left( 1 + i\frac{\epsilon}{2} \int dx dy \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(x)} \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(y)} \right) e^{iW[J]} + \dots \\ &= \left( 1 + i\frac{\epsilon}{2} \left[ \left( \int dx \frac{\delta W}{\delta J(x)} \right)^2 + \frac{1}{i} \int dx dy \frac{\delta^2 W}{\delta J(x)\delta J(y)} \right] \right) e^{iW[J]} + \dots \end{aligned}$$

従って、

$$W_\epsilon[J] \simeq W[J] + \frac{\epsilon}{2} \left[ \left( \int dx \frac{\delta W}{\delta J(x)} \right)^2 + \frac{1}{i} \int dx dy \frac{\delta^2 W}{\delta J(x)\delta J(y)} \right] \quad (66)$$

$\mathcal{O}(\epsilon)$  の第一項は disconnect されているので、 $\Gamma$  に行くと落ちる。

次に Legendre 変換を行う。

- $W[J]$  が global parameter  $\epsilon$  によっている場合の Legendre 変換の性質: 定義より、

$$\Gamma[\phi] = W[J, \epsilon] - \int dx J(x)\phi(x) \quad (67)$$

$$\phi(x) = \frac{\delta W[J, \epsilon]}{\delta J(x)} = \epsilon\text{-dependent} \quad (68)$$

$\Gamma[\phi]$  を  $\epsilon$  で微分する。左辺には chain rule を用いる:

$$LHS = \frac{\partial \Gamma}{\partial \epsilon} + \int dx \frac{\partial \phi(x)}{\partial \epsilon} \frac{\delta \Gamma}{\delta \phi(x)} \quad (69)$$

$$RHS = \frac{\partial W}{\partial \epsilon} - \int dx J(x) \frac{\partial \phi(x)}{\partial \epsilon} \quad (70)$$

ここで  $\epsilon = 0$  とおくと、左辺第二項の  $\delta \Gamma / \delta \phi(x)$  は  $-J(x)$  に等しくなるから、

$$\left. \frac{\partial \Gamma}{\partial \epsilon} \right|_{\epsilon=0} = \left. \frac{\partial W}{\partial \epsilon} \right|_{\epsilon=0} \quad (71)$$

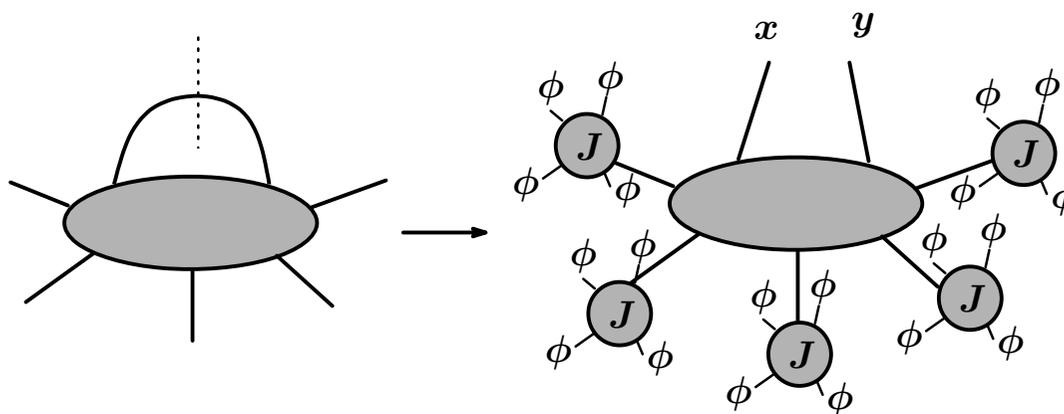
⇒  $\epsilon$  の一次の項は  $\Gamma$  と  $W$  で相等しい。従って (66) より

$$\Gamma_\epsilon[\phi] = \Gamma[\phi] + \frac{\epsilon}{2} \int dx dy \phi(x)\phi(y) + \frac{\epsilon}{2i} \int dx dy \frac{\delta^2 W}{\delta J(x)\delta J(y)} + \dots \quad (72)$$

第2項はもともとの action に加えた項であり、無視してよい。

第3項は source がある場合の connected propagator を表している。

∴ **一つの内線を cut しても (すなわち  $\mathcal{O}(\epsilon)$  で) まだ connected になっている。** 図示すると、



従って  $\Gamma[\phi]$  が 1PI diagram の generating function であることが証明された。

## 8 $\lambda\phi^4$ 理論の摂動論

- $\lambda\phi^4$  理論を例にとり、摂動論を用いた相関関数の計算を述べる。

### 8.1 繰り込まれた摂動展開

Bare Lagrangian

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial^\mu \phi_0 \partial_\mu \phi_0 - \frac{1}{2} m_0^2 \phi_0^2 - \frac{\lambda_0}{4!} \phi_0^4 \quad (1)$$

Bare な量:  $\phi_0, m_0, \lambda_0$  = 量子補正を取り入れる前の (short distance での) 量。

この Lagrangian の quadratic part を 0 次の Lagrangian と考え、 $\frac{\lambda_0}{4!} \phi_0^4$  項を摂動として扱うことが考えられるが、この分解は余り有用でない。

**理由:** 相互作用のために、場の normalization や、coupling の大きさが各次数で変更を受ける。

通常の量子力学の摂動論でも起こる。(例: 波動関数の再規格化)。

特に local field theory の場合は、こうした変更が発散を含むのでやっかい。

↓

はじめから、相互作用をいれた結果として正しく規格化されているような場や coupling (mass も含む) を考え、それを用いて記述するのが便利。こうした量を **繰り込まれた量 (renormalized quantities)** と呼ぶ。

### □ Renormalized Quantities

繰り込まれた (= 再規格化された) 場  $\phi$  を次のように定義。 $Z$  は相互作用によって生ずる効果を現す。

$$\phi_0 = Z^{1/2} \phi, \quad Z = 1 + \delta_Z \quad (2)$$

⇒

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} Z (\partial_\mu \phi)^2 - \frac{1}{2} (m_0^2 Z) \phi^2 - \frac{1}{4!} (\lambda_0 Z^2) \phi^4 \quad (3)$$

- 繰り込まれた mass  $m$  と coupling constant  $\lambda$  を次のように同定：

$$Z = 1 + \delta_Z \quad (4)$$

$$m_0^2 Z = m^2 + \delta_m \quad (5)$$

$$\lambda_0 Z^2 = \lambda + \delta_\lambda \quad (6)$$

⇒ 繰り込まれた量による Lagrangian

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_\lambda + \mathcal{L}_c \quad (7)$$

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2 - \frac{1}{2}m^2\phi^2 \quad (8)$$

$$\mathcal{L}_\lambda = \frac{\lambda}{4!}\phi^4 \quad (9)$$

$$\mathcal{L}_c = \frac{1}{2}\delta_Z(\partial_\mu\phi)^2 - \frac{1}{2}\delta_m\phi^2 - \frac{\delta_\lambda}{4!}\phi^4 = \text{counter terms} \quad (10)$$

- $\mathcal{L}_\lambda$  及び  $\mathcal{L}_c$  を相互作用として扱う。
- 繰り込み可能な理論： これだけの counter terms ですべての繰り込みが処理できる。

□ 繰り込み条件:

$\phi, m, \lambda =$  実際の観測量  $\Rightarrow$  これらの定義を観測と関係づけた形で定義

- 2点関数、及び4点関数の値を適当な運動量の配位で指定

⇔ 「繰り込み条件」

そうした条件が満たされるように摂動の各字数で  $\delta_Z, \delta_m$  や  $\delta_\lambda$  を調整。

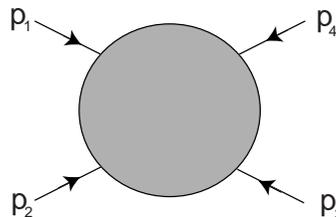
## 繰り込み条件の選択

よく用いられる 3 種類の繰り込み条件の指定の仕方：

◆ **On-shell 繰り込み** : 実際の観測と最も直接的に対応。

$$G^{(2)}(p) \Big|_{p^2=m^2} = \frac{i}{p^2 - m^2} + \text{finite} \quad (11)$$

$$\Gamma^{(4)}(\{p_i\}) \Big|_{\substack{p_i^2=m^2 \\ \sum_i p_i=0}} = \lambda \quad (12)$$



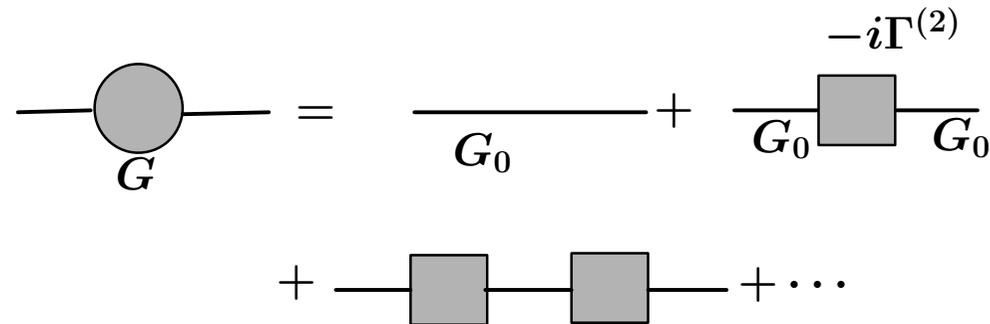
## より便利な2点関数の繰り込み条件の形

$\Gamma^{(2)}$  に対するものに書き換える。

$G = G^{(2)}$  = full propagator     $G_0$  = tree level propagator

$\Gamma^{(2)} = m^2$  の補正に対応する vertex

⇒  $G$  と  $\Gamma^{(2)}$  の関係図：



式で表すと

$$\begin{aligned}
 G &= G_0 + G_0(-i\Gamma^{(2)})G_0 + G_0(-i\Gamma^{(2)})G_0(-i\Gamma^{(2)})G_0 \\
 &= G_0 \left( 1 + (-i\Gamma^{(2)})G_0 + \dots \right) = G_0 \frac{1}{1 + i\Gamma^{(2)}G_0} \\
 &= \frac{1}{G_0^{-1} + i\Gamma^{(2)}} = \frac{i}{p^2 - m^2 - \Gamma^{(2)}}
 \end{aligned} \tag{13}$$

$\Gamma^{(2)}$  を  $p^2 = m^2$  の周りで展開

$$\Gamma^{(2)}(p^2) = \Gamma^{(2)}(m^2) + (p^2 - m^2) \frac{\partial \Gamma^{(2)}}{\partial p^2}(m^2) + \dots \quad (14)$$

すると

$$\begin{aligned} G^{(2)}(p) &= \frac{i}{p^2 - m^2 - \Gamma^{(2)}} \\ &= \frac{i}{p^2 - m^2 - \Gamma^{(2)}(m^2) - (p^2 - m^2) \frac{\partial \Gamma^{(2)}}{\partial p^2}(m^2) + \dots} \\ &\simeq \frac{i}{p^2 - m^2} + \text{finite} \end{aligned} \quad (15)$$

$\Leftrightarrow$

$$\Gamma^{(2)}(p^2 = m^2) = 0, \quad \frac{\partial \Gamma^{(2)}}{\partial p^2}(p^2 = m^2) = 0$$

## 4点関数の繰り込み条件の追加

4個の運動量からなる独立な scalar 積  $p_i \cdot p_j$  の数  $= 4 + \binom{4}{2} = 10$   
繰り込み条件 (12) はこのうち8個しか fix しない。

$$\begin{cases} p_i^2 = m^2, & i = 1 \sim 4 \\ p_4^2 = (p_1 + p_2 + p_3)^2 = m^2, \text{ etc} & 4 \text{ equations} \end{cases} \quad (16)$$

⇒ 2個の独立量がまだ残っている。

最も便利な Mandelstam variables を用いてこれを確かめる。

$$s \equiv (p_1 + p_2)^2 = p_1^2 + p_2^2 + 2p_1 \cdot p_2 = 2(m^2 + p_1 \cdot p_2) \quad (17)$$

$$t \equiv (p_1 + p_3)^2 = 2(m^2 + p_1 \cdot p_3) \quad (18)$$

$$u \equiv (p_1 + p_4)^2 = 2(m^2 + p_1 \cdot p_4) \quad (19)$$

これらの間には

$$s + t + u = 4m^2 \quad (20)$$

なる関係あり。

⇒ **条件  $t = u = 0$  (従って  $s = 4m^2$ ) をさらに課す。**

◆ **0-momentum 繰り込み** :

BPHZ(Bogoliubov, Parasiuk, Hepp, Zimmermann) 繰り込み処方で使われる。繰り込み条件はすべて  $p_i = 0$  で付ける。

On-shell繰り込み処方とは有限繰り込みで結ばれる。

◆ **Euclidean off-shell 繰り込み**

Massless 粒子が存在する場合: 上記の二つの繰り込み条件では赤外発散が生ずる。

解決法: 運動量を Euclidean off-shell に解析接続して  $p_i^2 = -\mu^2$  等の配位で繰り込み条件をつける。

実験と対応させるためには後で適当な有限繰り込みが必要。

## 8.2 Feynman diagram の計算に必要な公式

### 8.2.1 公式集

(証明は後述)

□ Feynman Parameter 積分公式 :

$$\frac{1}{AB} = \int_0^1 dx \frac{1}{[Ax + B(1-x)]^2}$$

$$\frac{1}{ABC} = \int_0^1 2y dy \int_0^1 dx \frac{1}{[Ayx + By(1-x) + c(1-y)]^3}$$

$$\frac{1}{A_1 A_2 \cdots A_N} = (N-1)! \int_0^1 \prod_{i=1}^N d\alpha_i \frac{1}{[\sum_i \alpha_i A_i]^N} \delta(1 - \sum_i \alpha_i)$$

$A, B, \dots \sim p^2 - m^2$  etc.

□ 次元正則化された運動量積分 (in Minkowski space):

$$\eta \equiv \frac{n}{2}, \quad \alpha = \text{正の整数} \quad (21)$$

$$\int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{1}{(k^2 - \Delta)^\alpha} = \frac{(-1)^\alpha i \Gamma(\alpha - \eta)}{(4\pi)^\eta \Gamma(\alpha)} \Delta^{-\alpha + \eta} \quad (22)$$

$$\int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{k^2}{(k^2 - \Delta)^\alpha} = \eta \frac{(-1)^{\alpha-1} i \Gamma(\alpha - \eta - 1)}{(4\pi)^\eta \Gamma(\alpha)} \Delta^{-\alpha + \eta + 1} \quad (23)$$

$$\int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{k^\mu k^\nu}{(k^2 - \Delta)^\alpha} = \frac{\eta^{\mu\nu} (-1)^{\alpha-1} i \Gamma(\alpha - \eta - 1)}{2 (4\pi)^\eta \Gamma(\alpha)} \Delta^{-\alpha + \eta + 1} \quad (24)$$

$$\int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{(k^2)^2}{(k^2 - \Delta)^\alpha} = \frac{n(n+2) (-1)^{\alpha-1} i \Gamma(\alpha - \eta - 1)}{2 (4\pi)^\eta \Gamma(\alpha)} \Delta^{-\alpha + \eta + 2} \quad (25)$$

$$\int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{k^{\mu_1} k^{\mu_2} k^{\mu_3} k^{\mu_4}}{(k^2 - \Delta)^\alpha} = \frac{1}{4} (\eta^{\mu_1 \mu_2} \eta^{\mu_3 \mu_4} + \eta^{\mu_1 \mu_3} \eta^{\mu_2 \mu_4} + \eta^{\mu_1 \mu_4} \eta^{\mu_2 \mu_3}) \times \frac{(-1)^{\alpha-1} i \Gamma(\alpha - \eta - 2)}{(4\pi)^\eta \Gamma(\alpha)} \Delta^{-\alpha + \eta + 2} \quad (26)$$

□ Momentum Cut-offによる正則化 (Euclidean) :

$$\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 - \Delta} = \frac{i}{16\pi^2} \left( -\Lambda^2 + \Delta \ln \frac{\Lambda^2}{\Delta} \right)$$

$$\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - \Delta)^2} = \frac{\partial}{\partial \Delta} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 - \Delta} = \frac{i}{16\pi^2} \left( \ln \frac{\Lambda^2}{\Delta} - 1 \right)$$

□ ふたつの方法の比較 :

次元正則化で、 $\epsilon \equiv 2 - (n/2)$  (すなわち、 $n = 4 - 2\epsilon$ ) とおくと、

$$\int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{1}{k^2 - \Delta} = \frac{i}{16\pi^2} \left[ \left( \frac{1}{\epsilon} + \ln 4\pi - \gamma + 1 \right) \Delta - \Delta \ln \Delta \right]$$

$$\int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{1}{(k^2 - \Delta)^2} = \frac{i}{16\pi^2} \left( \frac{1}{\epsilon} + \ln 4\pi - \gamma - \ln \Delta \right)$$

運動量正則化と比較すると、次の対応がある :

$$\ln \Lambda^2 \leftrightarrow \frac{1}{\epsilon} + \ln 4\pi - \gamma + 1 \quad (27)$$

注：次元正則化では二次発散は捉えられないことに注意。

□  $\Gamma$  関数とその性質：

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} dt e^{-t} t^{z-1} \quad (28)$$

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \quad (29)$$

$$\Gamma(1) = 1, \quad \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi} \quad (30)$$

$$\epsilon \equiv \frac{4-n}{2} \ll 1, \quad \gamma = \text{Euler's constant} = 0.5772 \dots (31)$$

$$\Gamma(\epsilon) = \frac{1}{\epsilon} - \gamma + \frac{1}{2} \left( \gamma^2 + \frac{\pi^2}{6} \right) \epsilon + \mathcal{O}(\epsilon^2) (32)$$

$$\Gamma(\epsilon - 1) = -\frac{1}{\epsilon} + (\gamma - 1) - \frac{1}{2} \left( \gamma^2 - 2\gamma + \frac{\pi^2}{6} \right) \epsilon + \mathcal{O}(\epsilon^2) (33)$$

$$\Gamma(\epsilon - n) = \frac{(-1)^n}{n!} \left[ \frac{1}{\epsilon} + \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right) - \gamma \right] + \mathcal{O}(\epsilon) (34)$$

## 8.2.2 公式の導出

□ Feynman Parameter 公式の導出 :

出発点: “proper-time” 積分公式 :

$$\frac{1}{A} = \frac{1}{i} \int_0^\infty d\tau e^{i\tau A}, \quad \text{Im } A > 0 (35)$$

これを各因子  $1/A_i$  に対して適用し、最後に  $\delta$ -function を挿入

$$\frac{1}{A_1 A_2 \cdots A_N} = \frac{1}{i^N} \int_0^\infty \prod_{i=1}^N d\tau_i \exp \left( i \sum_{i=1}^N \tau_i A_i \right) \quad (36)$$

$$= \frac{1}{i^N} \int_0^\infty d\lambda \int_0^\infty \prod_{i=1}^N d\tau_i \exp \left( i \sum_{i=1}^N \tau_i A_i \right) \delta \left( \lambda - \sum_i \tau_i \right) \quad (37)$$

スケール変換をして新変数  $\alpha_i$  に移る:

$$\tau_i = \lambda \alpha_i \quad (38)$$

$\alpha_i$  はすべて正であり  $0 \leq \alpha_i \leq 1$  であるから、 $(\delta(\lambda - \lambda \sum \alpha_i) = \frac{1}{\lambda} \delta(1 - \sum \alpha_i)$  を用いて)

$$\frac{1}{A_1 A_2 \cdots A_N} = \frac{1}{i^N} \int_0^\infty d\lambda \lambda^N \int_0^1 \prod_{i=1}^N d\alpha_i \exp \left( i \lambda \sum_{i=1}^N \alpha_i A_i \right) \frac{1}{\lambda} \delta \left( 1 - \sum_i \alpha_i \right) \quad (39)$$

$\lambda$ 積分は次のように実行できる：

$$\begin{aligned}
 \int_0^\infty d\lambda \lambda^{N-1} e^{i\lambda B} &= \left( \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial B} \right)^{N-1} \int_0^\infty d\lambda e^{i\lambda B} \\
 &= \left( \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial B} \right)^{N-1} \frac{i}{B} = (-i)^{N-1} i (-1)^{N-1} (N-1)! B^{-N} \\
 &= i^N (N-1)! B^{-N} \tag{40}
 \end{aligned}$$

⇒ 基本公式：

$$\frac{1}{A_1 A_2 \cdots A_N} = (N-1)! \int_0^1 \prod_{i=1}^N d\alpha_i \frac{1}{[\sum_i \alpha_i A_i]^N} \delta(1 - \sum_i \alpha_i) \tag{41}$$

注：(36)の段階で、運動量の積分はGaussian。これを実行しても得られる。

□ 次元正則化された運動量積分公式の導出 :

### 基本的積分

$$J \equiv \int d^n k \frac{1}{k^2 - \Delta} \quad (42)$$

● 他の積分はこれを  $\Delta$  で微分するか、またはテンソル構造に対する置き換えをすれば得られる。

(1)  $k_0$  積分を分離

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} dk_0 d^{n-1} k \frac{1}{k_0^2 - (\vec{k}^2 + \Delta - i\epsilon)} \quad (43)$$

極は  $k_0 = \pm(\sqrt{\vec{k}^2 + \Delta - i\epsilon})$  にある。

積分は上半平面および下半平面の無限遠の境界で十分に早く damp する

⇒ 積分路を上半平面で閉じるようにして極  $k_0 = -\sqrt{\vec{k}^2 + \Delta + i\epsilon}$  からの寄与をひろう。

⇓

$$\begin{aligned}
J &= \frac{2\pi}{i} \frac{1}{2} \int d^{n-1}k \frac{1}{\sqrt{\vec{k}^2 + \Delta} - i\epsilon} \\
&= \frac{\pi}{i} \int d\Omega_{n-2} \int_0^\infty \omega^{n-2} d\omega \frac{1}{\sqrt{\omega^2 + \Delta}}, \quad (\omega^2 = \vec{k}^2) \\
\int d\Omega_{n-2} &= S^{n-2} \text{の表面積} = \frac{2\pi^{(n-1)/2}}{\Gamma((n-1)/2)} \tag{44}
\end{aligned}$$

$\omega = \sqrt{\Delta} t$ とおくと、 $J$  は次のように書き換えられる：

$$J = \frac{\pi}{i} \frac{2\pi^{(n-1)/2}}{\Gamma((n-1)/2)} \Delta^{(n-2)/2} \int_0^\infty dt \frac{t^{n-2}}{\sqrt{t^2 + 1}} \tag{45}$$

$t$ 積分は  $n < 2$  のとき収束。この領域で計算して結果を解析接続。  
積分を実行するには、 $t = \tan \theta$  とおけばよい。

↓

$$\int_0^\infty dt \frac{t^{n-2}}{\sqrt{t^2+1}} = \int_0^{\pi/2} d\theta \sin^{n-2} \theta \cos^{1-n} \theta = \frac{1}{2} B\left(\frac{n-1}{2}, \frac{2-n}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\Gamma(\eta - \frac{1}{2})\Gamma(1 - \eta)}{\Gamma(\frac{1}{2})}, \quad \left( B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} = \text{Euler's beta} \right)$$

これより次の公式を得る：

$$J = \frac{\pi^\eta}{i} \Gamma(1 - \eta) \Delta^{\eta-1} \quad (46)$$

□ Momentum Cut-off 法の公式の導出：

基本的積分

$$J_1 \equiv \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 - \Delta}, \quad \text{Im } \Delta < 0 \quad (47)$$

$k_0$  積分に関する極:  $k_0 = \pm \left( \sqrt{\vec{k}^2 + \Delta} - i\epsilon \right)$   
 実軸に沿った積分路を反時計回りに回して極に出会わずに虚軸に沿った積分路にすることができる。  $\Rightarrow k_0 = i\tilde{k}_0 \Rightarrow$  ユークリッド空間での積分

$$J_1 = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{\infty} i d\tilde{k}_0 \frac{-1}{k_E^2 + \Delta} = \frac{1}{i} \int \frac{d^4k_E}{(2\pi)^4} \frac{1}{k_E^2 + \Delta} \quad (48)$$

角度積分 = 単位球  $S^3$  の面積 =  $2\pi^2$

$u = k^2$  とおき、 $u$  積分に cut off を入れる:

$$\begin{aligned} J_1 &= \frac{1}{i} \frac{2\pi^2}{(2\pi)^4} \frac{1}{2} \int_0^{\Lambda^2} du \frac{u}{u + \Delta} \\ &= \frac{1}{i} \frac{1}{16\pi^2} \left( \Lambda^2 - \Delta \ln \left( \frac{\Lambda^2 + \Delta}{\Delta} \right) \right) \\ &\sim \frac{1}{i} \frac{1}{16\pi^2} \left( \Lambda^2 - \Delta \ln \frac{\Lambda^2}{\Delta} \right) \end{aligned} \quad (49)$$

□ Pauli-Villars の regulator 法 :

Pauli and Villars, Rev. Mod. Phys. 21 (1949) 434

質量  $m$  の粒子が内線を回る UV 発散するグラフ

$$I(m) = \int d^4k J(k, m) \quad (50)$$

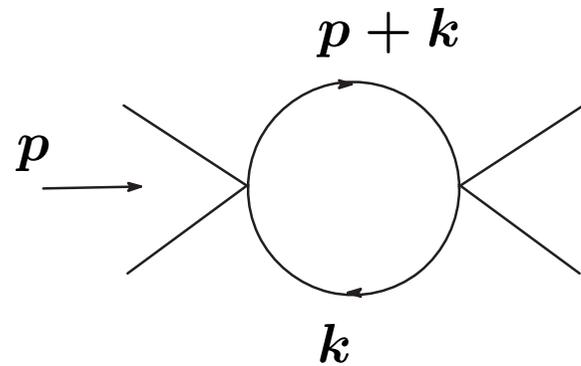
⇒ 質量  $m$  を (large)  $M_i$  に代えた同じグラフの寄与を適当に重み付けして加えることにより、有限な積分を定義 :

$$\begin{aligned} I_R(m, \{M_i\}) &= I(m) + \sum_i C_i I(M_i) \\ &= \int d^4k \left( J(k, m) + \sum_i C_i J(k, M_i) \right) = \text{finite} \quad (51) \end{aligned}$$

$C_i$  を調節して  $I_R(m, \{M_i\})$  を有限にする。

最終的に  $M_i \rightarrow \infty$  の極限をとる。

## 簡単な例



このグラフの寄与

$$I(m) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 - m^2} \frac{1}{(k + p)^2 - m^2} \sim \log \text{ divergent}$$

重い粒子が回る寄与を差し引いて有限にする：

$$\begin{aligned} I_R(m, M) &= I(m) - I(M) \\ &= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left( \frac{1}{k^2 - m^2} \frac{1}{(k + p)^2 - m^2} - \frac{1}{k^2 - M^2} \frac{1}{(k + p)^2 - M^2} \right) \end{aligned}$$

被積分関数を通分すると

$$\begin{aligned} \text{分子} &= (k^2 - M^2)((k + p)^2 - M^2) - (k^2 - m^2)((k + p)^2 - m^2) \\ &= (m^2 - M^2)(k^2 + (k + p)^2) - M^4 - m^4 = \mathcal{O}(k^2) \end{aligned}$$

分母は  $k^8$  で振る舞う  $\Rightarrow \int d^4k k^2/k^8 \sim \int d^4k/k^6$  となり UV で収束。

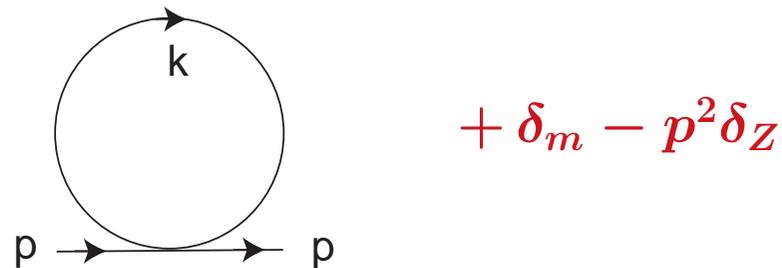
$I_R(m, M)$  は  $M \rightarrow \infty$  の極限で  $\ln M^2/m^2$  で発散する。

- 発散部分は運動量  $p$  に依らない。
- これを取り出すには  $k = Mu$  と scale するとよい。  
このとき log 発散は  $u^2 \sim m^2/M^2$  の領域から生ずる。

### 8.3 1-Loop レベルでの繰り込み

□ 2点関数:

1-loop の diagram :



Symmetry factor:

$\phi_1 \phi_2 \left( \frac{-i\lambda}{4!} \phi_3^4 \right)$  の contraction  $\Rightarrow 4 \times 3/4! = 1/2$ .

Dimensional regularization を用いる ( $n = 4 - 2\epsilon = 2\eta$ )

$$\begin{aligned}
 -iM^{(2)} &\equiv \frac{-i\lambda}{2} \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{i}{k^2 - m^2 + i\epsilon} && \text{2次発散} \\
 &= \frac{-i\lambda}{2} i \frac{(-1)^1 \Gamma(1 - \eta)}{(4\pi)^\eta \Gamma(1)} (m^2)^{-1+\eta} \\
 &= -i \frac{\lambda}{2} \frac{1}{16\pi^2} (4\pi)^\epsilon \Gamma(\epsilon - 1) (m^2)^{1-\epsilon} \\
 &= -i \frac{\lambda m^2}{32\pi^2} (1 + \epsilon \ln 4\pi) \left( -\frac{1}{\epsilon} + \gamma - 1 \right) (1 - \epsilon \ln m^2) \\
 &= -i \frac{\lambda m^2}{32\pi^2} \left( -\frac{1}{\epsilon} + \gamma - 1 - \ln 4\pi + \ln m^2 \right) \tag{52}
 \end{aligned}$$

**注：** 発散項  $1/\epsilon \Leftrightarrow$  momentum cut-off の計算では  $\ln \Lambda^2$   
 Dimensional regularization では 二次発散  $\sim \Lambda^2$  は見えない。

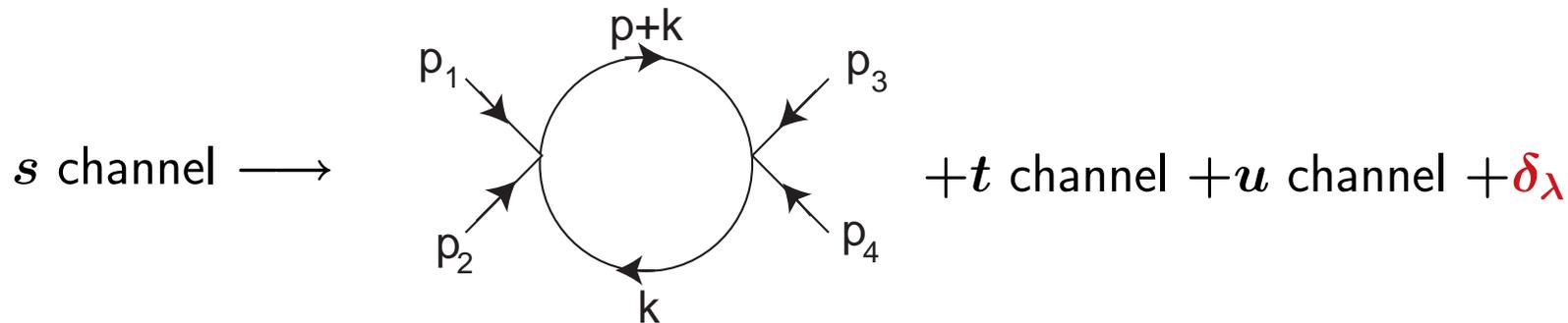
繰り込み条件:

$$\Gamma^{(2)} = M^{(2)} + \delta_m - p^2 \delta_Z = \mathcal{O}((p^2 - m^2)^2) \tag{53}$$

$M^{(2)}$  は  $p^2$  に依らない  $\Rightarrow \delta_Z = 0, \delta_m = -M^{(2)}$  ととれば満たされる。

□ 1PI 4点関数:

4点のダイアグラム:



symmetry factor

$\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4(-i\lambda/4!)^2\phi_5^4\phi_6^4$  において、 $\phi_1 \leftrightarrow p_1$   $\phi_2 \leftrightarrow p_2$  etc とおいて contraction の数を勘定。

$\phi_1\phi_2$  と contract する vertex の choice: 2通り ( $\phi_5^4$  or  $\phi_6^4$ )

これを  $\phi_5$  とすると、

$\phi_1 - \phi_5$ : 4通り       $\phi_2 - \phi_5$  3通り

同様に、 $\phi_3 - \phi_6$ 、 $\phi_4 - \phi_6$  の contraction       $4 \times 3$  通り

$\phi_5 - \phi_6$  の contraction: 2通り  $\Leftarrow \phi_5^2\phi_6^2$

2次の摂動であることからくる  $1/2!$  factor と合わせると、

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{4!} \times \frac{1}{4!} \times 4 \times 3 \times 4 \times 3 \times 2 \times 2 = \frac{1}{2} \quad (54)$$

$t, u$  channel も同様。

1PI s-channel amplitude の計算:  $p = p_1 + p_2, s = p^2$

$$-i\Gamma_s^{(4)} = \frac{(-i\lambda)^2}{2} \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{i}{k^2 - m^2} \frac{i}{(k+p)^2 - m^2} \equiv (-i\lambda)^2 iV(p^2)$$

Feynman parameter 公式

$$\frac{1}{AB} = \int_0^1 \frac{dx}{[Ax + B(1-x)]^2}$$

を用い、分母の中身を展開してから  $k$  に関して平方完成

$$\begin{aligned} V(p^2) &= \frac{i}{2} \int_0^1 dx \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{1}{[(k^2 - m^2)(1-x) + ((k+p)^2 - m^2)x]^2} \\ &= \frac{i}{2} \int_0^1 dx \int \frac{d^n l}{(2\pi)^n} \frac{1}{[l^2 + x(1-x)p^2 - m^2]^2} \quad (l = k + xp) \end{aligned}$$

$\Delta \equiv m^2 - x(1-x)p^2$  において、dimensional regularization formula を適用:

$$\begin{aligned}
 V(p^2) &= \frac{i}{2} \int_0^1 dx \int \frac{d^n l}{(2\pi)^n} \frac{1}{[l^2 - \Delta]^2} \\
 &= \frac{i}{2} \int_0^1 dx \frac{(-1)^2 i \Gamma(2 - \eta)}{(4\pi)^\eta \Gamma(2)} \Delta^{-(2-\eta)} \\
 &= -\frac{1}{32\pi^2} \int_0^1 dx \Gamma(\epsilon) (4\pi)^\epsilon \Delta^{-\epsilon} \\
 &= -\frac{1}{32\pi^2} \int_0^1 dx \left( \frac{1}{\epsilon} - \gamma + \ln 4\pi - \ln(m^2 - x(1-x)p^2) \right)
 \end{aligned}$$

$t, u$  channel からの寄与、及び counter term  $\delta_\lambda$  を加える

$\Rightarrow$  1-loop までの4点関数の表式

$$\Gamma^{(4)} = \lambda + \lambda^2 (V(s) + V(t) + V(u)) + \delta_\lambda \quad (55)$$

$\delta_\lambda$  は、 $s = 4m^2, t = u = 0$  での繰り込み条件  $\Gamma^{(4)}(p_i^2 = m^2) = \lambda$  で定まる

$$\begin{aligned}\delta_\lambda &= -\lambda^2(V(4m^2) + 2V(0)) \\ &= \frac{\lambda^2}{32\pi^2} \int_0^1 dx \left( \frac{3}{\epsilon} - 3\gamma + 3 \ln 4\pi - \ln(m^2 - x(1-x)4m^2) - 2 \ln m^2 \right)\end{aligned}$$

□ 0-momentum subtraction との比較 :

$\delta_{\lambda,0} \equiv$  0-momentum subtraction での counter term

繰り込み条件は  $s = t = u = 0$  でつけるから

$$\delta_{\lambda,0} = -3\lambda^2 V(0) = \delta_\lambda + \lambda^2[V(4m^2) - V(0)] \quad (56)$$

$\therefore$   $\delta_\lambda$  と  $\delta_{\lambda,0}$  は 有限繰り込み で結ばれている。

□ 高エネルギーでの振る舞い :

例: Large  $s$  behavior

$s \rightarrow \infty$  の極限で

$$\begin{aligned}\Gamma^{(4)} &\sim \frac{\lambda^2}{32\pi^2} \int_0^1 dx \ln \underbrace{\frac{m^2 - x(1-x)s}{m^2 - x(1-x)4m^2}}_{\text{from } \delta_\lambda} \\ &\sim \frac{\lambda^2}{32\pi^2} \ln \frac{s}{m^2} + \text{finite}\end{aligned}\tag{57}$$

運動量 cut-off の方法で計算すると、この対数的振る舞いが、 $\ln(\Lambda^2/m^2)$  に呼応して出てきていることがわかる。

これは 繰り込み群と密接に関係している。

## 8.4 BPHZ の subtractive な繰り込み処方

$F_\Gamma$  = Feynman 図  $\Gamma$  に対応する振幅

$$F_\Gamma = \int d^4k_1 \cdots d^4k_m I_\Gamma$$

$I_\Gamma$  = Feynman rules で定義された integrand

**BPHZ scheme の特徴** : Integrand に対する操作  $I_\Gamma \rightarrow R_\Gamma$  によって、各 diagram 毎にその有限部分  $F_\Gamma$  を構成:

$$\text{finite part of } F_\Gamma = \int d^4k_1 \cdots d^4k_m R_\Gamma$$

$I_\Gamma \rightarrow R_\Gamma$  の操作は counter terms を付けることと同値であることを示すことができる。

## 8.4.1 $R_\Gamma$ の構成法

□ 予備的な定義と例 :

(i) **繰り込み部分  $\gamma$** : Proper (*i.e.* 1PI) な diagrams で見かけ上発散するもの (superficially divergent)。すなわち発散次数  $d(\gamma) \geq 0$ 。

(ii)  **$\gamma_1$  と  $\gamma_2$  が disjoint**:  $\gamma_1 \cap \gamma_2 = \emptyset \Leftrightarrow$  両者が共通の line を持たない。

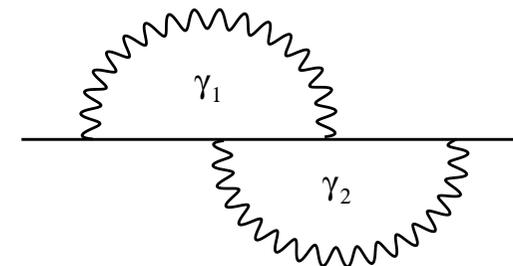
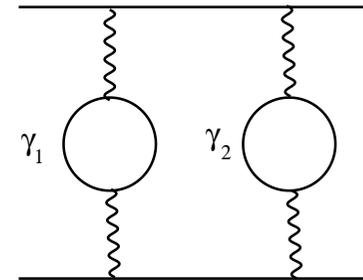
(iii) **Overlapping**:  $\gamma_1 \circ \gamma_2$ : 次がいずれも成り立たない場合を言う。

$$\gamma_1 \subseteq \gamma_2, \quad \gamma_1 \supseteq \gamma_2, \quad \gamma_1 \cap \gamma_2 = \emptyset$$

(iv) **Reduced diagram  $\Gamma / \{\gamma_1, \dots, \gamma_c\}$** :

$\{\gamma_1, \dots, \gamma_c\} = \Gamma$  の disjoint かつ connected な部分図。

これらの  $\gamma_j$  を点に縮約  $\Rightarrow$  reduced diagram  $\Gamma / \{\gamma_1, \dots, \gamma_c\}$

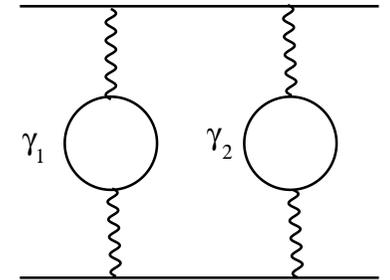


(v) **Taylor operator**  $t_d^\gamma$ : 着目している diagram  $\gamma$  の外線運動量  $\{p_i\}$  に対して、最初の  $d + 1$  次の Taylor 展開の項を与える演算子

$$\begin{aligned}
 t_d^\gamma f(\{p_i\}) &= f(\{p_i\})|_{p_i=0} + p_j^\mu \frac{\partial}{\partial p_j^\mu} f(\{p_i\}) \Big|_{p_i=0} \\
 &\quad + \dots \\
 &\quad + \frac{1}{d!} \sum p_{j_1 \nu_1} \cdots p_{j_d \nu_d} \frac{\partial^d}{\partial p_{j_1 \nu_1} \cdots \partial p_{j_d \nu_d}} f(\{p_i\}) \Big|_{p_i=0} \\
 t_d^\gamma &\equiv 0 \quad \text{if } d < 0, \quad -t_d^\gamma \equiv 1 \quad \text{if } \gamma = \emptyset
 \end{aligned}$$

(vi)  **$\Gamma$ -forest**  $U \in \mathcal{U}$ :  $U$  は次の性質を満たす diagram の集合

- (a)  $\gamma \in U$  は  $\Gamma$  の繰り返し込み部分。
- (b) 任意の二つの元  $\gamma_1, \gamma_2 \in U$  は *non-overlapping*。
- (c)  $U$  は空集合  $\{\emptyset\}$  であってもよい。



**Full forest:**  $U$  は  $\Gamma$  自体を含む。

**Normal forest:**  $U$  は  $\Gamma$  を含まない。

$\Gamma$ -forests (normal forests):

$\{\gamma_1\}$  ,  $\{\gamma_2\}$  ,  $\{\gamma_1, \gamma_2\}$  ,  $\{\emptyset\}$

□ Bogoliubov の  $R$ -operation:

- Bogoliubov:  $I_\Gamma$  から  $R_\Gamma$  を構成する規則を与えた。
- BPH etc. : この処方方で Feynman amplitude の有限部分が定義されることを証明。

(i)  $\bar{R}_\Gamma$  を recursive に次の様に定義 :

$$\bar{R}_\Gamma = I_\Gamma + \sum_{\{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_c\}} I_{\Gamma/\{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_c\}} \prod_{\tau=1}^c (-t^{\gamma_\tau}) \bar{R}_{\gamma_\tau} \quad (58)$$

(ii)  $\Gamma$  が *subdiagram* として繰り返し込み部分を全く含まないときは

$$\bar{R}_\Gamma = I_\Gamma$$

次に  $R_\Gamma$  自体を次のように定義 :

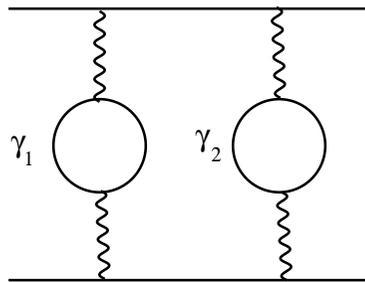
(iii)  $\Gamma$  自体が繰り返し込み部分でないならば

$$R_\Gamma = \bar{R}_\Gamma$$

(iv)  $\Gamma$  自体が繰り込み部分ならば最後に全体の引き算をする :

$$R_\Gamma = (1 - t^\Gamma) \bar{R}_\Gamma$$

例:  $\{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_c\}$  としては  $\{\gamma_1\}, \{\gamma_2\}, \{\gamma_1, \gamma_2\}$  があるから



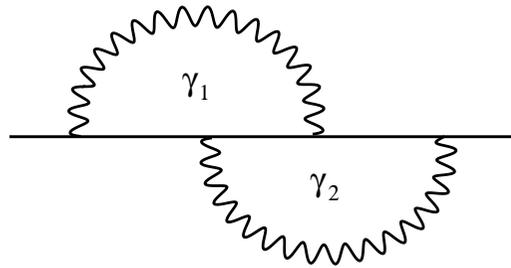
$$\begin{aligned} R_\Gamma = \bar{R}_\Gamma = & I_\Gamma + I_{\Gamma/\{\gamma_1\}} (-t^{\gamma_1}) I_{\gamma_1} \\ & + I_{\Gamma/\{\gamma_2\}} (-t^{\gamma_2}) I_{\gamma_2} \\ & + I_{\Gamma/\{\gamma_1, \gamma_2\}} (-t^{\gamma_1}) I_{\gamma_1} (-t^{\gamma_2}) I_{\gamma_2} \end{aligned}$$

### □ Zimmermann's Forest Formula:

Zimmermann は Bogoliubov の公式をより便利な形に書き換えることに成功した。

$$R_\Gamma = \sum_{U \in \mathcal{U}(\Gamma)} \prod_{\gamma \in U} (-t^\gamma) I_\Gamma$$

□ 例 1: :



Overlapping divergenceがある場合

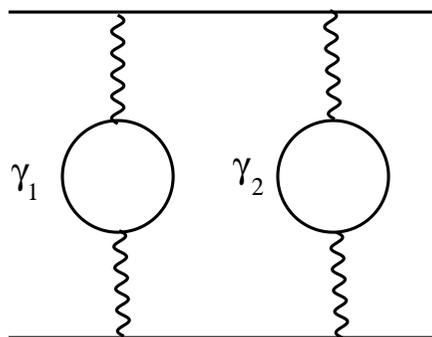
Renormalization parts:  $\gamma_1, \gamma_2, \Gamma$

$\Gamma$ -forests:  $\{\gamma_1\}, \{\gamma_2\}, \{\Gamma\}, \{\Gamma, \gamma_1\}, \{\Gamma, \gamma_2\}, \{\emptyset\}$

$\{\gamma_1, \gamma_2\}$  は許されないことに注意。

$$\begin{aligned} R_\Gamma &= (1 - t^{\gamma_1} - t^{\gamma_2} - t^\Gamma + t^\Gamma t^{\gamma_1} + t^\Gamma t^{\gamma_2}) I_\Gamma \\ &= (1 - t^\Gamma) (1 - t^{\gamma_1} - t^{\gamma_2}) I_\Gamma \end{aligned}$$

例 2:



Renormalization parts:  $\gamma_1, \gamma_2$

$\Gamma$ -forests:  $\{\gamma_1\}, \{\gamma_2\}, \{\gamma_1, \gamma_2\}, \{\emptyset\}$

$$\begin{aligned} R_{\Gamma} &= (1 - t^{\gamma_1} - t^{\gamma_2} + t^{\gamma_1 t^{\gamma_2}}) I_{\Gamma} \\ &= (1 - t^{\gamma_1}) (1 - t^{\gamma_2}) I_{\Gamma} \end{aligned}$$

□ Forest formula の導出 :

基本的には  $R$ -operation の公式における和の rearrangement

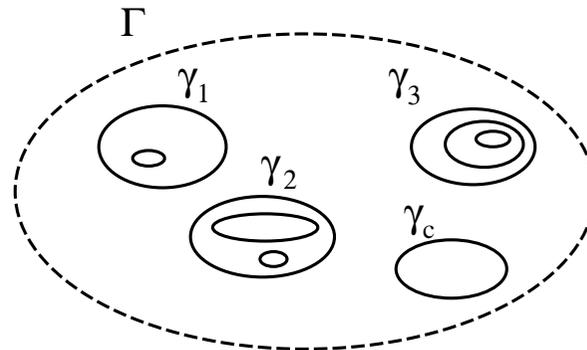
$R$  operation: 全体の subtraction は特別に扱われている

⇒ Zimmermann の  $R_{\Gamma}$  公式中の  $\mathcal{U}(\Gamma)$  (すべての  $\Gamma$ -forest の集合) を  $\overline{\mathcal{U}}(\Gamma)$  ( $\Gamma$  自体を含まない normal forest の集合) に置き換えたものとして  $\overline{S}_{\Gamma}$  を定義 :

$$\overline{S}_{\Gamma} \equiv \sum_{U \in \overline{\mathcal{U}}(\Gamma)} \prod_{\gamma \in U} (-t^{\gamma}) I_{\Gamma}$$

各 normal forest  $U \in \bar{\mathcal{U}}(\Gamma)$  に対して、  
**maximal set of elements**  $\{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_c\}$

$\equiv$  互いに disjoint である renormalization parts の集合  
 を identify することができる。



$\Rightarrow$  Renormalization parts の和の取り方を、次のように組み替える：

- (i) まず各  $\gamma_\tau$  の中の parts を加える
  - (ii) 次に可能なすべての maximal sets  $\{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_c\}$  について足し挙げる
- これを式に表すと (“1” は empty forest の寄与 )

$$\sum_{U \in \bar{\mathcal{U}}(\Gamma)} \prod_{\gamma \in U} (-t^\gamma) = 1 + \sum_{\{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_c\}} \prod_{\tau=1}^c \left\{ (-t^{\gamma_\tau}) \left[ \sum_{U_\tau \in \bar{\mathcal{U}}(\gamma_\tau)} \prod_{\lambda_\tau \in U_\tau} (-t^{\lambda_\tau}) \right] \right\}$$

この operator を被積分関数

$$I_\Gamma = I_{\Gamma/\{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_c\}} \left[ \prod_{\tau=1}^c I_{\gamma_\tau} \right]$$

に働かせる。

赤で表示した部分は併せて  $\bar{S}_{\gamma_\tau}$  を与えるから、

$$\bar{S}_\Gamma = I_\Gamma + \sum_{\{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_c\}} I_{\Gamma/\{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_c\}} \prod_{\tau=1}^c (-t^{\gamma_\tau}) \bar{S}_{\gamma_\tau}$$

これは  $\bar{R}_\Gamma$  の定義式に他ならない  $\Rightarrow \bar{S}_\Gamma = \bar{R}_\Gamma$

- $\Gamma$  が renormalization part でないとき:  $R_\Gamma = \bar{R}_\Gamma \Rightarrow$  Zimmermann の公式
- $\Gamma$  が renormalization part のとき: full forest に対する和 = normal forests と  $\Gamma$  を normal forests に加えたものの union

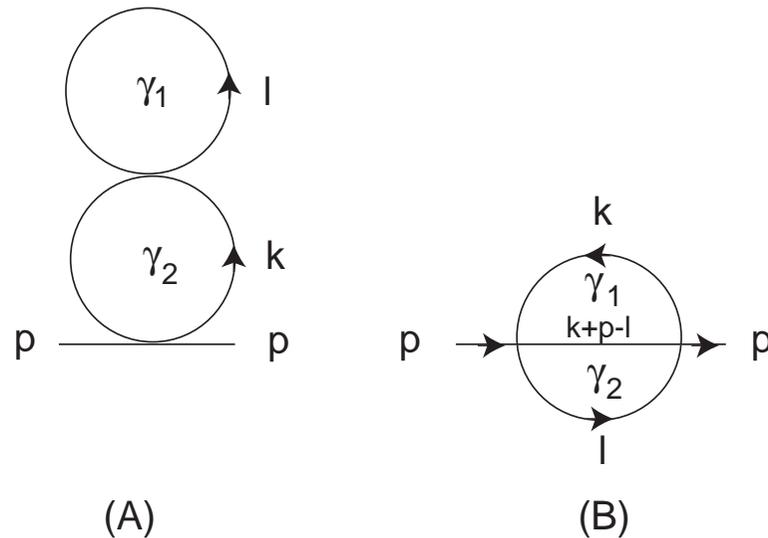
$$\begin{aligned} R_\Gamma &= (1 - t^\Gamma) \bar{R}_\Gamma \\ &= \sum_{U \in \bar{\mathcal{U}}(\Gamma)} (1 - t^\Gamma) \prod_{\gamma \in U} (-t^\gamma) I_\Gamma = \sum_{U \in \mathcal{U}(\Gamma)} \prod_{\gamma \in U} (-t^\gamma) I_\Gamma \quad // \end{aligned}$$

## 8.5 2-Loop レベルでの繰り込み

□ 2点関数：

グラフは、次の式の contraction から生じ、2種類ある：

$$\frac{1}{2} \phi_1 \phi_2 \left( \frac{-i\lambda}{4!} \phi_3^4 \right) \left( \frac{-i\lambda}{4!} \phi_4^4 \right) \quad (59)$$



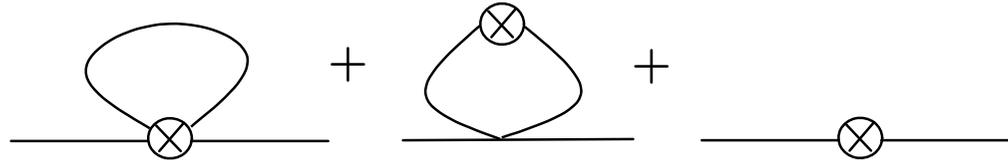
Type (A): 1と2を直接 contract する場合。

Symmetry factor は、1-2をどちらの vertex と contract するか、この vertex の4 legs と1-2の contraction, また残りの2本の legs ともう一方の vertex の4本の

leg との contraction の仕方、を考えると容易に

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{4!} \times \frac{1}{4!} \times 4 \times 3 \times 4 \times 3 \times 2 = \frac{1}{4} \quad (60)$$

このグラフに対する counter terms は次の3種類：



はじめの二つのグラフの symmetry factor は 1-loop の場合とおなじであるから、各々  $1/2$ .

**Type (B):** 1-3-4-2 または 1-4-3-2 の2通りの contraction がある。前者に注目すると

1-3 の contraction      4通り  
 2-4 の contraction      4通り  
 3-4 の contraction       $3! = 6$ 通り

全体の factor は

$$(-i\lambda)^2 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{4!} \times \frac{1}{4!} \times 4 \times 4 \times 6 \times 2 = \frac{(-i\lambda)^2}{6} \quad (61)$$

これに対する counter graphs は、type A に対する **第1および第3 graphs** と同じもの (共通)

### □ BPHZ subtraction scheme との比較 :

BPHZ scheme:

renormalization part:  $\gamma_1, \gamma_2, \Gamma$

$\Gamma$ -forest:  $\{\phi\}, \{\gamma_1\}, \{\gamma_2\}, \{\Gamma\}, \{\gamma_1, \Gamma\}, \{\gamma_2, \Gamma\}$

Zimmermann's formula

$$R_\Gamma = (1 - t^\Gamma)(1 - t^{\gamma_1} - t^{\gamma_2})I_\Gamma \quad (62)$$

⇔ 上部と下部の4点部分の発散を引いて、しかる後に残りの全体の発散を引く。

注: 上部、下部の発散はあくまでもこのグラフの発散部分であって、1-loop の counter term を引いているのではない。

BPHZ scheme ではあくまでも一つ一つのグラフを有限にする操作を行う。  
**その操作の総体が結果として counter term の論理で引き算するものと同じになっている**

具体的計算 (type (B)) :

$$A_{\Gamma} = \frac{(-i\lambda)^2}{6} i^3 I_{\Gamma} \quad (63)$$

$$I_{\Gamma} = \frac{1}{k^2 - m^2} \frac{1}{l^2 - m^2} \frac{1}{(k + p - l)^2 - m^2} \quad (64)$$

$$t^{\gamma_1} I_{\Gamma} = \frac{1}{k^2 - m^2} \frac{1}{k^2 - m^2} \frac{1}{l^2 - m^2} = \text{indep of } p \quad (65)$$

$$t^{\gamma_2} I_{\Gamma} = \frac{1}{k^2 - m^2} \frac{1}{l^2 - m^2} \frac{1}{l^2 - m^2} = \text{indep of } p \quad (66)$$

Overall subtraction は、見かけ上の発散の次数が2であるので、Taylor展開の最初の2項を引けばよい。

$$\left. \frac{\partial}{\partial p^{\mu}} \frac{1}{(k + p - l)^2 - m^2} \right|_{p=0} = - \frac{2(k - l)_{\mu}}{((k - l)^2 - m^2)^2} \quad (67)$$

これより

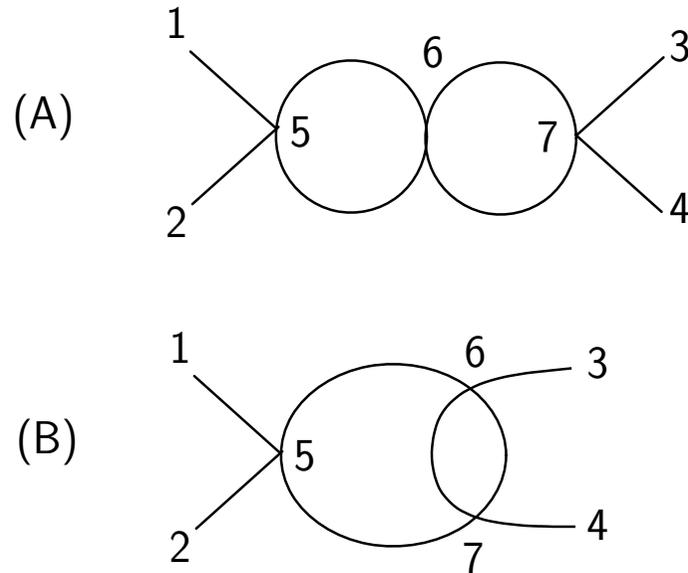
$$(1 - t^\Gamma) I_\Gamma = \frac{1}{k^2 - m^2} \frac{1}{l^2 - m^2} \left( \frac{1}{(k + p - l)^2 - m^2} - \frac{1}{(k - l)^2 - m^2} + \frac{2(k - l) \cdot p}{((k - l)^2 - m^2)^2} \right) \quad (68)$$

□ 4点関数 :

2-loop 4点関数は次の表式の contraction から生ずる :

$$\frac{1}{3!} \phi_1 \phi_2 \phi_3 \phi_4 \left( \frac{-i\lambda}{4!} \phi_5^4 \right) \left( \frac{-i\lambda}{4!} \phi_6^4 \right) \left( \frac{-i\lambda}{4!} \phi_7^4 \right) \quad (69)$$

Diagram としては次の 2 種類のタイプが generate される。



数字は “s-channel” を与えるうちの一つの contraction を表している。

Type (A) Symmetry factor の勘定 :

- 1,2 がどの vertex と contract するか      3通り
- 3,4 がどの vertex と contract するか      2通り
- 1 と 5 の contraction                      4通り
- 2 と 5 の contraction                      3通り
- 3 と 7 の contraction                      4通り
- 4 と 7 の contraction                      3通り

5の残りの足のうちの1つと6の contraction 4通り

5のもう一つの足と6の contraction 3通り

6と7の contraction 2通り

従って全体の symmetry factor は

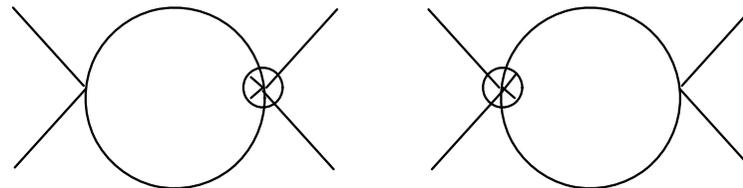
$$\frac{1}{3!} \times \left(\frac{1}{4!}\right)^3 \times 3! \times \frac{4!}{2} \times \frac{4!}{2} \times 4! = \frac{1}{4} \quad (70)$$

### Type (B)

Symmetry factor の勘定: 外線の番号を決めたときには1/4を得る。

しかし、この diagram の場合は左右が非対称なので、外線の番号の決め方が type B に比べて2倍あることに注意。

Counter term より生ずる2つの1-loop グラフ: symmetry factor は各々 1/4.



- 実際の 2-loop の計算は込み入っているので省略する。