# 局所対称性とゲージ理論

加藤光裕

ある理論が力学変数に対して適当な変換をほどこしても不変である時、その理論には対称性があると言う。対称性は物理において大変重要な概念である。対称性（本稿で扱うのは連続的対称性である。これ以外に離散的対称性があるがここでは触れない）には大域的対称性と局所的対称性の二種類がある。変換のパラメータが時空点の関数である時その対称性は**局所対称性**と呼ばれ、パラメータが時空点によらない定数である時**大域的対称性**と呼ばれる。局所対称性をもっとも自然に実現しているのが**ゲージ理論**である。以下では、これらの対称性の特徴とゲージ理論についてみていこう。

## 1　大域的対称性

高校でも習う惑星運動に関する Kepler の３法則というのをご存じだろう。なかでも面積速度一定の法則は美しいと思った人も多いと思う。この面積速度一定の法則（惑星と太陽を結ぶ線分が一定時間内に掃く面積は軌道上どこでも一定である）は、対称性の帰結なのである。太陽と惑星の間にはたらく力は常に両者を結ぶ直線の方向を向いている。ポテンシャルエネルギー（位置エネルギー）でいえば角度によらず両者の間の距離だけの関数になっている。この角度に依存しないという性質が回転不変性とか等方性と呼ばれる対称性である。この対称性のために角運動量が保存され、角運動量は惑星の質量と面積速度の積の２倍なので結局面積速度が保存される。

この他にも運動量保存則は空間の一様性、エネルギー保存則は時間の一様性という対称性を表している。例えば運動量保存則の場合、世の中の物体の位置を一斉に同じだけ平行移動してやってもお互いの間の力は同じである。このとき「一斉に同じだけ」という点が大事である。一部の物体だけを動かしてはいけない。例えば地球だけを平行移動して太陽から引き離すと地球の生態系にとって大変なことが起きるが、地球も太陽も他の惑星も銀河系も . . . 宇宙のありとあらゆる全てのものを一斉に同じだけ平行移動しても何事も起こらない。このように「一斉に同じだけ」変換した時の対称性を大域的対称性と呼んでいる。

大域的対称性には上の例のような目に見えるような移動に関するものだけではなくもっと抽象的なものもある。電子数の保存は、電子を量子論的に表す波（正確には**場**）に対する位相変換の対称性からきている。電子の波を $\psi(x,y,z,t)$ と表すことにすると、位相変換は $\psi$ を $\psi' = e^{i\alpha}\psi$ に置き換えることで定義される。このとき $\alpha$ は、時空の点によらない勝手に選んだ実数の定数である。電子の波を $\psi$ で表しても $\psi'$ で表しても全く同じ現象を記述できるということである。例えば二つの経路を通過してきた波の干渉はお互いの位相の差だけに依存するのであって両方同時に同じだけ位相をずらしても干渉の様子は変わらない。

この対称性はもっと拡張できる。陽子と中性子は強い相互作用に限れば性質が大変良く似ている。これは、上で述べたような位相変換を陽子・中性子それぞれの場にほどこすだけでなく両者の入れ替えも許すような拡張された位相変換まで考えることにより対称性として良く理解することができる。この場合、陽子・中性子を２成分のベクトルとして表わせば、変換の方は $2\times 2$ の行列を掛けることで表わされる。

$$\begin{pmatrix} \psi'_{\text{陽子}} \\ \psi'_{\text{中性子}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_{\text{陽子}} \\ \psi_{\text{中性子}} \end{pmatrix} \qquad (1)$$

ただし、１成分の位相変換が $e^{i\alpha}$ の形をしていたのと同様の制限がついて、この行列はユニタリー行列でなければならない。この対称性はアイソスピン対称性と呼ばれている。一般に、拡張された位相変換は群をなし、そのユニタリー表現の行列を、場を成分に持つベクトルに掛ける操作として表わされる。

## 2　局所対称性

このように見てくると時空の各点で違った変換を許す局所対称性は、実現するのが難しそうに見える。平行移動にしても位相変換にしても「一斉」ではなく「バラバラ」に変換したら元とは一般に違った現象を表しそうに思える。特に力の様子が変わってしまいそうに思える。逆に言えば局所対称性を実現するには、この力の表し方に実は任意性があって変換

によって生じた違いがその任意性に吸収できればうまくいきそうである。

実際、局所対称性を実現している理論には力を媒介する場が存在し、物質の場の局所変換によって生じたずれを力の場の変換が吸収することによって対称性が保たれている。例えば、空間の各点ごとに勝手な平行移動を許しても不変であるような理論は、必然的に重力を表す場が入ってくる。これは一般相対性理論によって実現されている。一方、位相変換を局所的にして不変な理論はゲージ理論であり、力を媒介する場はゲージ場と呼ばれている。我々の良く知っている電磁場（のスカラーおよびベクトルポテンシャル）はゲージ場の一例なのである。

電磁場の場合に具体的にゲージ変換の形を書けば、例えば電荷 $q$ を持つ粒子の場 $\psi(x,y,z,t)$ について

$$\psi \to \psi' = e^{iq\Lambda(x,y,z,t)}\psi \tag{2}$$

のように、変換パラメータとして時空の点の関数 $\Lambda(x,y,z,t)$ を使う。このとき電磁場のほうは、ベクトルポテンシャル、スカラーポテンシャルそれぞれが、

$$\mathbf{A} \quad \to \quad \mathbf{A} + \nabla\Lambda \tag{3}$$

$$\phi \quad \to \quad \phi - \dot{\Lambda} \tag{4}$$

と変換される。これらをゲージ変換と呼ぶ。このゲージ変換のもとで電場 $\mathbf{E} = -\nabla\phi - \dot{\mathbf{A}}$ や磁束密度 $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ は変化しない。ここで注意してほしいのは、ゲージ場の変換には変換パラメータが微分された形で入っていることである。つまり、時空のある点と無限小離れた隣の点との間の変換の差を吸収していることがわかる。

このゲージ変換は、アイソスピンのような違う種類の場の入れ替えも許すような一般の変換にまで拡張でき、そのもとで不変な場の理論を Yang-Mills 場の理論と呼んでいる。現在の加速器で調べることができるエネルギー領域で素粒子の世界をほぼ正しく記述する理論として確立している標準模型と呼ばれる理論は、このようなゲージ理論によって構成されている。具体的な群としては、強い相互作用を記述する部分の SU(3) と電磁的および弱い相互作用を記述する部分の SU(2)×U(1) とからなっている。

なお、ゲージ対称性が成り立っている限りゲージ場は質量がゼロの粒子でなければならない。光に質量がないことは電磁場がゲージ場であることから自然に導かれる。

# 3　ＢＲＳ対称性

ゲージ理論をはじめ局所対称性を持つ理論の量子論（量子力学）を構成しようとすると実はそれほど単純にはいかないことがわかる。詳しい言葉の説明は省くが、普通は古典論から量子論を構成するときには、正準形式（Hamilton 形式）に移り、力学的変数（正準座標）とそれに対応する運動量（正準運動量）との間に Heisenberg の正準交換関係を設定する（これが不確定性関係のおおもと）。ゲージ理論の場合、ゲージ変換の任意性のために通常の手続きで定義された正準運動量がお互いに独立ではなくなってしまい、うまく量子化できなくなる。そこで、一旦ゲージ対称性を破ってやり、ゲージ変換に対応する力学的自由度を止めて量子化の手続きを実行する。これをゲージ固定と呼んでいる。しかる後にゲージ不変な物理量を抽出するのである。

ゲージ固定によってせっかく古典論で持っていたゲージ対称性がなくなってしまうが、もともとゲージ対称性として特徴付けられていた性質は量子論ではどうなってしまうのであろうか。量子論では局所対称性は存在しないのであろうか。実は、量子論においてはゲージ対称性の代わりにＢＲＳ対称性と呼ばれるほとんど局所対称性の様な姿をした大域的対称性が存在し、元々のゲージ対称性の性質を引き継いでいるのである。

例えば前に述べた電磁場のゲージ変換に対応するＢＲＳ変換は、

$$\mathbf{A} \quad \to \quad \mathbf{A} + \lambda\nabla c \tag{5}$$

$$\phi \quad \to \quad \phi - \lambda\dot{c} \tag{6}$$

と書ける。ここで、$c(x,y,z,t)$ はゴースト場と呼ばれるグラスマン数上に値をとる場、$\lambda$ はＢＲＳ変換のパラメータでグラスマン数の任意定数である。これは見てわかるように、ゲージ変換のパラメータ $\Lambda$ を $\lambda c$ で置き換えたものになっている。

これらゴースト場やＢＲＳ変換は、ゲージ場の理論が正しい量子論としての性質を保持するために重要な役割をしている。

## 4　対称性と保存則

はじめの方で見てきた例で分かるように対称性と保存則は密接な関係がある。このことを利用すると、理論が詳しくは解けなくても対称性があることが分かっていれば、それに対応する保存則を用いて様々なことが結論できる場合がある。例えば、面積速度一定の法則の場合、必ずしも力は万有引力である必要は無く、ポテンシャルが太陽と惑星の間の距離にのみ依存していれば何でも構わない。運動方程式が簡単には解けないようなポテンシャルであっても、等方性さえみたしていれば惑星は必ず面積速度一定の法則に従って運動することが結論できる。

ゲージ場の量子論においても複雑な計算を経なくても対称性から導かれる性質がある。電子と陽子の電荷は、正確に絶対値が等しく符号が逆である。量子論的には仮想的に生まれたり消えたりする様々な粒子と相互作用するので電荷の大きさは補正を受ける。電子と陽子とでは色々な性質が違うので量子論的な補正も一般には異なることが期待される。ところがゲージ対称性のために電荷に関しては両者に対する補正が全く同じになり、量子補正を考慮しても正確に電荷の比が $-1$ に保たれることが結論できるのである。

## 5　対称性の自発的破れ

理論に対称性がもともとあっても、それが自発的に破れる場合がある。古典力学でも運動方程式は対称性をみたしているのに、その解は対称性を破っていることがある。そのような場合、その解に対称性に対応する変換をほどこしてやると運動方程式の別の解が得られる（対称性を保っている解に変換をほどこすと自分自身に戻る）。例えば、一様重力場中の落下運動を考えてみよう。質量 $m$, 重力加速度 $g$ のとき運動方程式は $m\ddot{x} = -mg$ で、$x(t) = -\frac{1}{2}gt^2$ はその一つの解である。運動方程式は、$x$ を定数 $a$ だけずらしても不変である（並進不変性）。このとき、さきほどの解を定数 $a$ だけずらすと初期条件だけが違う別の解 $x(t) = a - \frac{1}{2}gt^2$ が得られる。もしも考えている力が並進不変ではない（バネの力等）ときは、ある解を定数だけずらしても解にはならない。

場の理論では、真空（基底状態、最もエネルギーが低い量子状態）が対称性を破る場合がある。この場合も対称性を破った真空に変換をほどこすと真空と同じエネルギーを持つ別の状態に移る。磁石が自発磁化を持つメカニズムは、対称性の自発的破れによって理解できる。

場の理論の場合、自発的に破れた対称性が大域的対称性か局所対称性かで物理的に重要な違いが現れる。大域的対称性が自発的に破れた場合、南部-Goldstone の定理があって質量がゼロのスカラー粒子が現れることが導かれる。位相変換の例で考えてみよう。まず、真空が自発的に対称性を破っていると、そこから位相変換をした状態は真空と同じエネルギーを持つ別の状態になる。次に空間のある点の付近で少し位相変換をした状態を考えると（これは時空に依存した変換であり、もちろん元と同じ状態にはならない）この位相の揺らぎは波のように時間とともに空間を伝わって行くので量子論的には量子化された粒子を表す。この波の波長が非常に大きい極限を考えるとこの状態は、真空に定数の位相変換を施した状態に近づき、そのエネルギーは真空のエネルギーに近づく。波長を大きくする極限でエネルギーが真空の値に近づくような粒子は質量がゼロの場合しか無い。というわけで、南部-Goldstone 粒子と呼ばれる質量ゼロの粒子が現れることがわかる。湯川の予言した $\pi$ 中間子は、原子核の中で陽子や中性子を結びつける重要な粒子であるが、その性質は近似的な南部-Goldstone 粒子として良く理解されている。

一方、局所対称性が自発的に破れた場合は事情が異なってくる。ゲージ場など局所対称性を実現するために導入された力の場は、その変換が変換パラメータの時空点間の差を吸収する形になっていることは前に述べた。ということは、大域的対称性の場合に考えたような「空間のある点の付近で少し変換した状態」というのは、ゲージ場の自由度の一部として現れなければならない。それが可能になるために、もとはゼロ質量であったゲージ場が有限な質量を持ってしまう。これを Higgs 機構と呼んでいる。

この Higgs 機構も素粒子の標準模型では重要な役割を果している。$\beta$ 崩壊等の弱い相互作用は、ゲージ場でありながら質量が 80GeV 程（陽子の約 85 倍）もあるWボゾンと呼ばれる粒子によって媒介されるが、これは Higgs 機構を使った標準模型（もちろんはじめはこう呼ばれてはいなかったが）によって発見前からその質量がほぼ予言されていた。

## 6　むすび

対称性は非常に強力な道具である。特殊なケースだが、２次元共形場理論では無限次元の半局所対称性によって Lagrange 関数が分からなくても理論が完全に解けたり、理論自体が分類できたりする。

また、対称性は理論の構造自体を規定する。本稿ではほとんど触れなかったが、一般相対性理論は一般座標不変性という局所対称性に基づく理論であり、ゲージ場に相当するものが計量である。この他にも、相対論的粒子の理論は世界線上のパラメータのとり方に依存しないので、いわば世界線上の一般座標不変性という局所対称性を持つ理論と見ることもできる。弦理論はそれを１次元分増やした世界面上の一般座標不変性を持っている。

一般に対称性は理論に制限を与えるが、局所対称性は特に力を媒介する場の入り方を強く規定する。理論をあまり変更する余地を与えない。そのため、統一理論を探る試みでは何らかの局所対称性が最終的な理論を決める原理としてはたらいているだろうと考えられている。しかしそれが何であるかはまだ分かっていない。

(数学セミナー 1996 年 12 月号 特集『局所と大域』· 日本評論社)