M 理論とは何か

風間洋一　〈東京大学大学院総合文化研究科　153-8902 東京都目黒区駒場 3-8-1　e-mail: kazama@hep3.c.u-tokyo.ac.jp〉

自然界の統一理論の最有力候補である超弦理論は，異なる様相を持った理論間をつなぐ「双対性」と呼ばれる性質を梃子として，1995年頃から新たな飛躍的発展段階に入った．この新時代のパラダイム的役割を果たしているのが，「M 理論」と呼ばれる超弦理論自体の統一の構図である．本稿では，この謎めいた名称を冠された，まだ未発達ではあるが野心的な理論の生誕と現状，及びその将来的課題を解説する．

1. はじめに

素粒子物理学という自然法則の究極のからくりを究明しようとする先鋭的な学問においては，時として，何とも呼びようのない新たな概念や仮説的物体に対して，いささかの遊び心と共に，言語学的良識を逸脱した暗号めいた命名がなされることがある．その多くは人知れず忘れ去られてしまう運命を辿るが，「ストレンジネス」や「クォーク」のように不動の地位を獲得するものもある．こうした常軌を逸した名称はしばしば学問的峻厳を乱すものとして指弾の対象ともなるが，また一方，未知なるもの，革命的なるものへの憧憬を駆り立てる原動力ともなるのである．

「M 理論」もまたこうした系譜の中に位置づけられる名称であるといえよう．それは，1995年に幕を開けた超弦理論の新たな時代を象徴する概念であり，恐らく21世紀の素粒子論の一つの大きな原動力，パラダイムとして，君臨し続けるであろうと予想される．

しからば，「M 理論」とは一体何か．その本性はそのいくつかの側面が垣間見える程度にしか捉えられていないが，一言で言えば，これまで根源的には10次元の時空でしか整合的に存在しないと考えられてきた幾つかのタイプの超弦理論を，もう一次元高い11次元時空上で定義される基本的な量子力学的理論の異なる相として統一的に捉える枠組みであると言える．

この画期的な見方は1995年3月 E. Witten によって提唱され[1] 全世界に大きな興奮をもたらしたのであるが，Witten の論文では「M 理論」という名称はまだ使われていない．初めて「M 理論」という言葉が現れたのは，超弦理論の産みの親の一人である J. Schwarz が同年10月に発表した “The Power of M Theory” という題名の論文[2] においてであった．この論文の脚注で，Schwarz はこの呼称が Witten によっ

て提案されたものであることを述べているが，“M”が何の略であるのかには言及しておらず，その後現在に至るまで確定しようという動きもない．候補としては，様々な研究者が半ば冗談も交えて，Membrane, Magic, Mysterious, …, Mother 等々を挙げており，その中では（後で詳述する理由により）Membrane（膜）が最も学問的に正統であると思われるが，今のところいろいろな含みを持たせておくほうが良い，というのが世界的な暗黙の了解になっている．

いずれにせよ，Wittenの論文以後，M理論的統一の見取り図に則った超弦理論の研究の進展は，それまでの幾年かにわたる停滞期の鬱憤をはらすような，すさまじいものであった．新しく提起された問題を調べ尽くす間もなく予期せぬ構造が新たに顔をのぞかせ，世界中の研究者が息せき切って，このますます驚くべき様相を見せる理論の深淵な謎を解明しようと躍起になっているという状況が現在も続いているのである．この小稿では，その成果も採り入れながら，M理論の生誕，現状，そしてその将来的課題を解説する．

2. 超弦理論 ～1995

上述のように，M理論は超弦理論の統一的枠組みの謂であるから，これを解説するにはまず超弦理論そのものについて，M理論が提唱される1995年までにどのような理解が得られていたかを概観しておく必要がある．

2.1 統一理論としての超弦理論

弦理論はもともとハドロンの散乱振幅の特徴をうまく記述する有効理論として1960年代後半に誕生したものであるが，その解釈は70年代の中庸以後根本的に見直され，今日では，自然界のすべての力，物質，そしてそれらが発現する舞台である時空，を統一的に記述する最も有力な理論と考えられるに至っている．ここでいう弦とは，相対論的量子力学に従って運動する太さのない「ひも」であり，大別すると，両端にある種の電荷が付いた「開弦」(open string) と，端がなく輪のように閉じた「閉弦」(closed string) の2種類に分けられる．[*1] そして，プランクスケール ($\sim 10^{-34}$ cm) 以下の極微な世界ではすべてがこうしたひもから成り立っているとするのが弦理論の基本的な描像であり，次の意味で自然界の物質とその相互作用を見事に統一する．

まず，弦は自身拡がりを持つため，様々な種類の回転や振動といった可算無限個の異なる状態をとることができる．これらの状態はマクロな視点から見るとその詳細は見えず，あたかも異なる質量，スピン，電荷などの属性を持った点粒子のように見えるはずである．すなわち自然界の全ての粒子を弦という同じ実体の異なる状態として統一的に理解する枠組みを与えるのである．[*2]

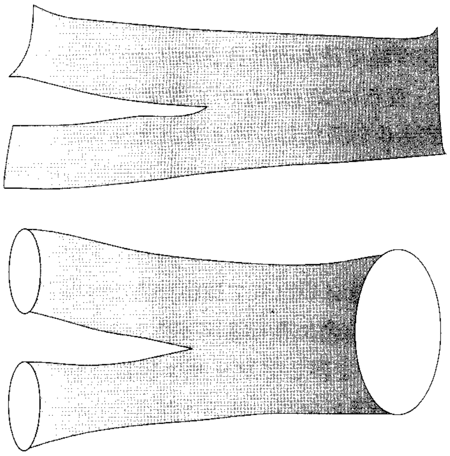

図1　開弦 (a) や閉弦 (b) の結合と分裂の基本プロセス．

さらに，弦理論はこれらの「粒子」の間の様々な相互作用を，図1のような弦の「結合 (joining)」と「分裂 (splitting)」というたった2種類の基本的なプロセスとして理解することを可能にする．実際，QCD（量子色力学）や電弱統一理論の基本であるヤン・ミルズゲージ理論は自然な形で弦理論に含まれている．さらに決定的に重要なことは，閉弦のモードとして，スピン2を持つ質量がゼロの粒子が現れることである．これは「重力子」の持つ量子数に他ならず，実際この粒子の交換によって低エネルギーでアインシュタイン重力が生ずることが示される．すなわち，閉弦を含む弦理論は，重力までも統一した整合的な量子力学理論という画期的な性質を持つ現在のところ唯一の理論なのである．

2.2 弦の量子力学と対称性

ここで弦理論のより具体的なイメージを喚起するために，（平坦な時空内の）弦の量子力学の初歩的な説明をしておこう．

弦の運動によって描かれる世界面を $\xi_\alpha=(\tau,\sigma)$ （τ は時間方向，σ は空間方向を表す）でパラメトライズすると，弦の D 次元時空内での運動の軌跡は $X^\mu(\tau,\sigma)$，$(\mu=0,1,\cdots,D-1)$ なる写像（場）で表される．そして，粒子の場合の拡張として，弦の古典的運動はこの世界面の面積に比例した南部-後藤作用と呼ばれる量が最小になるように起こる．この作用は量子力学的に取り扱いにくいため，通常はそれと古典的に等価な次のポリヤコフ作用が用いられる：

$$S_{\mathrm{P}}=\frac{T}{2}\int_{-\infty}^{\infty}d\tau\int_0^\pi d\sigma\,\eta_{\mu\nu}\left(\frac{\partial X^\mu}{\partial\tau}\frac{\partial X^\nu}{\partial\tau}-\frac{\partial X^\mu}{\partial\sigma}\frac{\partial X^\nu}{\partial\sigma}\right).\quad(1)$$

[*1] さらに「超弦」の場合にはひもの上にフェルミ統計に従う自由度が付与されており，ボゾン的な自由度と併せて「超対称性」が実現されているのであるが，これについては後で述べる．

[*2] 無論無限個の粒子のほとんどはプランク質量 ($\sim 10^{19}\mathrm{GeV}/c^2$) 以上の質量を持つため直接には観測されない．

ここで $T=(2\pi l_s^2)^{-1}$ は弦の張力を表し，l_s は string scale と呼ばれる弦理論の基本的な長さのスケールを与える.*3 この作用から直ちに $X^\mu(\tau,\sigma)$ が2次元の自由な波動方程式 $(\partial_\tau^2-\partial_\sigma^2)X^\mu=0$ を満たし，従って，光速で伝播する右向きの波 $X_R^\mu(\sigma^-)$ と左向きの波 $X_L^\mu(\sigma^+)$ の和に分解できることがわかる．但し $\sigma^\pm\equiv\tau\pm\sigma$ は2次元の光円錐 (light-cone) 座標である．

この系の量子化はいたって簡単である．開弦の場合を例にとれば，端が自由に動けるノイマン境界条件 $\partial_\sigma X^\mu(\tau,0)=\partial_\sigma X^\mu(\tau,\pi)=0$ を課してフーリエ級数に展開し正準量子化の手続きを行えば，

$$X^\mu(\tau,\sigma)=x^\mu+\frac{l_s^2}{2}p^\mu\tau+\mathrm{i}\frac{l_s}{\sqrt{2}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\times(\alpha_n^\mu\mathrm{e}^{-in\tau}-\alpha_n^{\mu\dagger}\mathrm{e}^{in\tau})\cos n\sigma \tag{2}$$

を得る．ここで重心座標とその運動量は点粒子の場合と同様な $[x^\mu,p^\nu]=\mathrm{i}\eta^{\mu\nu}$ の形の交換関係を満たし，弦自身の励起を表す無限個の生成消滅演算子 $\alpha_n^\mu,\alpha_n^{\mu\dagger}$ は調和振動子型の交換関係 $[\alpha_m^\mu,\alpha_n^{\nu\dagger}]=m\delta_{m,n}\eta^{\mu\nu}$ を満たす.*4 すなわち，弦の様々な状態は，重心運動量 p を持つ基底状態 $|p\rangle$ にこれらの生成演算子 $\alpha_n^{\mu\dagger}$ を次々に作用させれば得られる．これらの状態は様々なスピンを持った粒子の状態に見える．例えば基底状態 $|p\rangle$ はスカラー粒子を表し，$\alpha_n^{\mu\dagger}|p\rangle$ は光子のようなベクトル粒子を表す．

しかし，このようにして作られる全ての状態が実現しては困るのである．実際 $[\alpha_m^0,\alpha_m^{0\dagger}]=-m$ であるから，$\alpha_m^{0\dagger}$ による励起は負のノルム状態を生成してしまい量子力学的確率解釈が破綻する．しかしこれと全く同じ困難はすでにはるか昔に光子の量子化に際して現れており，それが電磁場理論の持つゲージ対称性のおかげで正の確率を持つ横波の自由度しか実現しないという形で解決されていることを思い起こそう．そして，弦理論の場合にもその（大幅な）拡張であるところの「共形不変性」と呼ばれる巨大なゲージ対称性の存在によって，この困難は回避されるのである．このゲージ不変性はポリヤコフ作用が $\sigma'^\pm=f_\pm(\sigma^\pm)$（$f_\pm$ は任意関数）という形の「共形変換」と呼ばれる座標変換に対して不変であることに起因する．$f_\pm(\sigma^\pm)$ を $\sigma^\pm$ の無限冪級数に展開してみればわかるように，これは無限次元の対称性であり，弦理論に現れる無限個の非物理的な状態を取り除くのに十分な対称性になっているのである．

だが，実は話はまだ済まない．量子論にいくと，この共形不変性は「量子異常」と呼ばれる阻害現象のため一般に壊れてしまうという新たな困難が生ずるからである．そして注意深い解析を行うと，（超対称性を持たない）上述したボゾン弦の理論の場合には，弦の運動する時空の次元 D が26の場合にのみこの量子異常が消え，整合的な理論ができることがわかる．この次元はボゾン弦の「臨界次元」と呼ばれる．

*3 以下では $\hbar=c=1$ の単位系を用いる．また，対角行列 $\eta_{\mu\nu}=\mathrm{diag}(-1,1,\cdots,1)$ は D 次元のローレンツ計量である．

*4 弦理論における調和振動子の規格化は通常と少し異なるものが用いられる．

2.3 超対称性と超弦理論

26次元という4次元を遙かに超える次元の出現はまた新たな困難を提起するかに見えるが，その解決はひとまず後回しにして，こうして得られた理論に現れる無限個の粒子の質量スペクトルを見てみよう．開弦の場合を例にとると，ゲージ対称性を用いて非物理的な状態を除いたあとでの結果は次のようになる：$M^2=(1/l_s^2)\left(\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{24}nN_{in}-1\right)$. ここで N_{in} は $\alpha_n^{i\dagger}$ がいくつ励起されているかを表す数である．直ちに気付くことは，$N_{in}=0$ の基底状態の質量の2乗が $-1/l_s^2$ という負の値になってしまっていることである．これに対応する粒子はタキオンと呼ばれその存在は理論の不安定性を表す．これは次元数の問題より遙かに深刻な問題である．

もう一つの問題は，いままで述べてきた $X^\mu(\xi)$ のみを弦の自由度とするボゾン弦の理論では，整数スピンを持つボゾンの状態しか作れないことである．電子やクォークなどの基本的なフェルミ粒子を記述できないのでは統一理論たりえない．

この二つの重大な困難を解決するのが以下に述べる超対称性を備えた超弦理論である．超弦理論では，ボゾン場 $X^\mu(\xi)$ に加えて，フェルミ統計に従う2次元のディラック場 $\Psi^\mu(\xi)$ の自由度を弦上に導入する．すると，作用は（形は書かないが）X^μ と Ψ^μ を互いに変換する「世界面上の超対称変換」に対する新たな不変性を獲得し，ボゾン弦理論の要であった共形不変性はこの超対称性と併せて「超共形不変性」と呼ばれるさらに高いゲージ対称性に拡張される．そして，ボゾン弦のときと同様にその量子異常の解析を行うと今度は臨界次元が10次元になることがわかる．この理論は Ψ^μ 場のモードの励起によりフェルミオンを記述することができるが，このままではまだ前述のタキオンが残る．しかしながら，驚くべきことは，この不要なタキオンと共に理論の状態の半数をあるルールに従って射影し捨て去ると，残りの状態空間では同一質量を持つボゾンとフェルミオンの状態の数が完全に等しくなり，10次元のポアンカレ不変性を超対称的に拡張した「超ポアンカレ対称性」（通常「時空の超対称性」と呼ばれる）が実現して，整合性を持った超弦理論が得られることである．

このようにして構成された超弦理論では，頂点作用素 (vertex operator) と呼ばれる，弦の散乱の始状態と終状態から特定の粒子的モードを取り出す演算子を導入することによって，様々な散乱振幅を計算することができるが，それらは超対称性のおかげで非常に良い性質を持ち，すべて

の振幅が完全に有限になることを指し示す数々の証拠が得られているのである．

2.4　超弦理論の種類

前節では超弦理論の構成のプロセスを大まかに述べたが，より詳しくみると，超弦理論は次の5種類のタイプに分類される．この分類はかなり専門的であるが，超弦理論の統一の意味を理解するためには不可欠なので簡単に解説しよう．

まず，これらの理論は大きく「タイプI」，「タイプII」，および「ヘテロ弦」(hetero＝異種混合の意) の三つのタイプに分類され，タイプIでは閉弦と開弦の両方が，また残りの二つの場合には閉弦のみが許される．

タイプII理論は，閉弦を伝播する右向きの波 (Rセクター) と左向きの波 (Lセクター) に独立に働く2種類の超対称性があることからこう呼ばれるもので，さらにこの二つのセクターのmasslessフェルミ粒子の“巻き方”(chirality) が異なる場合をタイプIIA，同一の場合をタイプIIBと呼ぶ．IIAとIIBでは現れるmassless粒子の種類が (ボゾンも含めて) 非常に異なっている．

これに対してタイプI理論は，そこに含まれる開弦に対して右向きと左向きの波の間に端点で関係がつくことから，時空の超対称性はタイプII型と比較して半分になる．開弦の両端には通常の電荷の拡張であるゲージ電荷を付与することができ，これによって量子色力学などの理論の要であるゲージ対称性を組み込むことができる．ゲージ対称性は対象となる粒子 (場) に働くゲージ群によって特徴づけられるが，タイプI理論の場合には量子力学的整合性からSO(32) という直交群に限られる．ちなみに開弦を許さないタイプII理論ではそのようなゲージ対称性を簡単に組み込むことはできない．

残るヘテロ弦は，閉弦のRセクターとLセクターの内容が異なった理論である．片方 (Rセクターとしよう) はタイプIと同様な超対称性を持った超弦理論であり，10次元時空に存在する．これに対してもう片方のLセクターは超対称性を持たないボゾン弦をなしている．ボゾン弦の臨界次元は26であるから困るように思えるが，そのうちの16次元分は小さく丸まっており，残りの10次元部分がRセクターと同じ次元に存在していると考えるのである．すなわち10次元の閉弦上の各点に小さな16次元空間が付いていて弦のLセクター部分はその空間の内部にも入り込んで運動することができると思えばよい．そしてうまいことにこの余分な自由度のおかげで，ヘテロ弦は閉弦の理論であるにもかかわらず，ゲージ対称性を持ち得る構造になっている．しかし，タイプI理論のときと同様，量子力学的整合性から許されるゲージ群はSO(32) 及び例外群の直積である $E_8 \times E_8$ という2種類に限られる．

以上の5種類の超弦理論を，以後IIA, IIB, $\mathrm{SO}(32)_{\mathrm{I}}$, $\mathrm{SO}(32)_{\mathrm{HET}}$, $(E_8 \times E_8)_{\mathrm{HET}}$ と記すことにする．

2.5　超弦理論の基本課題

これまでの記述からわかるように，これらの五つのタイプの超弦理論はそのスペクトルからして非常に異なっており，なぜこの5種類なのか，そしてそれらの関係はどうなっているのかは大きな謎であった．そしてその謎は単なる理論的な興味というだけでなく，以下に述べるように自然界の統一理論としての超弦理論の基本課題と密接に結びついているのである．

当然のことながら自然界の統一理論は我々の棲む4次元世界の現象を正しく記述し予言するものでなければならない．10次元時空においてのみ整合的に定義できる超弦理論でこれを実現する最も有力なアイデアは，そのうちの6次元空間部分は何らかの理由により小さく丸まっていて現在の観測にはかからないとする考え方である．これを「時空のコンパクト化」という．実際，$(E_8 \times E_8)_{\mathrm{HET}}$ 理論をカラビ・ヤウ多様体と呼ばれる6次元多様体にコンパクト化してできる4次元理論は，現実の自然界を記述するのに適した数々の性質を備えており，盛んに研究されてきた．しかしカラビ・ヤウ多様体は知られているものだけでも何万種類もあり，そのうちのどれがいかなる原理で選ばれるのかという肝心の問題はほとんど手つかずの状態で残されてきた．その理由は，そもそも弦理論を“絵に描ける”弦の結合と分裂の理論として定式化すること自体，暗黙の裡にそうした基本的プロセスの強さを表す「弦の結合定数」g_s が小さいとする摂動論的な記述になってしまっているからである．そしてそのような弱い摂動的な相互作用では弦理論のタイプやコンパクト多様体の種類は一度選んだら最後決して変わらない．どれがダイナミックに選ばれるかを理解することは異なる理論間の遷移を理解することであり，それにはコンパクト多様体の選択も含めてすべての理論を一つの基本理論の異なる発現形態とみなす統一的な枠組と，g_s が大きい場合を取り扱える非摂動的手法が必要となるのである．これは非常に難しい根源的な課題であるが，1995年までにすでにその突破口となり得る二つのアイデアが発見されており，それを用いて見かけ上異なる超弦理論の間の関係を探る努力がゆっくりとした速度でではあるが始まっていた．

2.6　弦理論の双対性 (duality)

その二つのアイデアとは，「T-duality」及び「S-duality」と呼ばれる概念である．[*5]

まずT-dualityはもともと閉弦の運動する空間を一次元分だけコンパクト化して半径 R の円 (以下 S_R^1 と記す) にし

[*5] Tはtarget space (＝弦の運動する時空) の頭文字であり，Sはstrong-weakの略である．

た理論を考える状況で発見された弦理論に特有の対称性である.[3] このような状況下における弦理論は次の二つの新しい性質を獲得する. まず, 弦の波動関数がS^1_Rを一周したとき元に戻ることの要請から, この方向の運動量がm/R (m は整数) という離散的な値に制限される. このようなモードはKK(=Kaluza–Klein) モードと呼ばれる. もう一つの新現象は, 閉弦がS^1_Rに巻き付いた配位が可能になることである. これを巻き付き (winding) モードと呼ぶが, 弦には張力があるので, これに伴い, 巻き付き数をnとしてnRに比例するエネルギーが蓄えられる. すると弦の質量スペクトルは$M^2 \propto \sum_{m,n}[(m/R)^2+(nR/l_s^2)^2]$+振動部分という形になる. 容易にわかるように, この表式は同時に$R \leftrightarrow \tilde{R} \equiv l_s^2/R$, $m \leftrightarrow n$ の入れ替えをする"T-duality 変換"と呼ばれる操作に対して不変である. すなわち, コンパクト化の半径が逆数になっている「双対空間」での弦は, 運動量と巻き付き数を入れ替えて解釈すれば, 元の空間での弦と全く同じ性質を示す, という驚くべき事実を示しているのである.*6

上の簡単な例ではT-変換は同じ理論の異なる見方を提供しているが, より一般にはT-変換は異なる弦理論を関係づける働きを持つ. そしてこれを利用すると, 容易に$\mathrm{IIA}/S^1_R \overset{T}{\longleftrightarrow} \mathrm{IIB}/S^1_{\tilde{R}}$という関係を導くことができる. この意味は, タイプIIA理論をS^1_Rにコンパクト化した9次元理論は同様に, タイプIIB理論を逆数の半径を持つ$S^1_{\tilde{R}}$にコンパクト化した理論とT-変換で互いに移りあうということである. さらに, この考えをヘテロ弦に適用すると, 込み入った議論の末に, $(E_8 \times E_8)_{\mathrm{HET}}/S^1_R \overset{T}{\longleftrightarrow} \mathrm{SO}(32)_{\mathrm{HET}}/S^1_{\tilde{R}}$という関係が得られる. すなわち二つのタイプのヘテロ弦理論はやはり9次元で繋がっているのである.

もう一つのタイプの双対性であるS-dualityは弦の結合定数g_sをその逆数$1/g_s$にした理論との関係を付ける強力な非摂動的変換である. しかし, そもそも未だ非摂動的な定式化を持たない弦理論において, この変換の帰結をチェックすることは不可能であるように見える. ここにおいて超対称性が威力を発揮する. 後で詳しく述べるように, 超弦理論にはブラックホールと解釈される拡がりを持った非摂動的物体が存在するが, そのうちで, 質量と電荷の間に比例関係を持つ「BPS*7 状態」と呼ばれる特別な配位に対しては, これらが超対称代数の特殊な表現に属することからすべての量子補正が消えることが言える. すなわち, これらの物体の性質に関してはg_sが小さいところでの知識がg_sが大きくなっても通用するので, これを用いてS-dualityの帰結を調べることができるのである.

こうしてT-dualityやS-dualityを用いることによって異なるタイプの超弦理論の間に幾つかの関係が見つかってきたのであるが, 次章では, こうした発展とはほとんど独立に進められていた超弦理論と11次元超重力理論との関係の研究の様子を述べ, M理論の入り口まで歩を進めることにする.

3. 11次元超重力と超膜理論

3.1 10次元と11次元の接点

超重力理論は, ボゾン場とフェルミオン場を各点ごとに関係づける強力な「局所的超対称性」を指導原理として1976年に作られた重力理論であり, 初めて重力と物質を統一する枠組みを与えたのみならず, 超対称性によって短距離から生ずる紫外発散が著しく緩和されるという特徴を備え, 一時は統一理論の最有力候補と目された理論である.

この理論は当初4次元で$N=1$の超対称性*8 を持つ場合に構成されたのであるが, ほどなく最大$N=8$までのより高い超対称性を持つ理論も存在可能であることがわかってきた. しかしながら, Nが3を超えると, 超対称性を満たす作用は著しく非線形となり, 最大の超対称性を持つ$N=8$理論の構築は困難を極めた.

この困難を見事に克服したのがCremmer, Julia及びScherkの仕事である.[4] 彼らは, 4次元$N=8$理論が全体で32個の超対称生成子を持たなければならないことから, まずこれと同数の超対称生成子を持つ11次元の$N=1$超重力理論を考え*9 これを4次元に「次元縮小」(dimensional reduction) すれば良いのではないかと考えた. ここでの次元縮小とは, 場の4次元以外の空間座標依存性を落とすと同時に, 11次元の場を4次元のローレンツ多重項に分解する操作を言う.*10 そして実際彼らはこのアイデアを実現する11次元超重力理論を構成して見せたのであるが, そこに現れるのはgraviton 場g_{MN}, graviton 場Ψ_M, 及び3階の反対称テンソル場C_{LMN} (以下この章では, L, M, N等は0〜10の11個の添え字を走り, μ, νなどは0〜9を走るとする) のみであり, 思いの外簡明な内容を持つ理論であった.

その後超弦理論が出現すると, 超重力理論は基本理論の位置を退き, 超弦理論の低エネルギー有効理論として位置づけられるようになった. 実際, 前章で述べた5種類のタイプの超弦理論の有効理論として5種類の10次元超重力理論が現れるのである. しかし, 最大の超対称性を備えた11

*6 T-duality 変換は, 振動子部分に対しても容易に拡張され, また相互作用を考慮に入れても厳密に成り立つことが摂動的に示される.

*7 BPSはBogomolnyi–Prasad–Sommerfeldの略. BPS状態の概念は, もともと彼らが発見した非可換ゲージ理論に現れる特別な磁気単極子解の持つ性質として認識されたものである.

*8 Nは当該次元での超対称生成子を組にしたローレンツスピナーの数を表す. 4次元ではスピナーは4成分なので$N=1$の場合の超対称生成子の数は4である.

*9 11次元のスピナーは32成分であるのでちょうど数が合う.

*10 例えば11個の成分を持つ11次元のベクトル場は1個の4次元ベクトル場と7個の4次元スカラー場に分解される.

次元超重力理論だけは唯一の例外として残ることになった．この理論は繰り込み可能でないため真に基本的な理論と考えるわけにはいかないが，少なくとも古典論の範囲で超弦理論の枠からはみ出す超重力理論が存在するという事実は大きな謎を投げかけたのである．

この謎を解き明かす幾つかのヒントは，1987年頃から徐々に得られ始めた．一つは，1987年 Bergshoeff ら[5] によって，3 階反対称場 C_{LMN} と自然に相互作用する物体として，2 次元的拡がりを持つ「超膜」(supermembrane) が考察され，その古典的な力学が定式化されたことである．*[11] 超膜は超弦の場合と同様に，その時空内での位置を表すボゾン場 $X^M(\tau, \sigma_1, \sigma_2)$ とその上に存在するフェルミ場 $\theta^\alpha(\tau, \sigma_1, \sigma_2)$ から作られる超対称性を備えた作用によって記述されるが，これらの場の物理的な自由度が一致するという要請から幾つかの特殊な次元でしか存在できない．そして奇しくも11次元はその可能な最大次元となっているのである．

この論文が現れるとまもなく，Duff ら[6] はこの超膜こそが11次元超重力と超弦理論の架け橋的存在であることに気付いた．すなわち，もし11次元時空の一つの空間的方向（10方向にとるとする）が小さな円状にコンパクト化しているとすれば，その方向に巻き付いた膜は細い弦のように見えるはずであり，それこそが超弦理論の基本要素である超弦に他ならないと考えたのである．しかもこの方向の励起エネルギーは円の半径の逆数に比例し，円が小さければその影響は低エネルギーでは無視できるはずであるから，この弦に結合する重力理論は11次元超重力理論の10次元への次元縮小で得られると考えられる．そして実際にこの操作を施してみると，見事に10次元のタイプ IIA 型超重力理論が出現することを示したのである．特に膜と結合する C_{LMN} 場の成分のうちで，$L=10$ であるものは，反対称性から $C_{10\mu\nu}$ の形となり，10次元の立場からは弦と自然に結合する 2 階の反対称テンソル場 $B_{\mu\nu}$ と同定することができる．

さらにその後この描像を裏打ちする事実が幾つか発見されることになる．まず，11次元超重力理論の古典的運動方程式の解として，実際に超膜解が存在し，それを次元縮小すると10次元IIA超重力理論における弦状の解を生み出すことが示された．また，この理論には予想通り超膜に「双対」な 5 次元的な拡がりを持つ解が存在することも示された．*[12] これから頻繁に登場するのであるが，一般に空間的に p 次元の拡がりを持つ物体は「p-brane」と呼ばれる．*[13] この言い方を用いれば，11次元超重力理論には互いに双対な 2-brane 解及び 5-brane 解が存在するということになる．さらに，これらの解が10方向の円に巻き付く場合を調べると，10次元 IIA 超重力理論で知られていた様々な brane 解を再現することもわかってきたのである．

3.2 超膜の量子力学

こうした一連の事実は，超膜（及び 5-brane）を架け橋として，10次元の超弦理論と11次元の超重力理論が密接な関係にあることを強く示唆している．しかしながら，これまでの議論は完全に古典的であり，より深い理解を得るためには超膜の量子力学的性質を調べることが重要になってくる．

まず，超膜の励起状態のスペクトルが問題になる．弦の場合には，基底状態として10次元の重力場やゲージ場等の massless 場が現れ，その上に重い無限個の励起状態が現れたのであるが，これから類推すれば，超膜の基底状態は11次元超重力理論の massless 場からなり，その上に同様の無限スペクトルが出現すると期待される．しかしながら，弦と違って超膜の相互作用は本質的に非線形であり，実際に量子化を実行してこの予想を確かめるのは容易ではない．

1988年から89年にかけて，B. de Witt ら[7,8]は超膜理論の持つゲージ対称性を用いてハミルトニアンを簡単化する方針でこの問題に取り組み，次の驚くべき結果を得た．

(i) 超膜のハミルトニアンは SU(N) をゲージ群とする $0+1$ 次元の超対称ヤン・ミルズゲージ理論（$N\times N$ 行列の量子力学）のハミルトニアンの $N\to\infty$ 極限の形に書けること．

(ii) このハミルトニアンは 0 から始まる質量ギャップのない連続スペクトルを持つこと．

(iii) そのため超膜は量子力学的に不安定であること．

(i) の結果は非常に示唆的で美しいが，(ii) 及び (iii) は全く予期せぬ結論である．すなわち，超膜理論は安定な11次元超重力理論を生み出さないと言うのである！

これは一体どういうことなのか．少し思いを巡らせてみると，この驚きの原因は超膜理論に対する重大な思い違いにあることがわかる．静的な超膜のエネルギーはその面積と張力の積で与えられる．このことは超膜から（面積ゼロの）ひげのような無限に細いスパイクがでるプロセスがい

*[11] 簡単な幾何学的考察から，一般に空間的に p 次元の拡がりを持つ物体は $p+1$ 階の反対称テンソル場の源となることが言える．荷電粒子 ($p=0$) がベクトルポテンシャル A_μ に，また弦 ($p=1$) が 2 階の反対称テンソル場 B に自然に結合するのはこの例である．

*[12] ここでいう「双対」とは，電磁気学における荷電粒子と磁気単極子の間の双対関係の拡張概念である．4 次元では，荷電粒子に結合する 1-形式 A_μ から作られる場の強さ $F_{\mu\nu}$ は 2-形式であり，その双対 $\tilde{F}_{\mu\nu}$ もまた $4-2=2$-形式となり，そのポテンシャル $\tilde{A}_\mu$ は 1-形式，そしてこれに結合するものは拡がりを持たない点状の粒子（磁気単極子）となる．11 次元時空において類似の議論を行えば，3-形式 C の場の強さは 4-形式，その双対は $11-4=7$-形式．従ってそのポテンシャルは 6-形式となり，これに結合する物体は 5 次元的拡がりを持つことになる．

*[13] 余談ではあるが，この名称は言語学的にはかなりの暴挙である．実際 membrane の語源はラテン語の membrāna，すなわち，身体の部分 (member<membrum)を覆う皮膚の謂であり，brane は単独では何の意味もなさない．

くらでも起こり得ることを意味する．しかも，通常このようなプロセスはゼロ点振動によるポテンシャルの出現によって抑制されるのであるが，超膜の場合には超対称性のためにポテンシャルがキャンセルしてしまい抑制が利かない．超膜の不安定性はこうした揺らぎに起因するのである．そしてさらに，この無限に細いひげ状の配位の存在によって超膜のイメージは決定的な変更を受ける．即ち，それらは超膜に取っ手のように付くことによってそのトポロジーを容易に変え，また幾つかの超膜を繋ぐことによって超膜の個数の概念をも無効にする．こうして，「一つ」の超膜の状態空間であると思っていたものが実はすでに第二量子化された多体系の状態空間になってしまっているという驚くべき描像が得られるのである．そして多体系であるのなら，連続スペクトルを持つのは全く自然なこととして理解できることになる．

しかし，それでは，超膜の多体系と超重力理論とはどのような関係にあるのであろうか．そしてまた，それを記述する超対称行列力学とはどのような意味を持ったものなのであろうか．その答えはM理論の定式化と深く関係した驚くべきものであることが後にわかるのであるが，それを説明するにはまず1995年に提案されたM理論の仮説そのもの及びその後の幾つかの目を見張る進展について述べなければならない．

4. 超弦理論の強結合極限とM理論

1995年3月に発表されたWittenの論文は，5種類の超弦理論を様々な次元にコンパクト化して得られる数々の理論の間の関係を，すでに述べたT-duality, S-duality及びその組合せを駆使して縦横に論じたものであるが，なかでもとりわけ衝撃的であったのは，IIA型超弦理論の強結合極限($g_s \to \infty$)として低エネルギーで11次元超重力と一致する未知の理論が現れることを強く示唆したことである．

Wittenの議論を要約しよう．彼はまず超弦理論の強結合極限を考察する手段として，10次元IIA超重力理論に現れる特殊なブラックホール解のスペクトルに注目した．それらは電磁場に似たRamond-Ramond場（以下RRと略す）と呼ばれるゲージ場に結合する「RR電荷」Qを持ち，質量と電荷の間に$M=|Q|/g_s$という関係がついたBPS状態になっている．この配位が量子化できたとし，これに伴いQの値が飛び飛びの値に離散化されたとすると，$g_s \to \infty$の極限では$M \sim |n|/g_s$, ($|n|=0, 1, 2, \cdots$,)というmasslessに近い粒子の無限スペクトルが現れることになる．そしてWittenはこれが，11次元超重力理論において10方向を1次元分円状にコンパクト化する際に現れるKaluza-Kleinモードのスペクトルの形と酷似していることに注目した．実際，すでにT-dualityの項で述べたように，そのスペクトルはRを円の半径として$M \sim |n|/R$の形であるから，$R \to \infty$の極限でやはり無限個のmassless粒子を生む．

Wittenは大胆にもこの出所が全く異なるように見える二つのスペクトルを同定することを考えた．しかしそのためにはRとg_sが比例関係にあることを言わねばならない．ここにおいて，弦理論の結合定数g_sの本来の意味が決定的な重要性を持ってくる．詳しく述べる余裕はないが，実はg_sという量は単なる定数ではなく，ディラトン場と呼ばれるスカラー場の真空期待値によって決まる量であり，しかもディラトン場はその名称からもわかる通りスケールの変換と密接に関係する．そして，11次元的な見地からは，この場は11次元計量g_{MN}の1成分$g_{10,10}$と同定されるのである．しかるに，10方向の円の半径Rはまさしく$g_{10,10}$によって測られるのであるから，Rとg_sは必然的に密接な関係にあるはずである．こうした考察をより具体的に行った結果Wittenが得た結論は，$R=g_s l_s$という見事な比例式であった．

この結果我々は驚くべき仮説に到達する：IIA超重力理論の強結合極限は$R \to \infty$，すなわちコンパクト化をはずした11次元超重力理論に一致する．そしてこのことは，より基本的なレベルで次の「M理論仮説」が成り立つことを強く示唆する：

"IIA超弦理論の強結合極限は11次元超重力理論をその低エネルギー有効理論とする本質的に11次元的な「M理論」を定義する．"

この主張自体は直接にはIIAという一つのタイプの超弦理論に関するものであるが，すでに知られていた異なるタイプの間の幾つかの双対関係，Wittenの論文の残りの部分で新たに発見された同種の関係，及びその後現れた幾つかの重要な論文の結果を総合すると，適当なコンパクト化と弦理論の双対性を駆使することにより，すべてのタイプの超弦理論が「M理論」という基本理論の異なる発現形態として統一的に理解されるという構図が浮かび上がってくる

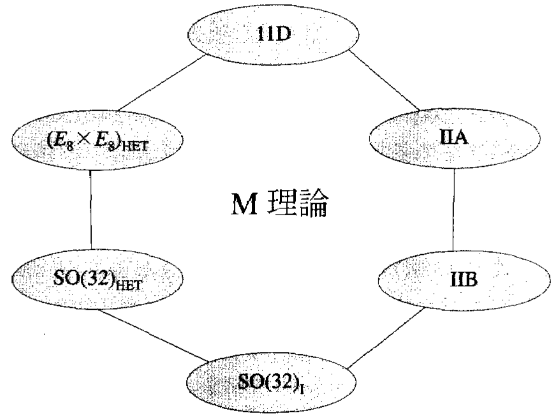

図2　5種類の超弦模型とM理論の統一の模式図．（"11D"は11次元の性質が露わになった相を表す．）

のである．この様子はしばしば図2のような模式図で表される．

されば次なる挑戦は「M 理論」のより具体的な形を追い求めることである．その一つの卓抜な解答は1996年10月に現れるのであるが，その前に，我々は弦理論の非摂動的性質を解明する上で中心的役割を果たすことになるもう一つの画期的な発見について述べなければならない．

5. ディリクレ・ブレーン (D-brane) とその力学

5.1 D-brane

前節で述べた Witten の M 理論仮説で重要な役割を果たしたのは，RR 電荷を帯び $M=Q/g_s$ の形の非摂動的質量スペクトルを持った BPS 状態をなすブラックホール解であったことを思い起こそう．これは粒子 (0-brane) 的な解であるが，実は10次元超重力理論には，この他にも拡がりを持つ様々な BPS “black p-brane” 解が存在することが知られていた．[9] これらはすべて $1/g_s$ 的な結合常数依存性を持つことが特徴で，これとは別に存在するソリトン的な 5-brane 解が示す $1/g_s^2$ 型依存性とは明確に異なっている．*14 超弦理論の非摂動的性質の理解を深めるにはこれらの black p-brane 解の量子力学を明らかにすることが重要であるという認識は Witten の論文以前からあったのであるが，せいぜい古典解のまわりの小さな揺らぎの性質を調べる程度しかできず，技術的な困難に遭遇していた．

しかし，Witten の論文が出てから約半年後，この困難を一気に打開すると共に，その後の超弦理論の発展を大きく加速する重要な仕事が現れた．J. Polchinski によるディリクレ・ブレーン，通称 D-brane, と呼ばれる物体の重要性の認識である．[10] D-brane の概念自体はすでに1989年に Polchinski らによって導入されていたものであるが，それがまさしく black p-brane の超弦理論における厳密なしかも驚くべきほど簡明な量子力学的記述になっていることに Polchinski は気づいたのである．

空間的に p 次元，時間的に1次元の拡がりを持った “Dp-brane” とは，一言で言えばその上に開弦が付き得る物体である．開弦の端は Dp-brane 上を自由に動くことができるが，垂直方向には動けない．後者の条件は開弦に対していわゆるディリクレ境界条件を課すことによって実現されるので，ディリクレ・ブレーンと呼ばれるのである．部分的なディリクレ条件の採用は超弦理論の整合性の要である超共形不変性を壊さないので，これは超弦理論で厳密に許される配位を表し，一方これが時空の超対称性を半分だけ壊すことと関係してBPS状態になっていることが容易に言える．

*14 通常のゲージ理論に現れる磁気単極子解などのソリトン解は全て $1/g_s^2$ 型依存性を持つ．

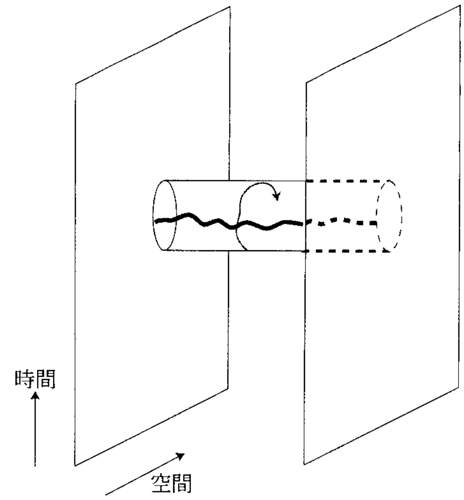

図3 二つの D1-brane の相互作用．

例として，図3は二つの D1-brane (“D-string”) が開弦を通じて相互作用している状況を，時間方向への運動も含めて表したものである．図のように D-brane を結ぶ開弦の軌跡は円筒面をなすが，これを輪切りにしてみると，この図は二つの D-brane の間に閉弦が交換されているプロセスを表しているものとも解釈できる．すなわち，D-brane は閉弦を生み出したり吸収したりする能力を持った面であるとも言える．

こうして，超弦理論に現れる非摂動的物体のうちの一つの重要なカテゴリーが厳密簡明に記述できるようになったことは，様々な難問に具体的な突破口を与えることとなった．その中にはここ四半世紀の間懸案であったブラックホールのエントロピーの統計力学的解釈という大問題に対する (部分的) 解答[11] も含まれるが，紙面の都合上割愛する．

5.2 D-brane の多体系と超対称ヤン・ミルズ理論

さて，こうして表舞台に登場してきた Dp-brane はどのように振舞う物体なのであろうか．

1枚の Dp-brane の力学的自由度はその上に両端を持つ開弦の自由度に他ならないから，その低エネルギーにおける励起は開弦の最も軽いモードであるところの U(1) ゲージ場で記述される．次に複数の Dp-brane の多体系を考えよう．特に，N 枚の Dp-brane がほとんど重なった配位を考えることは示唆的である．この場合には各々の Dp-brane 上に存在する N 個の U(1) ゲージ場に加えて，異なるbrane間を結ぶN^2-N個の短い開弦の励起モードも考えねばならない．しかるに開弦の最低エネルギーは弦の長さに比例するから，Dp-brane が完全に重なる極限ではこれらもまた質量ゼロのゲージ場のモードで記述される．すなわちこの配位の低エネルギー励起は，併せて $N+N^2-N=N^2$ 個のゲージ場で表されることになる．これはゲージ群が U(N) である場合のゲージ場の個数に他ならない．そし

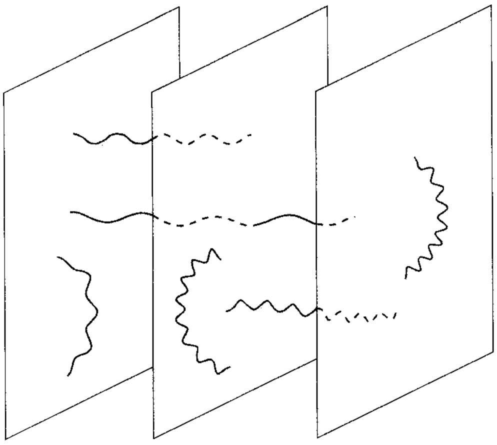

図4　ほとんど重なったN枚のD-brane間の相互作用.

てより詳しい解析の結果，我々はまた一つの美しい結果に導かれる：[12] "N枚のほとんど重なったDp-braneの低エネルギーでの力学はU(N)をゲージ群とするDp-brane上で定義された$p+1$次元の超対称ヤン・ミルズ理論で記述される．*15"

ここで特に，Wittenの論文で重要な役割を果たした$p=0$，すなわち粒子的なD0-braneの場合を考えてみると，その多体系は0+1次元のU(N)ゲージ理論，つまり$N\times N$行列の超対称量子力学によって記述されることになる．しかしこれは3.2節で述べた超膜理論の一つの表現に他ならない！　これは一体偶然なのであろうか．その考察は章を改めて述べることにする．

6. M理論のミクロな定式化

SU(N)(あるいはU(N))ゲージ対称性を持つ$N\times N$行列の超対称量子力学が同時に超膜の多体系およびD0-braneの多体系を記述し，しかも前者は11次元超重力理論の解であり，また後者はその理論を10次元にコンパクト化する際に現れる本質的に11次元的起源を持つモードであるということは，この両物体が密接な関係を持ち，M理論と深く関わっていることを強く示唆する．このことに関して，P. K. Townsendはより具体的に，超膜を10次元に次元縮小すると，10方向に巻き付かない配位はIIA理論のD2-braneとなり，しかもその上のゲージ場が担う"磁荷"がD0-braneの持つRR電荷そのものになっていることを示し，これに基づき超膜が無限個のD0-braneから成っているという説を提唱した．[13] これは非常に魅力的な考えであるが，D0-brane系の記述としての行列理論は低エネルギー有効理論でしかないから，そのままでは無理がある．実際，D0-braneの運動エネルギー項は$(1/2)mv^2$という非相対論的な形をしており，低エネルギー近似であることを明白に物語っているように見える．

6.1 M理論の行列模型

ところが1996年10月に至って，Townsendの描像を裏書きするのみならず，上記の行列量子力学をM理論の基本的なミクロな定式化として捉え直す新解釈が現れた．T. Banks, W. Fischler, S. Shenker, 及び L. Susskind (BFSS)[14] によるM理論の行列模型*16の提唱である．BFSSによる再解釈のマジックの種は，（ほとんど）光速度で運動する観測者の立場から理論を記述する「無限運動量系」と呼ばれる極限的な視点の導入である．彼らはまず一端11次元のうち1次元分(例によって10方向と呼ぶ)を半径Rの円にコンパクト化する．するとこれに伴うKaluza–KleinモードとしてすでにおなじみのD0-branesが現れる．さて観測者の運動方向を$-x_{10}$方向にとると，相対的に全ての物体は$+x_{10}$方向に光速で運動するから，M理論のあらゆるモードはこの方向に関して無限に大きなエネルギーを持ち，その波動関数は激しく振動して物理量に寄与しなくなる．但しうまいことに，D0-brane（及びそれらを結ぶ開弦のゲージ場のモード）だけは例外として残る．コンパクト化により離散化された運動量$p_{10}=N/R$は同時にRR電荷の意味を持ち，BPS粒子であることからこれとエネルギーの間に大きな相殺が起こって，無限運動量系で見たエネルギーは有限にとどまるのである．しかも，いわゆる相対論における「時計の遅れ」の現象からこれらの物体の運動は非常にゆっくりと，従ってあたかも低エネルギー状態にあるかのように見えるのである．そしてコンパクト化されていない元々の11次元理論を得るには，Rとp_{10}を同時に大きくする，従って$N\to\infty$の極限をとればよいというのがBFSSの主張である．要約すれば，D0-braneの行列理論が低エネルギー理論に見えたのは見かけ上のことであって，実は全てのエネルギー領域で有効なM理論の表式を「無限運動量系」という特殊な系で見たからにすぎないというのである．

こうして提唱されたM理論の作用の形は次のようなものである．

$$S=\frac{1}{R}\,\mathrm{Tr}\int\mathrm{d}t\Big\{\frac{1}{2}[D_t,X_m]^2+\frac{g^2}{4}[X_m,X_n]^2+\frac{\mathrm{i}}{2}\Theta_\alpha[D_t,\Theta_\alpha]+\frac{g}{2}\Theta_\alpha\gamma^m_{\alpha\beta}[X_m,\Theta_\beta]\Big\},$$

$$D_t\equiv\partial_t-\mathrm{i}gA,\quad g=R/l_{11}^3 \tag{3}$$

*15 この結果は，Dp-braneを少し離した場合にも満足すべき記述を与える：このときには，異なるbraneを結ぶN^2-N個の開弦の励起はその距離に比例するエネルギーを獲得し，対応するゲージ場が質量を獲得してゲージ対称性がU(1)^{N}に落ちるが，この現象は素粒子の標準模型において決定的な役割をすることでも知られるHiggs現象の幾何学的な実現に他ならない！

*16 通常は"Matrix Theory"と呼ばれるが，筆者にはまだ"Theory"と呼ばれるにふさわしい段階には到達していないと思われるので，この小稿では"行列模型"と呼ぶことにする．

ここで，l_{11}は11次元のプランク長，$X_m(t)$，$(m=1\sim9)$，$A(t)$，$\Theta_\alpha(t)$，$(\alpha=1\sim16)$ は $N\times N$ エルミート行列である．X_m の対角成分は D0-branes の位置を表すものと解釈され，非対角成分及びゲージ場 A はそれらの間のボゾニックな相互作用を表す．またフェルミ変数からなる行列 Θ_α は D0-brane のスピン状態を記述すると共に，開弦のフェルミ粒子モードによる交換相互作用を表す．$\gamma^m_{\alpha\beta}$は SO(9)-ガンマ行列である．

この作用は一見簡単に見えるが，すでに述べたようにM理論として解釈するには $N\to\infty$ 極限をとらなければならないので，その取り扱いは厄介である．しかしほどなくして，L. Susskind により，N が有限の場合でも，この理論は M 理論を（空間的な x_{10} 方向ではなく光円錐的な）x_0+x_{10} 方向にコンパクト化したものと解釈できることが示された．こうして有限な N での解析が正当化されると様々な計算が行われ，この行列模型が確かに M 理論で期待される数々の性質を備えたものであることが明らかになってきた．

その幾つかを手短に紹介しよう．まずこの模型の古典解として，$N\to\infty$ 極限で超膜を表す解が存在することが簡単に言える．これはまさしく Townsend の描像の具現化に他ならない．次に，（まだ N が素数の場合にしか厳密な証明はないが）この模型には N 個の D0-brane の“束縛エネルギーがゼロの束縛状態”が各 N に対してただ一つ存在することが言える．これは $p_{10}=N/R$ という運動量を持つ1個の D0-brane が基本単位 $1/R$ の運動量を持つ N 個の D0-brane の集まりとしてうまく記述されることを表しており，非常に非自明なしかし望ましい結果である．そして，最も直接的な驚嘆すべき結果は11次元超重力理論を上述のように「光円錐コンパクト化」した場合の重力子間の古典的散乱振幅が行列模型の量子力学的ループ計算の N に関する leading 項によって（現在 2-ループまでの範囲で）正しく再現できることである．これは行列模型が真に11次元的な物理を記述している直接的証拠であるばかりでなく，古典論と量子論の「双対性」という観点からも非常に示唆的な結果である．

これらの結果は明らかに行列模型がM理論の重要な側面を捉えていることを示しているが，無論のこと問題も山積している．そのうちの最も基本的なものについては，最終章で議論する．

7. M 理論の課題

以上概観してきたように，M 理論という枠組みは，これまで異なる理論として捉えられてきた 5 種類の超弦理論を11次元の超重力理論とも併せて，一つのより基本的な理論の異なる発現形態として捉える鳥瞰的な視点を与え，同じ土俵の上でそれらの間の非摂動的な関係を論ずることを自然なものにした．その意味で，M 理論はまさに自然界の統一理論の新たなパラダイムを提供していると言って良いであろう．*17

M理論の11次元性を重要視する立場をとるとすれば，現在のところそれを具体的に反映させたM理論のモデルとしては本論で解説した M 理論の行列模型しか存在しない．この模型が非常に巧妙に11次元超重力を内包していることはすでに述べたが，以下に述べる理由により，真に満足のいくM理論の定式化からはまだほど遠いと言わざるを得ない．

最大の問題は，この模型の，基本的対称性に基づく構成原理が何ら明らかになっていないことである．無論従来の超弦理論に対してもその根本的な非摂動的構成原理はわかっていない．しかし超弦理論の場合には，少なくとも共形不変性が理論の整合性や様々な対称性を強く支配する役割を果たしていることは確かである．そしてそのこと自体，（完全に満足な定式化ではないにせよ）弦理論が世界面上の場の理論として表現できること，及び 2 次元においては繰り込み群の固定点で共形不変性が実現されること，を考え併せれば，非常に自然であると言える．しかし，M理論の行列模型ではこの共形不変性に対応するレベルの原理さえ理解されておらず，それに関連して，超弦理論の高度な対称性さえも凌駕するはずである巨大な対称性の構造がほとんど見えていないのである．例えば11次元重力の要であるはずである一般座標変換不変性の的確な表現はおろか11次元のローレンツ不変性でさえ原理的な理解はまだなされていない．

技術的なレベルでいえば，こうした困難の一つの原因は，これらの対称性が行列のサイズNを無限大にする極限において初めて精密に実現するはずのものであり，この極限をとることが極めて難しいという事情にある．行列模型の基を超膜理論に求める見方をとれば，N の有限性は超膜理論の配位空間の正則化 (regularization) に起因するのであったから，$N\to\infty$ は格子理論における繰り込み群の操作に良く似ていると言えるが，この方面からの研究も決定的な成功には至っていない．

もう一つの直接的原因は，現在の行列模型が無限運動量系での量子化（あるいは離散的光円錐量子化）の形式に基づいているところにある．この考え方はすでに解説したように行列模型の物理的描像の成功の根幹をなすものであるが，同時に，長年の懸案である光円錐量子化に伴う諸々の

*17 但し，この見方は絶対的なものではない．そもそも M 理論は超弦理論の強結合極限として現れてきたのであるから，10 次元超弦理論自体の真に非摂動的な定式化ができればそれは自然に M 理論の定式化ともなるはずである．本小稿では割愛せざるを得なかったが，この方向からの野心的な試みとして明白な 10 次元ローレンツ共変性を備えたタイプ IIB 型と呼ばれる行列模型が提唱され，精力的に研究されている．[15]

困難を宿命的に引きずっている．それは，単に明白なローレンツ不変性を壊すという形式的困難にとどまらず，一般に理論の複雑な真空構造やそれに起因する力学的な現象に関しては病的で危険な記述になっているのである．

上述の対称性の原理に関する問題と深くかかわるもう一つの重要な懸案は，いわゆる「背景独立性」(background independence) の問題である．周知のように，アインシュタインの重力理論では，物理的プロセスとそれが起こる(一般に曲がった)背景時空は同時に自己無矛盾的に理論の方程式系の解として決定される．すなわち，理論自体が背景時空のアプリオリな指定を必要とせずにユニヴァーサルに定式化されているという意味で「背景独立」になっている．しかしながら，弦理論やＭ理論の行列模型では，この根元的に重要な要求を満たす定式化は未だ構築されていない．

これがいかに難しい問題であるかは，逆にアインシュタイン重力の場合の成功の理由を考えてみればわかる．アインシュタイン理論において時空構造の情報は，計量テンソル $g_{\mu\nu}$ やそれから作られるリーマンの曲率テンソル $R^{\mu}_{\nu\rho\sigma}$ 等のテンソル量に直接的にコーディングされており，しかもこうした幾何学的概念自体は個々の幾何学によらない．従って，これらの幾何学的な量のみから構成される作用は自然に背景独立性を持つことになる．

これに対して，弦理論やM理論の行列模型では，直接計量や曲率等を取り扱わないため，そもそも「幾何学」をどう構成すればよいのかがわからないのである．弦理論の枠組みの中では幾つかの提案がなされているが，M理論の立場からの具体的なアイデアはまだ現れていない．

この「理論構成における幾何学」の問題とは別のもう一つの幾何学的問題として，時空の非可換性あるいは不確定性の問題がある．一般に重力を含む量子論においては，計量，従ってそれを用いて定義される距離や時間という基本概念に量子力学的な揺らぎが生ずる．それは直ちに時空の座標自体の不確定性を意味するわけではないが，「座標」を弦やD0粒子のような物理的実体の「位置」を表す力学変数と考える立場をとる場合には事情は一変し得る．そうした物理的実体を支配しているミクロなレベルでのダイナミックスによっては，それらの「位置」自体の揺らぎの間に相関が生じ，それらがあたかも非可換な時空上に存在するように見えても不思議ではない．実際，最近行列模型における時空のコンパクト化の解析を通じてこのような現象が見つかり，これを契機としてここ１年ほどの間に「非可換幾何学」に関連した弦理論及び場の理論の論文が山のように現れた．しかし，そこで論じられている非可換性は，本質的には磁場中の最低ランダウレベルの荷電粒子の座標演算子が示す非可換性という古くから知られている現象の現代的ヴァリエーションに他ならず，弦理論やM理論といった量子重力を含む量子論に特徴的な基本構造ではないように見える．より根本的なレベルでの時空の非可換性あるいは不確定性の構造の解明は，それを正しく捉えるための数学的言語の問題も含めて我々にさらなる革命的アイデアを要求しているように思える．

いずれにせよ，超弦理論自体を統一する「Ｍ理論」という壮大な構図はその姿を表したばかりであり，我々はまだその深い構造のほんの一端を捉え始めたにすぎない．しかし，この小稿を通じて解説してきたように，それは突然考案された夢想的な仮構ではなく，長い年月にわたる大胆な発想と緻密な裏づけの繰り返しの末に辿り着いた一つの知の総括的な姿であり，同時にまたそこから新たなる挑戦に向かう出発点であると言ってよいと思われる．

原稿に関して有用な助言をいただいた加藤光裕氏に感謝します．

文　献

1) E. Witten: Nucl. Phys. B **443** (1995) 85.
2) J. H. Schwarz: Phys. Lett. **367B** (1995) 47.
3) K. Kikkawa and M. Yamasaki: Phys. Lett. **149B** (1984) 357.
4) E. Cremmer, B. Julia and J. Scherk: Phys. Lett. **76B** (1978) 409.
5) E. Bergshoeff, E. Sezgin and P. K. Townsend: Phys. Lett. **189B** (1987) 75.
6) M. J. Duff, P. S. Howe, T. Inami and K. S. Stelle: Phys. Lett. **191B** (1987) 70.
7) B. de Witt, J. Hoppe and H. Nicolai: Nucl. Phys. B **305** (1988) 545.
8) B. de Witt, M. Lüscher and H. Nicolai: Nucl. Phys. B **320** (1989) 135.
9) G. T. Horowitz and A. Strominger: Nucl. Phys. B **360** (1991) 197.
10) J. Polchinski: Phys. Rev. Lett. **75** (1995) 4724.
11) A. Strominger and C. Vafa: Phys. Lett. **379B** (1996) 99.
12) E. Witten: Nucl. Phys. B **460** (1996) 335.
13) P. K. Townsend: Phys. Lett. **373B** (1996) 68.
14) T. Banks, W. Fischler, S. Shenker and L. Susskind: Phys. Rev. D **55** (1997) 112.
15) N. Ishibashi, H. Kawai, Y. Kitazawa and A. Tsuchiya: Nucl. Phys. B **498** (1997) 467

著者紹介

専門は素粒子論（特に超弦理論，量子重力理論，場の理論）．現在は主に，Ｍ理論／超弦理論の非摂動的定式化，及びその対称性の構造の研究を行っている．

(2000年11月28日原稿受付)