

## 第9章 Maxwell's Equations And Electromagnetic Waves (マクスウェルの方程式と電磁波)

### 9.1 "Somethig Is Missing" (何かが欠けている)

電荷と場の関係を復習しよう。第2章で勉強したように Coulomb の法則と等しい命題は電荷密度  $\rho$  と電場  $\mathbf{E}$  を結ぶ微分方程式

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (9.1)$$

である。

この関係は静止している電荷にも動いている電荷にも成立する。つまり  $\rho$  は位置と時間の関数である。第5章で強調したように (9.1) 式が動いている電荷に対して成立しているという事実は *Charge Invariance* (電荷の不変性) と矛盾しない:

孤立している一個の荷電粒子がどのように動いていても、それを取り囲む面上での  $\mathbf{E}$  の面積分として電荷は測られるので、どの慣性系からも同じ値として見える。

動いている電荷は電流を作る。電荷は決して作られたり、消されたりしないので、電荷密度  $\rho$  と電流密度  $\mathbf{J}$  はいつでも条件

$$\operatorname{div} \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (9.2)$$

を満たす。

この"連続の方程式"を第4章で書き下した。

電流密度  $\mathbf{J}$  が時間的に一定のとき、これを *stationary current distribution* (定常電流分布) という。定常電流分布の作る磁場は方程式

$$\operatorname{curl} \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} \quad (9.3)$$

を満たす。この関係については第6章で調べた。

ここでは時間的に変化する電荷分布と場について考える。

$\partial \rho / \partial t \neq 0$  なる電荷分布  $\rho(x, y, z, t)$  があるとしよう。例えば抵抗を通じて放電しているコンデンサーの系を考えても良い。

(??) 式より

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} \neq 0$$

は

$$\operatorname{div} \mathbf{J} \neq 0$$

を意味する。

しかし (9.3) 式によると *any* (どんな) vector 関数の  $\operatorname{curl}$  も恒等的にゼロ (Problem 2.16 を見よ) だから

$$\operatorname{div} \mathbf{J} = \mu_0 \operatorname{div} (\operatorname{curl} \mathbf{B}) = 0 \quad (9.4)$$

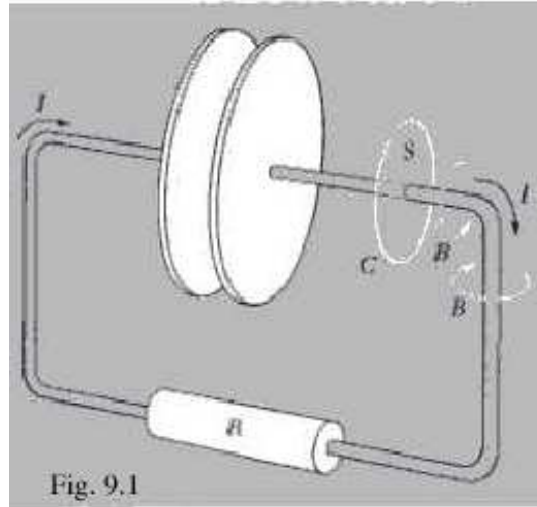
となるはずである。

この矛盾は時間的に電荷密度が変化している系では (9.3) 式が *cannot be correct*(正しいはずがない) ことを示している。

もちろん誰も次のようなことは要求しなかった;

定常電流分布の系については (9.3) 式が成立 *does*(している) ので電流密度  $\mathbf{J}$  は定常的であるが、にもかかわらず電荷密度  $\rho$  は時間変化する系である。

この問題を FIGURE 9.1 のコンデンサーの極板から放電させている導線のまわりの磁束密度の線積分を考えることにより、少々違った言葉で述べることができる。



Stokes の定理により

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \text{curl } \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} \quad (9.5)$$

である。

表面  $S$  は電流  $I$  が流れている導線を横切る。この導線の内部では  $\text{curl } \mathbf{B}$  は  $\mu_0 \mathbf{J}$  なる値をもち、右辺の積分は  $\mu_0 I$  に等しくなる。曲線  $C$  が導線に近く、コンデンサーの極板から離れていれば、そこでの磁束密度は同じ値の電流が流れている任意の導線のまわりの磁束密度と変わらない。

さて FIGURE 9.2 の表面  $S'$  もやはり  $C$  を縁とする面であり、Stokes の定理 (9.5) 式に同じように使えるはずである。ところが、この表面  $S'$  を貫き通る *no current at all*(電流は全くない)。にもかかわらず Stokes の定理が成り立つので  $S'$  上で  $\text{curl } \mathbf{B}$  はゼロにはなれない。故に  $S'$  上では  $\text{curl } \mathbf{B}$  は電流密度  $\mathbf{J}$  以外の何かに等しくならなければならない。

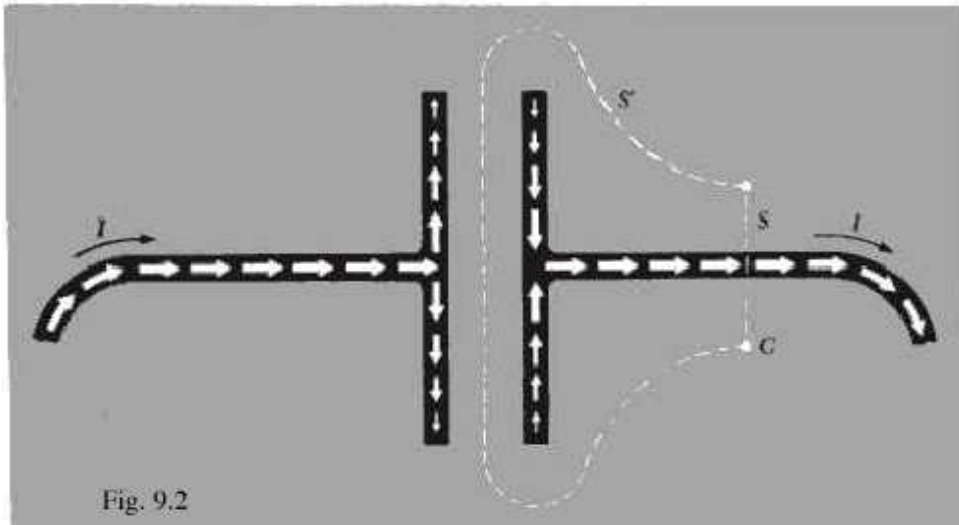


Fig. 9.2

時間的に変化する電荷分布という、より一般的な状況では (9.3) 式が他の関係式によって置き換えられなければならないということしか言えない。そこで

$$\text{curl } \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + (?) \quad (9.6)$$

と書いて、(?) が何であるか分かるか考えてみよう。

視点を変えると答えが分かる。第 6 章の電磁場の変換性が  $\mathbf{E}/c$  と  $\mathbf{B}$  について対称的であったことを思い出そう。

Faraday の電磁誘導の現象では、changing Magnetic Field (変化する磁束密度) には Electric Field (電場) が伴って現われ、第 7 章 5 節での関係式で記述される:

$$\text{curl } \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (9.7)$$

これは真空における電磁場の関係式で、電荷を含んでいない。

もし  $\mathbf{E}/c$  と  $\mathbf{B}$  の対称性が保たれるならば changing Electric Field (変化する電場) は Magnetic Field (磁場) をひきおこすと期待できよう。

(9.7) 式で  $\mathbf{E}/c$  と  $\mathbf{B}$  を交換して得られるような誘導現象が期待される。符号も変える必要があることがわかるが、ともかく次のようになる:

$$\text{curl } \mathbf{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (9.8)$$

これにより (9.6) で足りなかった必要な項があたえられる。試みに

$$\text{curl } \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (9.9)$$

と書いて、両辺の発散を取ろう:

$$\operatorname{div}(\operatorname{curl} \mathbf{B}) = \operatorname{div}(\mu_0 \mathbf{J}) + \operatorname{div}\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\right) \quad (9.10)$$

既に述べたように左辺はゼロにならなければいけない。

右辺第2項で空間と時間の微分の順序を入れ換えると(9.1)式より

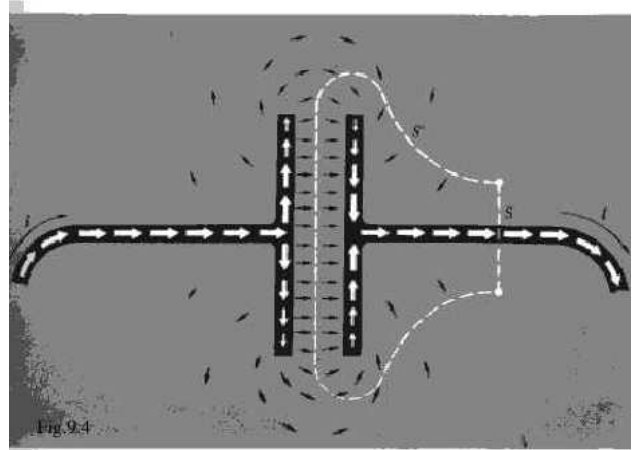
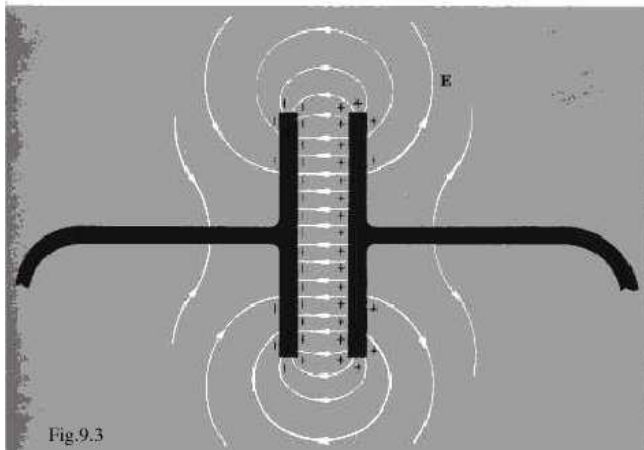
$$\operatorname{div}\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\right) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t}(\operatorname{div} \mathbf{E}) = \frac{1}{c^2} \frac{1}{\epsilon_0} \frac{\partial \rho}{\partial t} = \mu_0 \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (9.11)$$

となる。

よって(9.10)式の右辺は

$$\mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (9.12)$$

となるので、(9.2)式の連続の方程式よりゼロとなる。



この新しい項で FIGURE 9.2 での困難が解決される。コンデンサーから電荷が流れ出ると FIGURE 9.3 にある瞬間の様子が描かれた電場はその大きさが *diminishes*(減)じる。このとき  $\partial \mathbf{E} / \partial t$  は  $\mathbf{E}$  とは反対に向く。

$\partial \mathbf{E} / c^2 \partial t$  なる Vector 関数は FIGURE 9.4 の黒い矢印で表されている。

$$\operatorname{curl} \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

を使うと  $S'$  上の  $\operatorname{curl} \mathbf{B}$  の積分は  $S$  上の  $\operatorname{curl} \mathbf{B}$  の積分と同じ値になる。

$S'$  上では第2項の寄与が全てである;  $S$  上では第1項つまり  $\mathbf{J}$  の項が全てをあたえる。

## 9.2 The Displacement Current (変位電流)

$\partial \mathbf{E}/c^2 \partial t$ が伝導電流分布を *continuation*(補っている) ことをみよう。Maxwellはこれを *Displacement Current*(変位電流) と名づけ、妥当であるとは思われないけれどもこの名前は定着して来た。

正確を期するため、*Displacement Current Density*(変位電流密度) $\mathbf{J}_d$ を定義して、伝導電流密度 $\mathbf{J}$ と区別する。そして次のように書こう：

$$\text{curl } \mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{J} + \mathbf{J}_d) \quad (9.13)$$

ここで

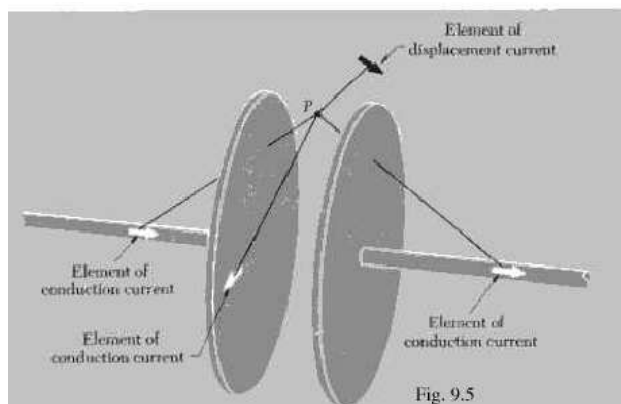
$$\mathbf{J}_d \equiv \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

と定義する。

伝導電流が時間的に変化する場合、電流と磁束密度の関係が連続の方程式と両立するためにはこの新しい項が必要であった。この項が関係式に現われるなら、変動する電場が磁場に伴うという新しい誘導現象の出来を意味する。本当にこの効果が生ずるのなら、何故 Faraday がこれを発見しなかったのだろうか。Faraday は確かにこんな効果を探さなかった。しかし Faraday の実験ではこの新しい項に帰着する効果を明らかにできない基本的な原因がある。

変動する電場をもつどんな装置でも、その中には同時に運動している電荷、つまり伝導電流が存在する。装置の近辺での磁束密度 $\mathbf{B}$ はどこでもこの種の伝導電流が作るはずのものになっている。事実、回路が連続ではない点を無視して、Biot-Savart の公式を使うと空間内の磁束密度への各伝導電流要素の寄与を計算できる。

例えば FIGURE 9.5 の放電中のコンデンサーの極板間の点 P を考えよう。



導線や極板平面上の伝導電流の各要素は Biot-Savart の公式によって P の  $\mathbf{B}$  に寄与する。

変位電流密度  $\mathbf{J}_d$  もここで含めるべきだろうか。この質問に対する答えには少々驚かされよう。 $\mathbf{J}_d$  をふくめても *may*(良い); もしあらゆる変位電流の分布を含めても比較的ゆっくり変化している場では正味の効果はゼロとなる。

この理由を理解するために FIGURE 9.4 の黒い矢印で示した Vector 関数  $\mathbf{J}_d$  が FIGURE 9.3 の電場  $\mathbf{E}$  と同じ形になっていることに注意しよう。この電場はゆっくり減少していることを除くと、実際上は静電場的である。よって curl は実際上はゼロでなければならないことが期待される。もっと詳しく述べると

$$\text{curl } \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

であって、変位電流密度は

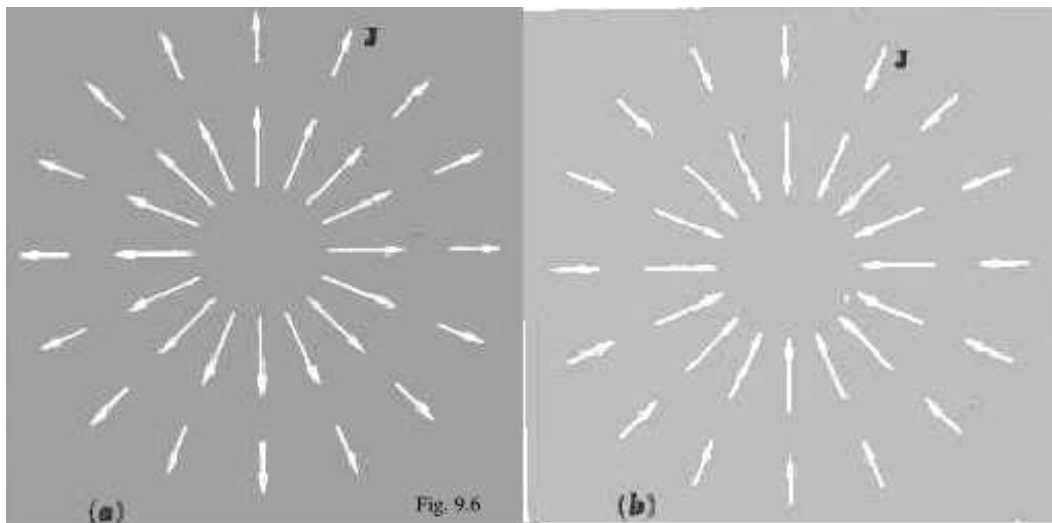
$$\mathbf{J}_d = \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

だから、微分の順序を入れ換えると

$$\text{curl } \mathbf{J}_d = \epsilon_0 \text{curl } \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\text{curl } \mathbf{E}) = -\epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} \quad (9.14)$$

を得る。場がゆっくり変化するとき、この2階微分は無視できる。ゆっくり変化する場を *quasi-static*(準定常) 場という。

$\mathbf{J}_d$  が curl なしの vector 場であれば、静電場が点から放射状に流れ出る、あるいは吸い込み口”sink” に向かう放射状の流れを重ね合わせることでより得られる点電荷の場と同じように  $\mathbf{J}_d$  は作られる (FIGURE 9.6)。



しかし、任意の *radial*(放射状) 対称分布の電流による磁束密度を計算してもゼロになってしまう。というのも、動径方向を除くと、どこにも特別な方向がないからである。

したがって、準定常的な場では磁束密度を求めるのに必要な *sources*(源) は伝導電流だけである。言いかえると、もし Faraday が FIGURE 9.5 のように工夫をして、方位磁針を使って P での磁束密度を測ることができたとしても、別に驚はしなかつただろう。

この新しい誘導現象を見るには急速に変動する場が必要である。だから Hertz を待って初めて直接これを示すことができたのであり、彼による実験は Maxwell がこの法則を見出してからずっと後になって行われたのである。

### 9.3 Maxwell's Equations (マクスウェルの方程式)

James Clark Maxwell (1831-1879) は Faraday の電気研究の説明に没頭し、電気と磁気の理論を数学的に定式化した。Maxwell は相対論を開発することはなかった。相対論は 50 年後に出現したのである。物質の電氣的構成は当時は未知であったし、光と電磁気の関係など想像もできなかった。我々がこのテキストで進んできた議論の多くはその当時考えも及ばないことであった。しかしながら、Maxwell の理論が発展するとき、これまで論じてきた  $\partial \mathbf{E} / \partial t$  なる項は彼の形式では全く自然に現われたのであった。これを彼は変位電流と呼んだ。Maxwell は真空だけでなく固い物質中の電場にも関心があり、変位電流について述べるとき、しばしば運動電荷も含めている。この点は 10 章で物質の電場を勉強するときはっきりさせよう<sup>1</sup>。Maxwell は空間自体を "Aether" (エーテル) という媒質と考えていたので固体がなくても変位電流が何かの *in*(中) で生じていると考えていた。しかしそんなことは今やどうでもよい。彼の数学的表式は完全に明らかで曖昧さの無いものであったし、彼の変位電流の導入は第一級の *technical*(専門的) な発見であった。

Maxwell の電磁場の記述は本質的に完全である。我々は、夫々一つずつ異なる道筋を通過して到達したが、これを *Maxwell's Equations*(Maxwell の方程式) と呼ばれる形でまとめよう:

$$\begin{aligned}\operatorname{curl} \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \operatorname{curl} \mathbf{B} &= \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mu_0 \mathbf{J} \\ \operatorname{div} \mathbf{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0\end{aligned}\tag{9.15}$$

ここで  $\mu_0 \epsilon_0 = 1/c^2$  である。

(9.15) 式は電荷密度  $\rho$  と電流 (則ち運動している電荷による) 密度  $\mathbf{J}$  が存在している真空中の場で書かれている。

1 番目の式は Faraday の *Law of Induction*(電磁誘導) である。2 番目の式は磁束密度がどのように *Displacement Current*(変位電流密度)、つまり電場の時間変化率と、*Conduction Current*(伝導電流密度)、つまり電荷の運動量に依存するかを表している。3 番目の式は Coulomb の法則と等しい。4 番目の式は磁束密度には電流 *except*(以外) の sources は無いことを述べている。第 11 章でこの問題にもっと振れる。

<sup>1</sup>YC 注:

10 章と 11 章は講義する残念ながら余裕がない。



$\mathbf{E}$  と  $\mathbf{B}$  に関する対称性がこれらの式では電荷および伝導電流の存在のため全く見られないことに注意しよう。空の空間では  $\rho$  と  $\mathbf{j}$  の項はゼロであり、Maxwell の方程式は

$$\begin{aligned} \text{curl } \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} & \text{div } \mathbf{E} &= 0 \\ \text{curl } \mathbf{B} &= \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} & \text{div } \mathbf{B} &= 0 \end{aligned} \tag{9.16}$$

ここでは変位電流の項が重要で全てである。この変位電流と第1式の対応する項をひっくるめると *Electromagnetic Waves* (電磁波) の可能性が生ずる。これを認識した Maxwell は光の電磁論を展開し、大成功を治めたのである。

## 9.4 An Electromagnetic Wave (電磁波)

何もない空の空間に対する Maxwell の方程式を満たす非常に簡単な電磁場の解を作ろう。

いたるところ  $z$  軸に平行で、大きさが  $y$  座標と時間  $t$  だけに依存する電場  $\mathbf{E}$  を考えよう。 $E_0$  と  $v$  を単なる定数として次のような特別な形であるとしよう:

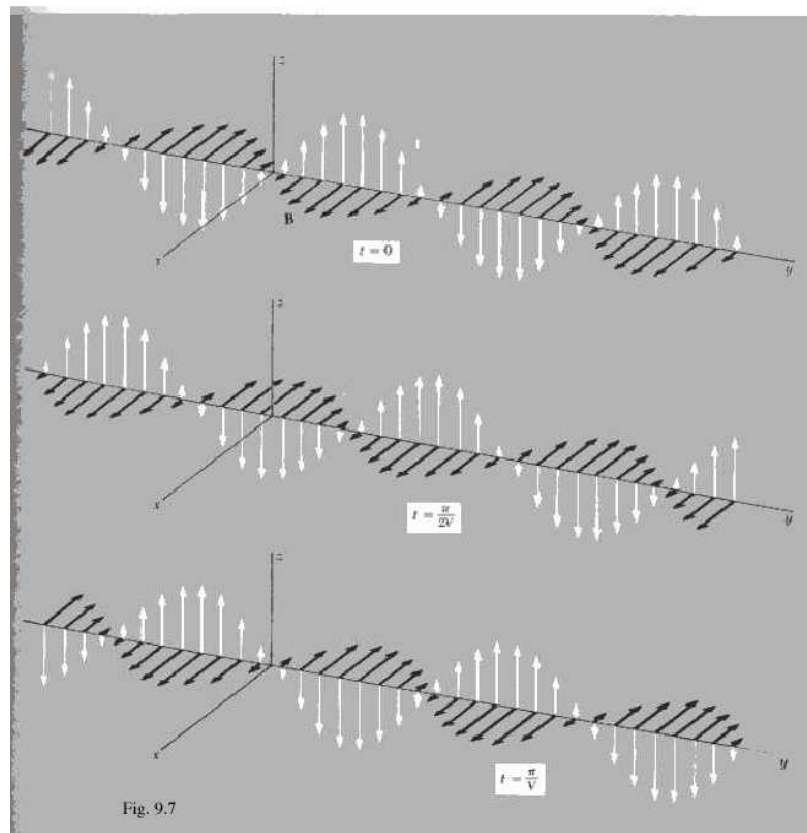
$$\mathbf{E} = \hat{z}E_0 \sin(y - vt) \quad (9.17)$$

この場が全空間に存在するとする。あるいは考えている空間にみちているとする。磁束密度も必要になるが、この磁束密度は  $x$  成分のみをもち  $E_z$  と同様の  $y$  と  $t$  の依存性を有しているとしよう:

$$\mathbf{B} = \hat{x}B_0 \sin(y - vt) \quad (9.18)$$

ここで  $B_0$  はある定数である。

FIGURE 9.7 でこれらの場を図示してみた。



全空間を満たす2つのこういう場をグラフで描くのは難しい。 $x$  や  $z$  に関しては何も変

化しないことに注意しよう;  $y$  軸上の一点でおこることはその点を通る直交面上の全ていたるところでおこっている。(9.17)式および(9.18)式で正弦関数の変数は特別な形をしているため、時間が進むと場の全パターンは右に移動して行く。  
 なぜなら  $\Delta y = v\Delta t$  であれば  $y - vt$  という引数は  $y$  および  $t$  での値と同じ値を  $y + \Delta y$  および  $t + \Delta t$  で取るからである。言いかえると  $\hat{y}$  方向に一定の速さ  $v$  で進む平面波を記述しているのである。

この電磁場はある条件を満たせば Maxwell の方程式を満足することを示そう。  
 $\text{div } \mathbf{E}$  と  $\text{div } \mathbf{B}$  は共に 0 となることがすぐわかる。  
 その他の偏微分は

$$\begin{aligned} \text{curl } \mathbf{E} &= \hat{x} \frac{\partial E_z}{\partial y} &= \hat{x} E_0 \cos(y - vt) \\ \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} &= -v \hat{z} E_0 \cos(y - vt) \\ \text{curl } \mathbf{B} &= -\hat{z} \frac{\partial B_x}{\partial y} &= -\hat{z} B_0 \cos(y - vt) \\ \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= -v \hat{x} B_0 \cos(y - vt) \end{aligned} \tag{9.19}$$

となる。  
 (9.16) 式の 2 つの”誘導”方程式に代入し、共通因子  $\cos(y - vt)$  を消去すると、満足すべき条件が

$$E_0 = v B_0 \quad \text{と} \quad B_0 \mu_0 \epsilon_0 E_0 \tag{9.20}$$

となり、これより

$$v = \pm \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = \pm c \quad \text{と} \quad B_0 = \frac{E_0}{v} \tag{9.21}$$

を得る。

この電磁波は次の諸性質をもつことがわかる:

1. *The field pattern travels with speed  $c = 1/\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$  (場の波形は速さ  $c = 1/\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$  で進む).*  $v = -1/\sqrt{\mu_0 \epsilon_0} = -c$  の場合は反対方向、つまり  $-\hat{y}$  方向に進む。Maxwell が 1862 年に初めて (もっとぼんやりとした道筋で) この結果を得たとき、彼の方程式の  $c$  なる定数はコンデンサー、コイル、抵抗を使った実験で決められる電気諸量間の関係式としか表していなかった。この定数の次元が速度の次元であることは分かっているが、光速度との関係はまだ認識されていなかった。当時最新の光速度の測定は 1857 年の Fizeau によるものであった。

Maxwell は”N.M.Kohlrausch と Weber の電気-磁気実験から求めた仮想的媒質中の横波の速さは M.Fizeau の光学的実験から計算される光速度とぴったり一致している。よって *light consists in the transverse undulations of the same medium which is the cause of electric and magnetic phenomena* (光は電気磁気現象の原因である媒質と同じ物の横波運動であ

る)との推察はさげられない。”と書いている。イタリックは Maxwell 自身のつけたものである。

2. *At every point in the wave at any instant of time, the electric and magnetic field strengths are equal.*(任意の時刻の波動の各点で電場と光速度と磁束密度の積は等しい)

3. *The Electric Field and the magnetic field are perpendicular to one another and to the direction of travel, or propagation.*(電場と磁場波互いに直交し、かつ進行方向とも直交している)このことをここでの例を作るとき仮定してしまっていた。しかし、進行方向と直交する向きの座標には場が依存しないとしてしまうと、この条件が必要条件となることを示すのは難しくない。もし  $v = -c$  かつ進行方向が  $-\hat{y}$  であるとき、 $B_0 = -E_0/c$  でなければならない。これは  $\mathbf{E}$  の方向、 $\mathbf{B}$  の方向、そして波動の伝搬方向が右手系の3つの方向をなすことを示している。これを特別な座標系を設定しないで次のように述べることができる:

波はいつでも vector  $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$  の方向に伝わる。

どんな平面電磁波も空の空間<sup>2</sup>ではこの3つの性質を有している。

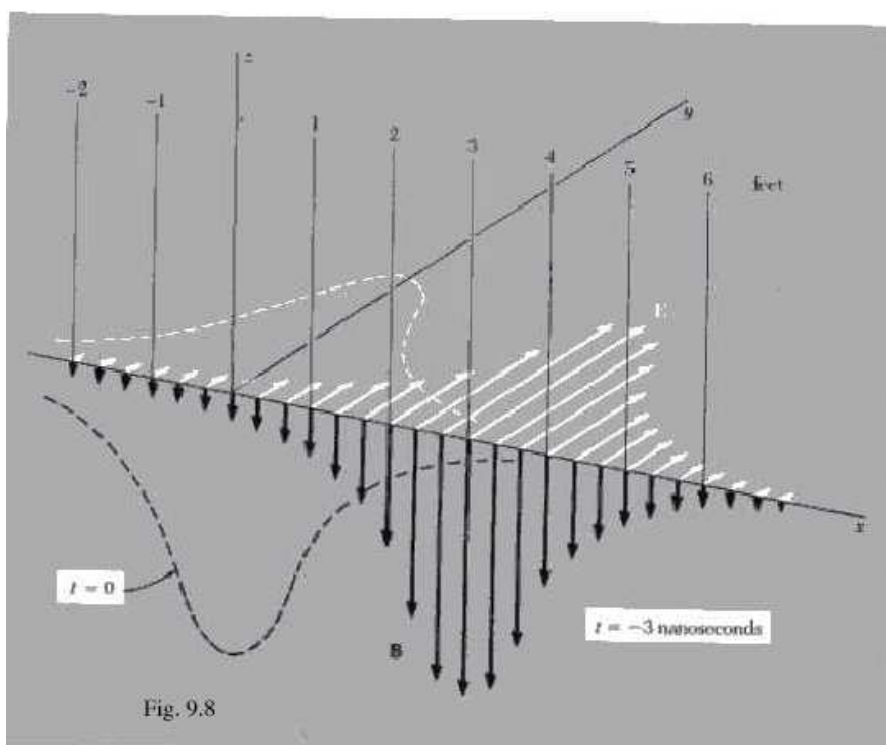
---

<sup>2</sup>YC 記: これを自由空間ともいう。

## 9.5 Other Waveforms; Superposition Of Waves (他の波形; 波の重ね合わせ)

前節の例の  $\sin(y - vt)$  は単に簡単であるという理由により採用した波である。三角関数の”波動性”は波動の本質とは *nothing to do with* (何のかかわりも持たない)。波動の本質とは波形が *any* (どんな) 形であっても変わらずに伝搬するということである。これは関数形の性質ではなく、波形の伝搬の引数の中に  $y$  と  $t$  がどういった組み合わせで入っているかで決まることである。sin 関数を他の *any* (勝手な) 関数  $f(y - vt)$  で置き換えても  $\hat{y}$  方向に速さ  $v$  で進む波形を得る。その上さらに (??) 式があてはまり、この波も前節で掲げた3つの一般的性質を持っている。

FIGURE 9.8 に描かれた別の平面波の電磁波の例をあげよう。



数式で書くと

$$\begin{aligned}
 E &= \frac{5c\hat{y}}{1+k^2(x+ct)^2} \times 10^{-4} \text{ [V/m]} \\
 B &= \frac{-5\hat{z}}{1+k^2(x+ct)^2} \times 10^{-4} \text{ [T]}
 \end{aligned}
 \tag{9.22}$$

であり、FIGURE 9.8は  $k = 1$  feet で描かれている。これは Maxwell の方程式 (9.16) を満たす。  $y$  や  $z$  に依存しないので *plane* (平面) 波である。引数が  $x + vt$  の + 符号からすぐ分

かるようにこの波は  $-\hat{x}$  方向に伝わる。この方向は確かに  $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$  の方向になっている。この波動は何も振動したり符号が交代したりしない; 単に長く尾を引いた電磁パルスである。

時刻  $t = 0$  での最大強度は  $E = 5 \text{ V/m}$  で  $B = 5 \text{ T}$  であると、原点あるいは  $yz$  平面内の任意の点での観測者は記録する。FIGURE 9.8 では  $t = 3 \text{ ns}$  での場も描いた。距離は feet で記されている (光速は  $1 \text{ foot/ns}$  に近い)。

自由空間での  $\mathbf{E}$  と  $\mathbf{B}$  に対する Maxwell の方程式は線形である。2つの解の重ね合わせもまた解である。任意の数の電磁波が互いに影響せずと同じ領域を進行することができる。ある時空点での  $\mathbf{E}$  は個々の波の電場のベクトル和であり、 $\mathbf{B}$  についても同じことが言える。

重要な例として反対方向に進む2つの相似な平面波を挙げることができる。 $\hat{y}$  方向に進む波が

$$\mathbf{E}_1 = \hat{z} E_0 \sin \frac{2\pi}{\lambda} (y - ct) \quad \mathbf{B}_1 = \hat{x} \frac{E_0}{c} \sin \frac{2\pi}{\lambda} (y - ct) \quad (9.23)$$

と表されるとしよう。

この波は少しだけ前節の例と違っている。周期関数に波長  $\lambda$  を導入した。そして磁束密度の振幅を電場の振幅で書き表した。

さて別の波を考えよう:

$$\mathbf{E}_2 = \hat{z} E_0 \sin \frac{2\pi}{\lambda} (y + ct) \quad \mathbf{B}_2 = -\hat{x} \frac{E_0}{c} \sin \frac{2\pi}{\lambda} (y + ct) \quad (9.24)$$

これは振幅と波長が同じ波であるが  $-\hat{y}$  方向に進む波である。

この2つの波があっても Maxwell の方程式は電磁場が

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 = \hat{z} E_0 \left[ \sin\left(\frac{2\pi y}{\lambda} - \frac{2\pi ct}{\lambda}\right) + \sin\left(\frac{2\pi y}{\lambda} + \frac{2\pi ct}{\lambda}\right) \right] \\ \mathbf{B} &= \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2 = \frac{\hat{x}}{c} E_0 \left[ \sin\left(\frac{2\pi y}{\lambda} - \frac{2\pi ct}{\lambda}\right) - \sin\left(\frac{2\pi y}{\lambda} + \frac{2\pi ct}{\lambda}\right) \right] \end{aligned} \quad (9.25)$$

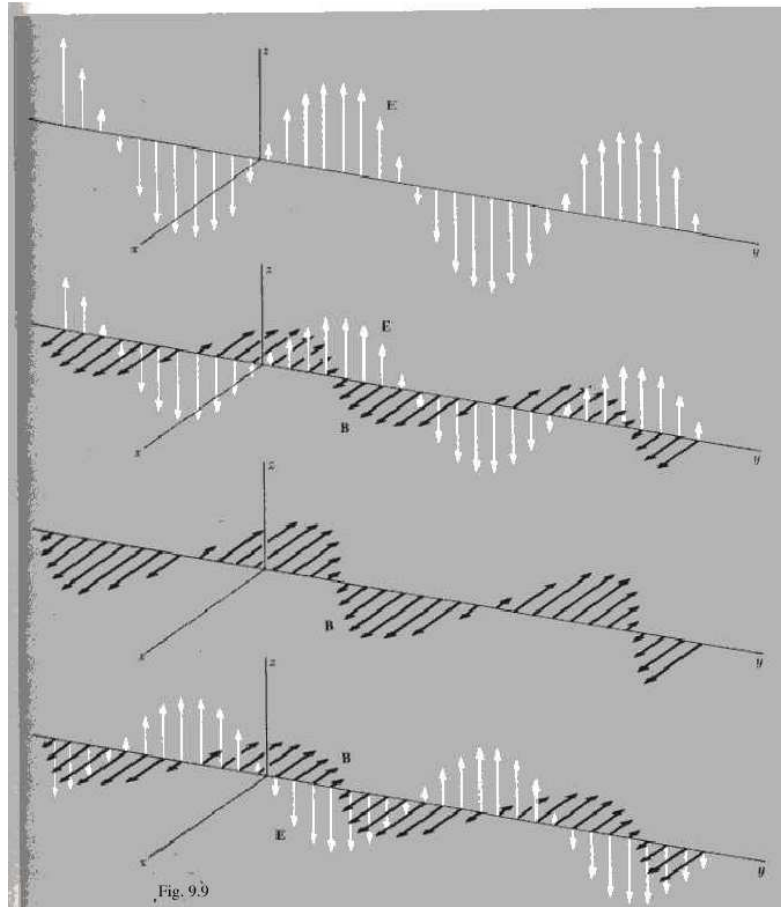
となる解をもっている。

2つの角の正弦の合成公式より、(9.25) 式はすぐ

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= 2\hat{z} E_0 \sin \frac{2\pi y}{\lambda} \cos \frac{2\pi ct}{\lambda} \\ \mathbf{B} &= -2\hat{x} \frac{E_0}{c} \cos \frac{2\pi y}{\lambda} \sin \frac{2\pi ct}{\lambda} \end{aligned} \quad (9.26)$$

と変形できる。

(9.26) 式で記述される場は *standing wave* (定常波、定在波) とよばれる。FIGURE 9.9 は異なる時間でどう見えるかを示している。



$c/\lambda$ なる因子は任意の点で場が振動する *Frequency*(振動数)である。そして  $2\pi c/\lambda$ は対応する角振動数である。(9.26)式によると  $2ct/\lambda$ が整数になるとき(これは半周期毎におこる)はいつでも磁束密度  $B$ が *everywhere*(いたるところ)消えてしまう。また  $2ct/\lambda$ が整数  $+1/2$ のときいつでも  $\cos 2\pi ct/\lambda = 0$ で電場がどこでもゼロになる。

$B$ の最大値と  $E$ の最大値は色々な時刻、場所で生ずる。伝搬する波動とは対照的に、定常波は空間および時間の双方で足並のそろわない電場と磁場を持っている。

$y = 0$ 面上および  $y$ が半波長の整数倍に等しい平面上では *at all times*(いつでも)  $E = 0$ であることに注意せよ。

$y = 0$ なる  $xz$ 平面を完全に完全導体金属で覆ったとしよう。完全導体の表面では面に平行な電場の成分はゼロである(もしそうでなければ無限の電流が流れてしまう)。このことは周囲の空間のいかなる電場にも強い *Boundary Condition*(境界条件)を課することになる。ここで今考えている(9.26)式で記述される定常波は  $y > 0$ なる空間全てで Maxwell の方程式を満たし、この境界条件も *already satisfies*(既に満たして)いる。故にこの定常波は平面電磁波が平面の導体鏡から法線方向に反射される問題の解をあたえていることになる(FIGURE 9.10を見よ)。

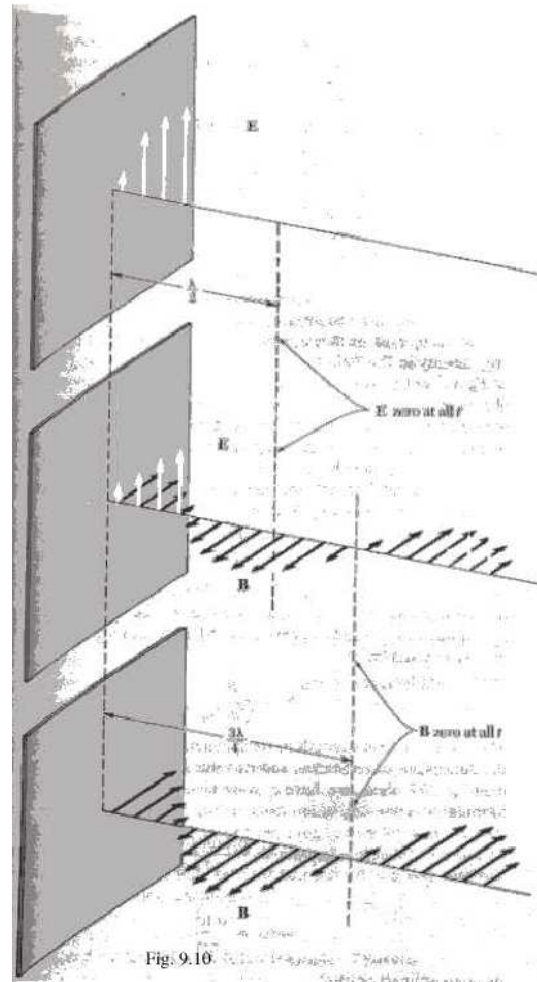


Fig. 9.10

このときの入射波は  $y > 0$  に対しての (9.24) 式であたえられ、反射波は (9.23) 式であたえられている。金属の裏側では場は全然ないか、あるいはあったとしても表側の場とは無関係である。鏡のすぐ前面では面に平行な磁束密度が (9.26) 式であたえられている:

$$\mathbf{B} = -2\hat{x} \frac{E_0}{c} \sin \frac{2\pi ct}{\lambda}$$

$\mathbf{B}$  がこの前面での値から裏側のゼロなる値にとぶということは鏡面に電流が流れていることを意味している。

諸君は (??) 式であたえられる  $\mathbf{E}$  がゼロとなっている別の面にも導体板を設ければ2つの導体鏡面間に電磁定在波を閉じ込めることができる。この種の装置は LASERS を含めて色々応用されている。

実際、単純な平面電磁波の性質を理解すると、干渉計、矩形導波管、strip lines 等の種々の電磁デバイスを解析することができる。



## 9.6 Energy Transfer By Electromagnetic Waves (電磁波によるエネルギー伝播)

地球が太陽から受けるエネルギーは(??)式を満たす電磁波の形で空間を伝わってくる。この波動が伝播するとき、エネルギーはどこに *is*(あり)、到着したときどのように物質に貯えられるか。

帯電コンデンサーの極板間の場合のような静電場の場合は各微小体積要素  $dv$  に  $\epsilon_0 E^2 dv/2$  だけのエネルギーを持たせて、これを全空間にわたって足しあげれば系の全エネルギーが求められた。第1章を参照せよ。

同様に磁場を作るさいに系に貯えられるエネルギーは各微小体積要素  $dv$  が  $B^2 dv/2\mu_0$  だけのエネルギーを持っているとして求められる。第7章を参照せよ。

場の中にエネルギーが現実として存在するというアイディアは日光を考えるとときもっともらしくなる。日光は電荷も電流もない真空を通して伝わり、物体を熱するのである。

このアイディアを用いて電磁波がエネルギーを搬送する割合について計算することができる。

形は問わない(定常波ではない)進行している平面波をある時刻で考えよう。

この時刻における各微小体積要素  $dv$  での電場を  $\mathbf{E}$ 、磁束密度を  $\mathbf{B}$  とすると、微小体積内にはエネルギー

$$\frac{1}{2}(\epsilon_0 E^2 + \frac{B^2}{2\mu_0})dv$$

があたえられている。

このエネルギーが波の伝播方向に速さ  $c$  で伝わっているとしよう。こうして伝播方向と直交する単位面積を通過する単位時間あたりのエネルギー量を求めることができる。

これを(9.17)式と(9.18)式の三角関数波動に応用しよう。

$t = 0$  なる時刻で

$$E^2 = E_0^2 \sin^2 y$$

である。

また

$$B^2 = \frac{E_0^2}{c^2} \sin^2 y$$

であることが  $B_0 = E_0/c$  からわかる。

この電磁場のエネルギー密度はよって

$$\frac{1}{2}(\epsilon_0 E_0^2 \sin^2 y + \frac{1}{\mu_0} \frac{E_0^2}{c^2} \sin^2 y) = \frac{\epsilon_0}{2}(E_0^2 \sin^2 y + E_0^2 \sin^2 y) = \epsilon_0 E_0^2 \sin^2 y$$

である。

全波長にわたって  $\sin^2 y$  を平均すると平均値は  $1/2$  である。よってこの場の平均エネルギー

ギー密度は

$$\frac{\epsilon_0 E_0^2}{2}$$

であって

$$\frac{\epsilon_0 E_0^2}{2} c$$

が  $y$  方向に垂直な単位面積をもつ "Window" (窓) を通り抜けるエネルギーの時間的割合である。

三角関数波であろうとなかろうともっと一般的な任意の連続的な繰返しの続く波動についても、*Power Density* (パワー密度) と呼ばれる単位面積あたりのエネルギーの流れ  $S$  は

$$S = \epsilon_0 \overline{E^2} c = \frac{\overline{E^2}}{\sqrt{\mu_0/\epsilon_0}} \quad (9.28)$$

であたえられる。

ここで  $\overline{E^2}$  は平均 2 乗電場強度であって、振幅  $E_0$  の正弦波動のときは  $E_0^2/2$  に等しい。単位は  $E$  が [V/m]、 $c$  が [m/s] だから  $S$  は [J/ m<sup>2</sup>· s] つまり [W/m<sup>2</sup>] である。

定数  $\sqrt{\mu_0/\epsilon_0}$  は抵抗の次元をもち、値は 376.73Ω である。丸めると 377Ω になり、便利で覚えやすい公式を書くことができる:

$$S \text{ (W/m}^2\text{)} = \frac{\overline{E^2} \text{ (V/m)}^2}{377 \Omega} \quad (9.29)$$

ここで  $W = V^2/\Omega$  である。

電磁波が導体にあたると、電場が電流を生み出す。この結果、波のエネルギーは一般には導体内で消費される。

FIGURE 9.10 で入射波は全反射を引き起こしたが、反射面の伝導率が無限大となる完全導体という特別の場合であった。もしこの反射体の抵抗率がゼロでなければ、反射波の振幅は入射波の振幅より小さくなる。

例えばアルミニウムでは、可視光が法線方向に入射したとき約 92% の効率で光を反射する。つまり入射エネルギーの 92% が反射され、反射波の振幅は入射波の振幅の  $\sqrt{0.92}$  倍、つまり 0.96 倍になる。

入射エネルギーの 8% の損失分はアルミニウム内の熱になってしまうのであって、波動の電場によって流れ出す電流がオーム抵抗により妨げられるのである。

もちろん振動数約  $5 \times 10^{14}$  Hz の光波のアルミニウムの抵抗率が問題になる。この値は直流、あるいは低振動数の場合のアルミニウムの抵抗値からはいくらか違っている。しかし多くの金属の場合、可視光に対する抵抗率は本質的に定常電流のときに金属を良導体に行っている非常に動きやすい伝導電子に起因するものである。一般に良導体が耀いているのは偶然ではない。しかしながら、なぜきれいな銅が赤っぽくアルミニウムが "silver" (銀色) に見えるかということは詳細な各金属の電子構造の理論がなければ説明できない。

電磁波が不良導体にあたったときもエネルギーは吸収される。ゴムは低周波の電場に対しては良い絶縁体である。ゴムタイヤに光をあててもほとんど反射しない。このとき、

電磁エネルギーの消費問題は物質中の分子内の電子に高周波の電場が作用する問題であることを意味する。広い意味で、このことは眼の網膜を含む我々の周りの全ての物質中の光吸収の問題にあてはまる。

いくつかの絶縁体では電磁波はほとんど吸収されずに通ってしまう。良く知っているがガラスの可視光に対する透明度は実に素晴らしい性質である。オーディオやビデオ信号の光学伝達に使われる純粋なガラスファイバー中ではエネルギーが損失されるまでに1kmつまり $10^9$ 波長以上も光波は伝播するのである。どんなに物質が透明であっても、物質中の電磁波の伝播と真空中の伝播とは本質的に異なる。物質は電磁波と相互作用する。この相互作用を考慮に入れると(9.16)式は次の章で説明するように変更されなければならない。

## 9.7 How A Wave Looks In A Different Frame (異なる系で波はどう見えるか。)

真空中を平面波が伝播しているとしよう。伝播の方向をある慣性系 F で見ると単位ベクトル  $\hat{n}$  であたえられるとする。  $\mathbf{E}_w$  と  $\mathbf{B}$  を F での観測者により F でのある場所と時刻で測られる電場と磁束密度としよう。

この時刻にたまたまこの場所を通る異なる慣性系 F' での観測者はどういう場を見るだろうか。

系 F' が FIGURE 6.25 のように F の  $x$  軸と平行に F の  $\hat{x}$  方向に速さ  $v$  で動いているとしよう。

$\hat{n}$  を  $\hat{x}$  方向であるものを選ぼう。

場の成分の変換則は第 6 章で述べたが、ここでもう一度書いておこう:

$$\begin{aligned} E'_x &= E_x & E'_y &= \gamma(E_y - \frac{\beta}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}}B_z) & E'_z &= \gamma(E_z + \frac{\beta}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}}B_y) \\ B'_x &= B_x & B'_y &= \gamma(B_y + \sqrt{\mu_0\epsilon_0}\beta E_z) & B'_z &= \gamma(B_z - \sqrt{\mu_0\epsilon_0}\beta E_y) \end{aligned} \quad (9.30)$$

次の特別な 2 つのスカラー量の変換性が我々の問題の鍵となる。

$$\mathbf{E} \cdot \frac{\mathbf{B}}{\mu_0}$$

と

$$\epsilon_0 E^2 - \frac{B^2}{\mu_0}$$

を考える。

(9.30) 式を  $\mathbf{E}' \cdot \mathbf{B}' / \mu_0$  に使い、どのように  $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} / \mu_0$  と関係するか見てみよう。

$$\begin{aligned} \mathbf{E}' \cdot \mathbf{B}' &= E'_x B'_x + E'_y B'_y + E'_z B'_z \\ &= E_x B_x + \gamma^2 (E_y B_y + \sqrt{\mu_0\epsilon_0}\beta E_y E_z - \frac{\beta}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}} B_y B_z - \beta^2 E_z B_z) \\ &\quad + \gamma^2 (E_z B_z - \sqrt{\mu_0\epsilon_0}\beta E_y E_z + \frac{\beta}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}} B_y B_z - \beta^2 E_y B_y) \\ &= E_x B_x + \gamma^2 (1 - \beta^2) (E_y B_y + E_z B_z) \\ &= \mathbf{E} \cdot \mathbf{B} \end{aligned} \quad (9.31)$$

スカラー積  $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} / \mu_0$  は場の Lorentz 変換では *not changed* (変化しない); これは不変量である。

同様に計算して (これを Problem 9.13 とする)  $\epsilon_0 (E_x^2 + E_y^2 + E_z^2) - \frac{1}{\mu_0} (B_x^2 + B_y^2 + B_z^2)$  もまた不変であることが示せる。つまり

$$\epsilon_0 E'^2 - \frac{B'^2}{\mu_0} = \epsilon_0 E^2 - \frac{B^2}{\mu_0} \quad (9.32)$$

この2つの量が不変であるということはここで問題にしている電磁波の場合だけでなくどんな電磁場にも一般的に成立する大事な性質である。

波動場に対しては特にこの内容は簡単直截である。平面波は  $\mathbf{B}$  が  $\mathbf{E}$  と直交し、 $B = E/c = \sqrt{\mu_0 \epsilon_0} E$  であることを知っている。よって2つの不変量  $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} / \mu_0$  と  $\epsilon_0 E - \frac{1}{\mu_0} B^2$  共にゼロとなる。不変量がある座標系でゼロなら全ての系でゼロとなる。

波動に *any(どんな)* Lorentz 変換を行っても  $\mathbf{E}/c$  と  $\mathbf{B}$  は直交し大きさが等しいことがわかった。

*A light wave looks like a light wave in any inertial frame of reference.* (光の波はどんな慣性系で見ても同じに見える。)

これは驚くべきことではない。我々はぐるっと一周して Einstein の出発点である相対論の要請に戻っただけのことだけであると言えよう。実際 Einstein の自伝によると、彼は光の波に "catch up" (追いついたと) したら人は何を見るだろうかということをも 10 年も前 (何と 16 才!) に考え始めたそうである。

Einstein の 1905 年の論文であたえられた形である (9.30) 式を使ってこの問題に答えることができる。

$$\begin{aligned} E_y &= E_0 & E_x &= E_z = 0 \\ B_z &= \frac{E_0}{c} & B_x &= B_y = 0 \end{aligned}$$

としよう。

$\mathbf{E} \times \mathbf{B}$  が  $\hat{\mathbf{x}}$  方向を向くので、これは  $\hat{\mathbf{x}}$  方向に進む波動である。(??) 式を使い、 $\gamma^2(1-\beta^2) = 1$  なる恒等式より

$$E'_y = E_0 \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} \quad B'_z = \frac{E_0}{c} \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} \quad (9.33)$$

となることがわかる。

系  $F'$  での観測者にとっては波動の振幅は小さくなっている。波の速さはもちろん系  $F$  と同じく系  $F'$  でも  $c$  である。

電磁波は静止系を持たない。 $\beta = 1$  の極限では  $F'$  で観測される振幅  $E'_y$  と  $B'_z$  はゼロになってしまう。光の波は消えさってしまう!