このノートは、講義で用いる特殊相対性理論の簡単な紹介を目的としたものである。教科書の Appendix A: A Short Review of Special Relatitivity だけでは不足している点も補うつもりである。しかし相対論全体の紹介ではないことは断って置かなければならない。

1　Michaelson-Morley の実験

19 世紀には光が波動であることは良く分かっていたが、それでは何が媒質であるかということに対する問に対する答えは宇宙空間を満たしているエーテルなる物質であるというのが当時の考えであった。もちろん理論屋の解答であってこのエーテルの存非を確かめようとしたのが Mchelson と Morley の実験であった。(1881,1887)
図 1 は Michaelson-Morley の装置の略図である。ここで、$\ell_1, \ell_2 \approx 11$m で装置全体

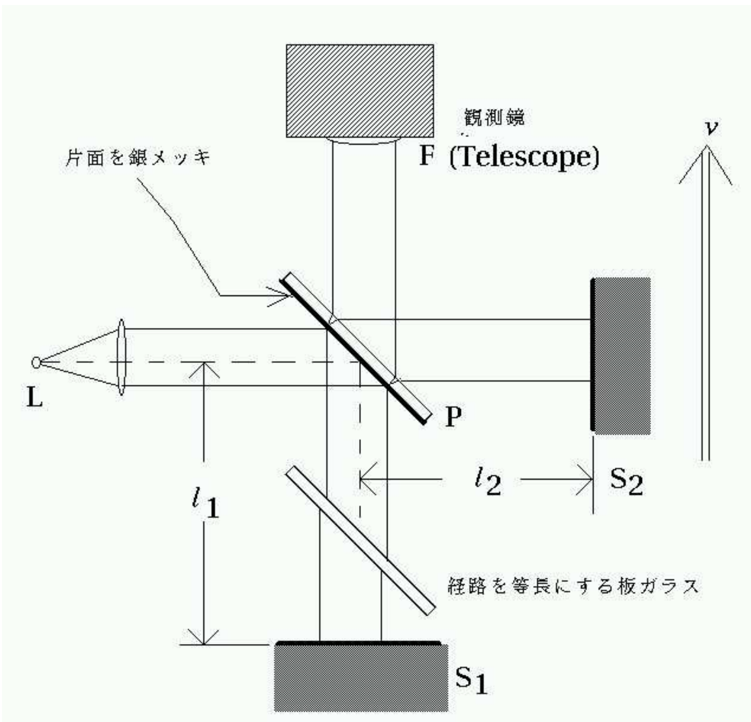


図1 装置略図

が静止エーテルに対し図 1 中の矢印方向に速さ v で動いていると想定している。地球公転軌道上の異なる点で精密に測定したが、エーテルに対する相対運動の効果を測定できなかった。その結果は、当時有力であったエーテル仮説を否定するものと

なった。以下で簡単に測定原理を概観してみよう。

光源Lから出た光は鏡P(片面が銀メッキされている。) で2本の光のビームに分かれる。
そのうち1本はPから鏡S_2に進み、反射後さらにPの銀メッキ面でも反射されて観測鏡Fに進む。
もう1本のビームはPから鏡S_1に進み、反射後Pを通り屈折され観測鏡Fに進む。その結果、2本の光線は観測鏡のところで干渉をひきおこし干渉縞が見られる。これが Michaelson 干渉計である。
今、静止エーテルに対して図1のような位置で装置が動いているとしよう。光がPS_1Pの経路を通るのに要する時間t_1は、古典力学の運動学の Galilei 変換では、光速をcとすると図2-aからすぐ分かるように

$$t_1 = \ell_1(\frac{1}{c-v} + \frac{1}{c+v}) = \frac{2\ell_1}{c(1-\beta^2)} \tag{1}$$

となる。ただし、ここで$\beta = v/c$とおいた。
もう一方の光ビームが経路PS_2Pを通るのに要する時間t_2は光がPからS_2まで進む間にPは光とは直交する方向に移動していることを考えに入れなければならない。図2-bのようにこの移動距離をδとしよう (図2bのO角形PS_2Pでは辺PPが2δである)。
やはりδ、t_2ともに簡単に求まり

$$\delta = \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}\ell_2 \tag{2}$$

$$t_2 = \frac{2\sqrt{\ell_2^2+\delta^2}}{c} = \frac{2\ell_2}{c\sqrt{1-\beta^2}} \tag{3}$$

となる。2本に分かれた光線による干渉縞は光路差$\Delta = c(t_1 - t_2)$、つまり

$$\Delta = 2(\frac{\ell_1}{1-\beta^2} - \frac{\ell_2}{\sqrt{1-\beta^2}}) \tag{4}$$

を用いた光の波長λで割れば良い。
次に約3ヵ月後、地球の公転軌道上で静止エーテルに対し速度ベクトルの向き (図1の矢印) が90°変わる時に同じことを測定すると上式のℓ_1とℓ_2を入れ換えればこの時の光路差Δ'が求まる。

$$t'_1 = \frac{2\ell_1}{c\sqrt{1-\beta^2}} \tag{5}$$

$$t'_2 = \frac{2\ell_2}{c(1-\beta^2)} \tag{6}$$

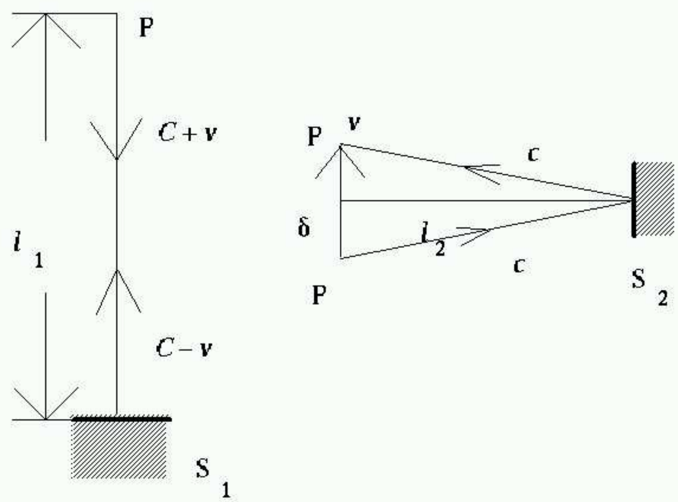


図2 a　図 2 b

したがって光路差は

$$\Delta' = 2(\frac{\ell_1}{\sqrt{1-\beta^2}} - \frac{\ell_2}{1-\beta^2}) \tag{7}$$

であるので、3ヶ月前との干渉縞のずれの本数は

$$\frac{\Delta' - \Delta}{\lambda} = \frac{2(\ell_1 + \ell_2)}{\lambda}(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - \frac{1}{1-\beta^2}) \approx -\frac{\ell_1 + \ell_2}{\lambda}\beta^2 \tag{8}$$

となると期待される。
ここで v はおよそ 30km/s で光速 c に比べて 10^{-4} だけ小さいと近似した。Na の D 線 (588.995nm、589.592nm) を使ったとき 0.37 がずれとして期待できるが Michelson-Morley は 0.02 以下とする結果しか得られなかった。
つまり目論見とは逆にエーテルの存在は検出できなかった。その後も多くの実験がなされたがエーテルの存在は立証できなかった。このことは非常に大きな問題を投げかけていたのである。

2　特殊相対性理論

A. Einstein は 1905 年特殊相対論を発表してエーテル仮説を葬り去った。その理論は

1. 電気力学の法則はどの慣性系からみても同じである。どの系で見ても自由空間を進む光の速さは一定である。

2. 絶対慣性系を定めることはできない。

ということから出発している。ここでいう電気力学の法則とは Maxwell の法則のことである。Maxwell の法則から導出される波動方程式の解である電磁波、光波が自由空間を伝搬するのは時空間の本来の性質であることに由来しておりエーテルの存在はそもそも仮定する必要がないのである。古典力学の Galilei 変変換では慣性系同士の変換を行っても Maxwell の法則を不変に保てず、光速度一定の事実と反してしまう。慣性系同士を結ぶ座標変換は Galilei 変換ではなく、Lorentz 変換である。
ここで Appendix A に従って Lorentz 変換と相対論力学について説明しよう。
二つの慣性系 F(x, y, z, t) と F'(x', y', z', t') があり、F' は F から見て x 軸の正方向に一定の速さ v で動いているとする。 系 F で時刻 t_A で (x_A, y_A, z_A) でおきた事象 A は系

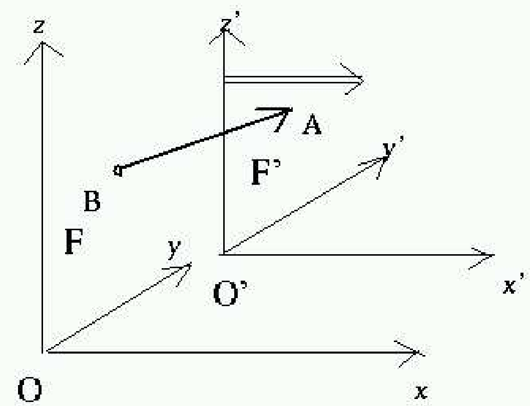


図3

F' では時刻 t'_A、座標は、(x'_A, y'_A, z'_A) であると記述され、系 F で時刻 t_B で (x_B, y_B, z_B)

でおきた事象 B は系 F' では時刻 t'_B、座標は、(x'_B, y'_B, z'_B) であると記述されると表す。
AB 間の空間座標の差および時間の差を定義しておく。

$$\begin{aligned} \Delta x &= x_A - x_B \\ \Delta y &= y_A - y_B \\ \Delta z &= z_A - z_B \\ \Delta t &= t_A - t_B \end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned} \Delta x' &= x'_A - x'_B \\ \Delta y' &= y'_A - y'_B \\ \Delta z' &= z'_A - z'_B \\ \Delta t' &= t'_A - t'_B \end{aligned} \tag{10}$$

点 B から発せられた光が点 A に到達する現象を例にとる。
光速度 c 一定の要請から $c = \frac{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2}}{\Delta t} = \frac{\sqrt{\Delta x'^2+\Delta y'^2+\Delta z'^2}}{\Delta t'}$ となっていなければならない。
この要請はこの 2 つの系 F と F' では時間は共通とする Galilei 変換 $\Delta x' = \Delta x - v\Delta t, \Delta y' = \Delta y, \Delta z' = \Delta z, \Delta t' = \Delta t$ では成立しない。この Galilei 変換を極限として含む次の Lorentz 変換はこの要請を満たすことが後に述べるように問 2 の結果を使えば簡単に分かる。
$\beta = v/c$ を用いて $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$ を定義する。変換

$$\begin{aligned} \Delta x' &= \gamma\Delta x - \beta\gamma c\Delta t \\ \Delta y' &= \Delta y \\ \Delta z' &= \Delta z \\ \Delta t' &= \gamma\Delta t - \beta\gamma\frac{\Delta x}{c} \end{aligned} \tag{11}$$

およびその変換

$$\begin{aligned} \Delta x &= \gamma\Delta x' + \beta\gamma c\Delta t' \\ \Delta y &= \Delta y' \\ \Delta z &= \Delta z' \\ \Delta t &= \gamma\Delta t' + \beta\gamma\frac{\Delta x'}{c} \end{aligned} \tag{12}$$

が Lorentz 変換である。(岩波文庫 青 934-1 アインシュタイン 相対性理論 内山龍雄 訳・解説 参照)

上述の光は時間 Δt の間に

$$\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2} = c\Delta t$$

なる距離だけ進むから、

$$\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 - c^2 \Delta t^2 = 0$$

が成立している。
以下の問 2 の結果を使うと

$$\Delta x'^2 + \Delta y'^2 + \Delta z'^2 - c^2 \Delta t'^2 = 0$$

が成立するので、系 F' で見たとき、この光は

$$\sqrt{\Delta x'^2 + \Delta y'^2 + \Delta z'^2} = c\Delta t'$$

だけ進んでいることが分る。
こうして確かに Lorentz 変換は光速度一定の条件を満たしていることが分る。

問 1: $\beta \ll 1$ のとき、β の一次までの展開により Galilei 変換がえられることを確かめよ。

問 2: この Lorentz 変換のもとで
$\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 - c^2 \Delta t^2 = \Delta x'^2 + \Delta y'^2 + \Delta z'^2 - c^2 \Delta t'^2$ が成り立つことを示せ。

I. Lorentz-FitzGerald 収縮

動いている物体は運動方向に縮んでみえる。他の方向には収縮は起こらない。例えば系 F' の x' 軸上に置かれた長さ L_0 の物指しは系 F からみると縮んで見える。
物指しの長さは系 F' で $L_0 = x_2' - x_1'$ であり、系 F では $L = x_2 - x_1$ であるとする。

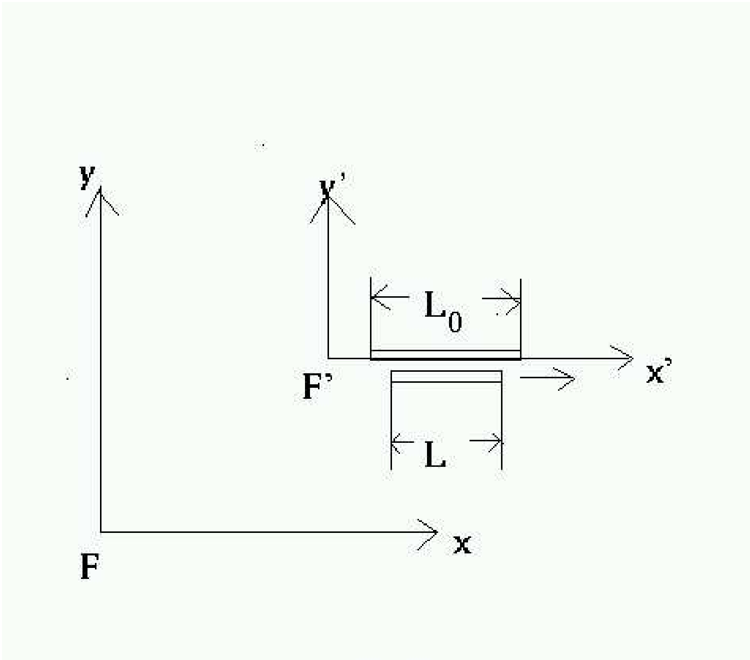


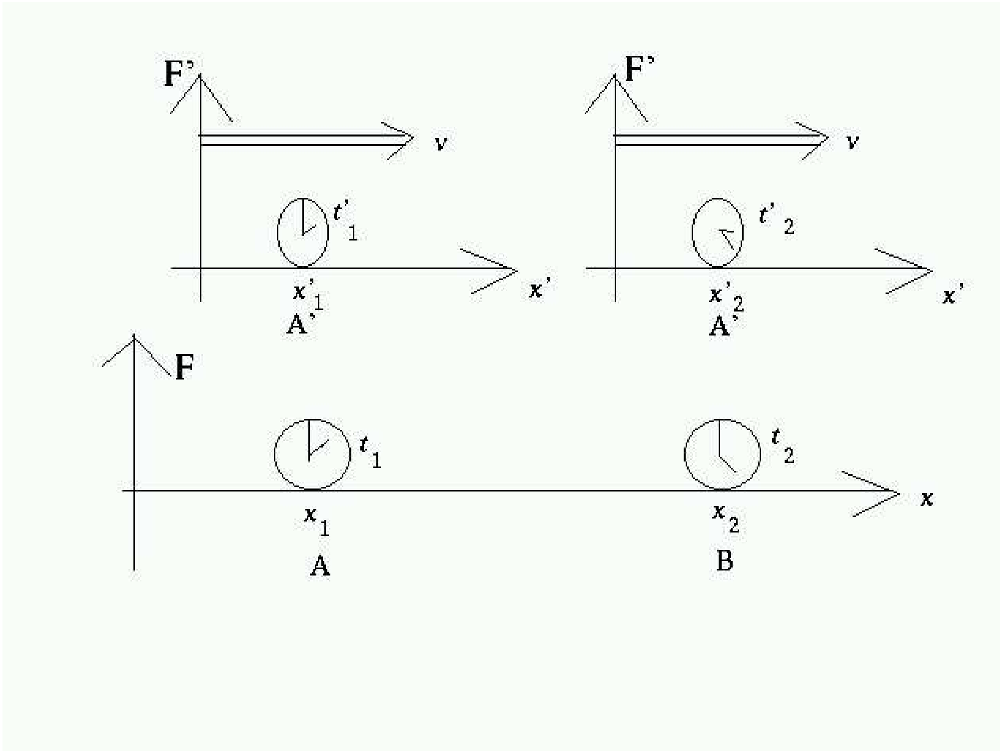
図４ ローレンツ収縮

物指しの両端の座標 x_1, x_2 および x_1', x_2' の測定はそれぞれの系で同時刻で行われる。だから (11) 式の最初の式の Δt を 0 とおいて $L = \frac{1}{\gamma} L_0$ を得る。$\frac{1}{\gamma} = \sqrt{1-\beta^2} < 1$ であるから動いている物指しは動いている方向に縮んでみえることがわかる。これをローレンツ収縮または Lorentz-FitzGerald 収縮という。

II. 時間の遅れ

動いている時計は遅く進む。
系 F' の空間の点 A$(x_1', 0, 0)$ に時計 A' があるとする。これを系 F の 2 点 $(x_1, 0, 0)$、$(x_2, 0, 0)$ にある二つの時計 A,B と比べる。ただし A を動いているちょうど A' が通過するとき、A と A' の時刻を合わせておく。

F からみて速さ v で進む時計 A' が時間 Δt の間に進む距離は $\Delta x = x_2 - x_1 = v\Delta t$ で与えられる。F' でみていると A' はもちろんとまっているので $\Delta x' = 0$。(12) の最



後の式より $\Delta t' = t'_2 - t'_1 = \frac{\Delta t}{\gamma}$ ということが分かる。
ここで A' が系 F の B 点を系 F の時刻 t_2 に通過するとき、A' の時刻 t'_2 であったとした。
この値は系 F で計った時間間隔 $\Delta t = t_2 - t_1$ より小さい。

これより動いている時計は静止している時計より遅く進むことがわかる。

問 3: μ 粒子の寿命は 2.2×10^{-6} sec である。ただしこの値は μ の静止系での値である。
(1) μ 粒子が光速 c で走っているとき、消滅するまでに何 m 走るか。
(2) 地上から 1 万 5 千 m 上空で 1 次宇宙線が大気の原子と非弾性衝突して生成された μ 粒子は地表面で観測されるの何故か。

III. 速度の変換式、合成則
系 F で $\boldsymbol{u} = (u_x, u_y, u_z)$ なる速度で動いている物体を系 F' でみたときの速度 $\boldsymbol{u}' = (u'_x, u'_y, u'_z)$ は $\boldsymbol{u} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t}$ および $\boldsymbol{u}' = \lim_{\Delta t' \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{r}'}{\Delta t'}$ より

$$\frac{\Delta x'}{\Delta t'} = \frac{\Delta x/\Delta t - \beta c}{1 - \beta \Delta x/c\Delta t} \tag{13}$$

よって

$$\begin{aligned} u'_x &= \frac{u_x - v}{1 - \frac{u_x v}{c^2}} \\ u'_y &= \frac{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}\,u_y}{1 - \frac{u_x v}{c^2}} \\ u'_z &= \frac{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}\,u_z}{1 - \frac{u_x v}{c^2}} \end{aligned} \tag{14}$$

を得る。これが速度の合成則である。
逆に解いて

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{u'_x + v}{1 + \frac{u'_x v}{c^2}} \\ u_y &= \frac{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}\,u'_y}{1 + \frac{u'_x v}{c^2}} \\ u_z &= \frac{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}\,u'_z}{1 + \frac{u'_x v}{c^2}} \end{aligned} \tag{15}$$

となり、これは当然期待されるように (14) 式で $\boldsymbol{u}'$ と $\boldsymbol{u}$ を入れ換えてさらに $\boldsymbol{v}$ の符号を変えたものに等しい。

問 4: $v \ll c$ なるとき、(14) 式は、Galilei 変換 $u'_x = u_x - v$、$u'_y = u_y$、$u'_z = u_z$ になることを示せ。

IV. <u>エネルギーと運動量</u>
速度 $\boldsymbol{u}$ で動いているエネルギー E と運動量 $\boldsymbol{p}$ は物体の静止質量 m_0 (物体の速度に関係しない固有の質量であることが確かめられる。(26) 式参照) を用いて以下のように定義される。

$$E = \frac{m_0}{\sqrt{1-(\frac{u}{c})^2}} c^2 \tag{16}$$

$$\boldsymbol{p} = \frac{m_0}{\sqrt{1-(\frac{u}{c})^2}} \boldsymbol{u} \tag{17}$$

$$E = c\sqrt{\boldsymbol{p}^2 + m_0^2 c^2} \tag{18}$$

$$\boldsymbol{u} = \frac{\boldsymbol{p}c^2}{E} \tag{19}$$

が成立している。
問 4: $p \ll m_0 c$ なるとき、$E = m_0 c^2 + \frac{p^2}{2m_0}$ となって Newton 力学の運動エネルギーの表式が再現されることを確かめよ。

変換則 (15) から

$$\frac{1}{\sqrt{1-(\frac{u}{c})^2}} = \frac{\sqrt{(1-(\frac{v}{c})^2)(1-(\frac{u'}{c})^2)}}{1+\frac{u'_x v}{c^2}} = \frac{\sqrt{1-(\frac{u'}{c})^2}}{\gamma(1+\frac{u'_x v}{c^2})} \tag{20}$$

が成立するのでエネルギー運動量に対する系 F から系 F' への Lorentz 変換は

$$\begin{aligned} p'_x &= \gamma p_x - \beta\gamma\frac{E}{c} \\ p'_y &= p_y \qquad (21) \\ p'_z &= p_z \\ E' &= \gamma(E - \beta c p_x) \qquad (22) \end{aligned}$$

となる。逆変換は

$$\begin{aligned} p_x &= \gamma p'_x + \beta\gamma\frac{E'}{c} \\ p_y &= p'_y \qquad (23) \\ p_z &= p'_z \\ E &= \gamma(E' + \beta c p'_x) \qquad (24) \end{aligned}$$

である。
この変換のもとで

$$E'^2 - c^2({p'_x}^2 + {p'_y}^2 + {p'_z}^2) = E^2 - c^2({p_x}^2 + {p_y}^2 + {p_z}^2) = m_0^2 c^4 \tag{25}$$

となり、

$$\sqrt{\frac{E^2}{c^2} - \boldsymbol{p}^2} = m_0 c \tag{26}$$

だから、静止質量が Lorentz 不変量であることも確かめられる。

V. 運動方程式

運動量の時間的変化率が力に等しいというのが Newton の運動方程式であるが、運動量 も時間も Lorentz 不変量ではなく、慣性系により変わってしまうので、力も不変量ではない。
系 F での運動方程式 $\frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = \boldsymbol{f}$ は系 F' では $\frac{d\boldsymbol{p}'}{dt'} = \boldsymbol{f}'$ となる。
今、系 F の原点に静止質量 m_0 の粒子が静止しているとしよう。力 $\boldsymbol{f}$ が短時間 Δt 働くものとする。
Δt は短いから、この間力を一定とみなしてよい。よって粒子の運動量は Δt 後には $\Delta\boldsymbol{p} = \boldsymbol{f}\Delta t$ になっている。このとき、エネルギーの変化は $O(\Delta t^2)$ 微小量であり、粒子の変位も $O(\Delta t^2)$ のの微小量であることが次の考察で分かる。
エネルギーの変化 ΔE について考える。Δp は微小量だから $\Delta p \ll m_0 c$ であり、問 4 より、

$$\Delta E = c\sqrt{(\Delta p)^2 + m_0^2 c^2} - m_0 c^2 \approx \frac{(\Delta p)^2}{2m_0} = \frac{f^2(\Delta t)^2}{2m_0} \tag{27}$$

となるのでエネルギーの変化は $O((\Delta t))^2)$ の微小量であることが分かった。
変位 $\Delta\boldsymbol{r}$ について考えよう。系 F での粒子の速度を $\boldsymbol{u}$ と表すと (17) 式より $t \in [0, \Delta t]$ なる時間に対して $\boldsymbol{u} = \frac{\boldsymbol{f}}{m_0}t$ とおいてよいので

$$\Delta\boldsymbol{r} = \int_0^{\Delta t} \boldsymbol{u}(t)dt \approx \frac{\boldsymbol{f}}{2m_0}(\Delta t)^2 \tag{28}$$

が得られ、変位も $O((\Delta t))^2)$ の微小量であることが分かる。
極めて短い時間間隔では系 F で粒子の得る速度は小さいので Newton の力学の関係式が成立していることが分かった。この粒子を系 F' で観測したとき、どう見えるかを Lorentz 変換を用いて論じて力の変換則を得ることにしよう。
(11) 式と (28) 式からここでも $O((\Delta t)^2)$ の項を無視して

$$\Delta t' = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\Delta t - \frac{v}{\sqrt{1-\beta^2}}\frac{\Delta x}{c^2} \approx \gamma\Delta t \tag{29}$$

運動量は系 F' の相対速度と平行な x' 成分に関して

$$\Delta p'_x = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\Delta p_x - \frac{v}{\sqrt{1-\beta^2}}\frac{\Delta E}{c^2} \approx \gamma\Delta p_x \tag{30}$$

が得られ、

$$\frac{dp'_x}{dt'} = \frac{dp_x}{dt} \tag{31}$$

よって

$$f'_x = f_x \tag{32}$$

であることが分かる。直交する成分 y' と z' に関しては (21) 式より

$$\begin{aligned} \Delta p'_y &= \Delta p_y \\ \Delta p'_z &= \Delta p_z \end{aligned} \tag{33}$$

であり

$$\frac{dp'_y}{dt'} = \frac{1}{\gamma}\frac{dp_y}{dt} \tag{34}$$

$$\frac{dp'_z}{dt'} = \frac{1}{\gamma}\frac{dp_z}{dt} \tag{35}$$

よって

$$f'_y = \frac{1}{\gamma}f_y \tag{36}$$

$$f'_z = \frac{1}{\gamma}f_z \tag{37}$$

となる。

力の相対運動と直交する成分について、系 F' での値が粒子の静止系である系 F での値より $\frac{1}{\gamma} = \sqrt{1-\beta^2}$ だけ小さい。

以上まとめて系 F での静止粒子を相対速度 $\boldsymbol{v}$ で動いている慣性系 F' でみたときの力の関係は $\boldsymbol{v}$ と平行な成分を添字 $\parallel$、直交する方向の成分を添字 $\perp$ で表すと

$$\frac{dp'_\parallel}{dt'} = \frac{dp_\parallel}{dt} \tag{38}$$

$$\frac{d\boldsymbol{p}'_\perp}{dt'} = \frac{1}{\gamma}\frac{d\boldsymbol{p}_\perp}{dt} \tag{39}$$

$$f'_\parallel = f_\parallel \tag{40}$$

$$\boldsymbol{f}'_\perp = \frac{1}{\gamma}\boldsymbol{f}_\perp \tag{41}$$

となる。