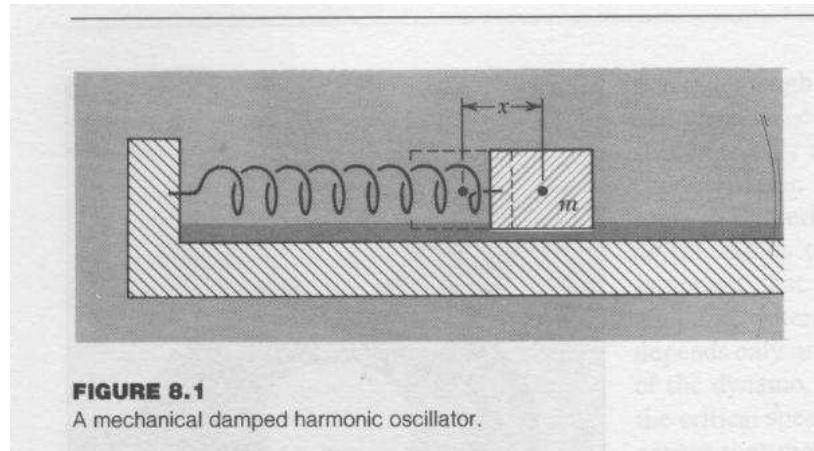


第8章 Alternating-Current Circuits (交流回路)

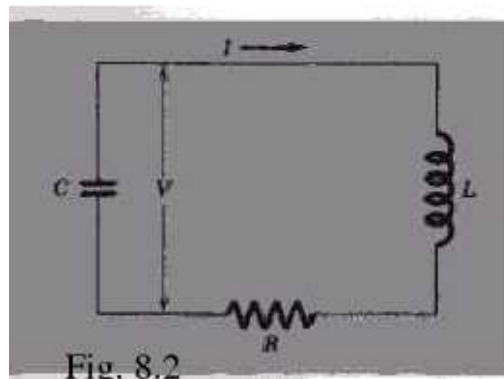
8.1 A Resonant Circuit (共鳴回路)

振動子の例として質点がバネにつけられている系がある。振動の振幅があまり大きくないとき質点の運動は時間を変数とする正弦関数となる。これを *Harmonic Oscillator* (調和振動子) という。力学的調和振動子の特徴は質量 m の質点につりあいの位置からの変位に比例する復元力 $F = -kx$ が働くことである (FIGURE 8.1)。



他の外力がないとき、はじめ変位している質点は振幅を変えずに振動数 $\omega = \sqrt{k/m}$ で振動する。しかし普通は何らかの摩擦が働いて最終的には振動は止まってしまう。最も単純なのは質点の速度 dx/dt に比例する抵抗力が働く場合である。復元力が変位 x に比例し、抵抗力が時間微分 dx/dt に比例する系を *Damped Harmonic Oscillator* (減衰調和振動子) という。

コンデンサーとコイル (インダクタンス) を含む回路は本質的に調和振動の系である。さらに抵抗が入ると減衰振動系になる。



実際の電気回路素子は明白な線形性を有しているので、そのおかげで電氣的減衰振動系は

機械的振動系よりずっと理想的な系になっている。始めに FIGURE 8.2 の直列 RLC 回路を学ぶ。

時刻 t で回路のコンデンサーの電荷を Q とする。コンデンサーの両端子の電位差、つまり電圧 V はコイル L と抵抗 R の直列接続の端子電圧と明らかに同じである。コンデンサーの上側の極板が正に帯電しているとき V を正と定め、電流の正の方向を FIGURE 8.2 の矢印の向きと決める。このように符号を選ぶと、電荷 Q 、電流 I そしてコンデンサーの端子電圧 V の間の関係式は

$$I = -\frac{dQ}{dt}, \quad Q = CV, \quad V = L\frac{dI}{dt} + RI \quad (8.1)$$

となる。

始めの2つの式から $I = -CdV/dt$ を得、3番目の式に代入すると $V = -LCd^2V/dt^2 - RCdV/dt$ 、つまり

$$\frac{d^2V}{dt^2} + \left(\frac{R}{L}\right)\frac{dV}{dt} + \left(\frac{1}{LC}\right)V = 0 \quad (8.2)$$

を得る。

これは定数係数線形2階微分方程式である。解を

$$V = Ae^{-\alpha t} \cos \omega t \quad (8.3)$$

としてみよう。ここで A 、 α 、 ω は定数である。この関数の1階と2階微分は

$$\frac{dV}{dt} = Ae^{-\alpha t}[\alpha \cos \omega t - \omega \sin \omega t] \quad (8.4)$$

$$\frac{d^2V}{dt^2} = Ae^{-\alpha t}[(\alpha^2 - \omega^2) \cos \omega t + 2\alpha\omega \sin \omega t] \quad (8.5)$$

である。

(8.2) 式に代入し、 $Ae^{-\alpha t}$ なる共通因子を落とすと、残りは

$$(\alpha^2 - \omega^2) \cos \omega t + 2\alpha\omega \sin \omega t - \frac{R}{L}(\alpha \cos \omega t + \omega \sin \omega t) + \frac{1}{LC} \cos \omega t = 0 \quad (8.6)$$

となる。

これが全ての t について成り立つのは $\sin \omega t$ と $\cos \omega t$ の係数が共にゼロとなるときであって、そのときに限る。つまり

$$2\alpha\omega - \frac{R\omega}{L} = 0 \quad (8.7)$$

と

$$\alpha^2 - \omega^2 - \alpha\frac{R}{L} + \frac{1}{LC} = 0 \quad (8.8)$$

を要求しなければならない。

1 番目の式は α に条件をあたえる:

$$\alpha = \frac{R}{2L} \quad (8.9)$$

一方、2 番目の式は

$$\omega^2 = \frac{1}{LC} - \alpha \frac{R}{L} + \alpha^2 = \frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2} \quad (8.10)$$

を要求する。

ω は実数だから ω^2 は負にはなれない。よって $R^2/4L^2 \leq 1/LC$ のときだけ (??) 式の形の解を得る。実際、調べたいのは "Light Damping" (弱い減衰)、つまり低抵抗の場合であるので、回路内の R 、 L 、 C の値は不等式 $R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ が成立するようなものであると仮定しよう。

関数 $Ae^{-\alpha t} \cos \omega t$ が唯一の解ではなく、 α 、 ω が各々 (8.9) 式、(8.10) 式を満たしている $Be^{-\alpha t} \sin \omega t$ も同じように解になる。一般解はこれらの和である:

$$V = e^{-\alpha t}(A \cos \omega t + B e^{-\alpha t} \sin \omega t) \quad (8.11)$$

任意定数 A と B は初期条件を満たすように選べる。これはそれほど大事なことはない。勝手にあたえられた問題の解が正弦関数か余弦関数か、あるいはそれらの重ね合わせになっているかは、時計をどう合わせたかというどちらでも良い問題である。ここで本質的な現象は減衰振動であるということである。

電圧の時間変化が FIGURE 8.3a に示されている。もちろん、これが *past* (過去) にさかのぼっていつも成立したわけではない。ある過去の時刻でいづれにせよ回路にエネルギーが供給されていなくてはならず、その後、減衰回路が働いてきたわけである。例えば回路のスイッチを開けてコンデンサーを充電してからコイルに接続したというわけである。

FIGURE 8.3b では時間スケールを拡大し、点線で電流 I の変化も付け加えられている。 V については減衰余弦関数 (8.3) 式をとるものとしよう。そうすると時間関数の電流 I は

$$I = -C \frac{dV}{dt} = AC\omega (\sin \omega t + \frac{\alpha}{\omega} \cos \omega t) e^{-\alpha t} \quad (8.12)$$

であたえられる。

α/ω なる比は減衰の尺度をあたえる。もし α/ω が小さいときには、少ししか振幅が減衰しないうちに振動が何回もおこる。FIGURE 8.3 は $\alpha/\omega \leq 0.04$ として描いた。このとき (8.12) 式の \cos 項は大きくはない。位相が $\tan^{-1}(\alpha/\omega)$ なる小さい角だけずれるだけである。よって、電流の振動の位相は電圧の振動の位相から $1/4$ サイクル分ずれるのである。

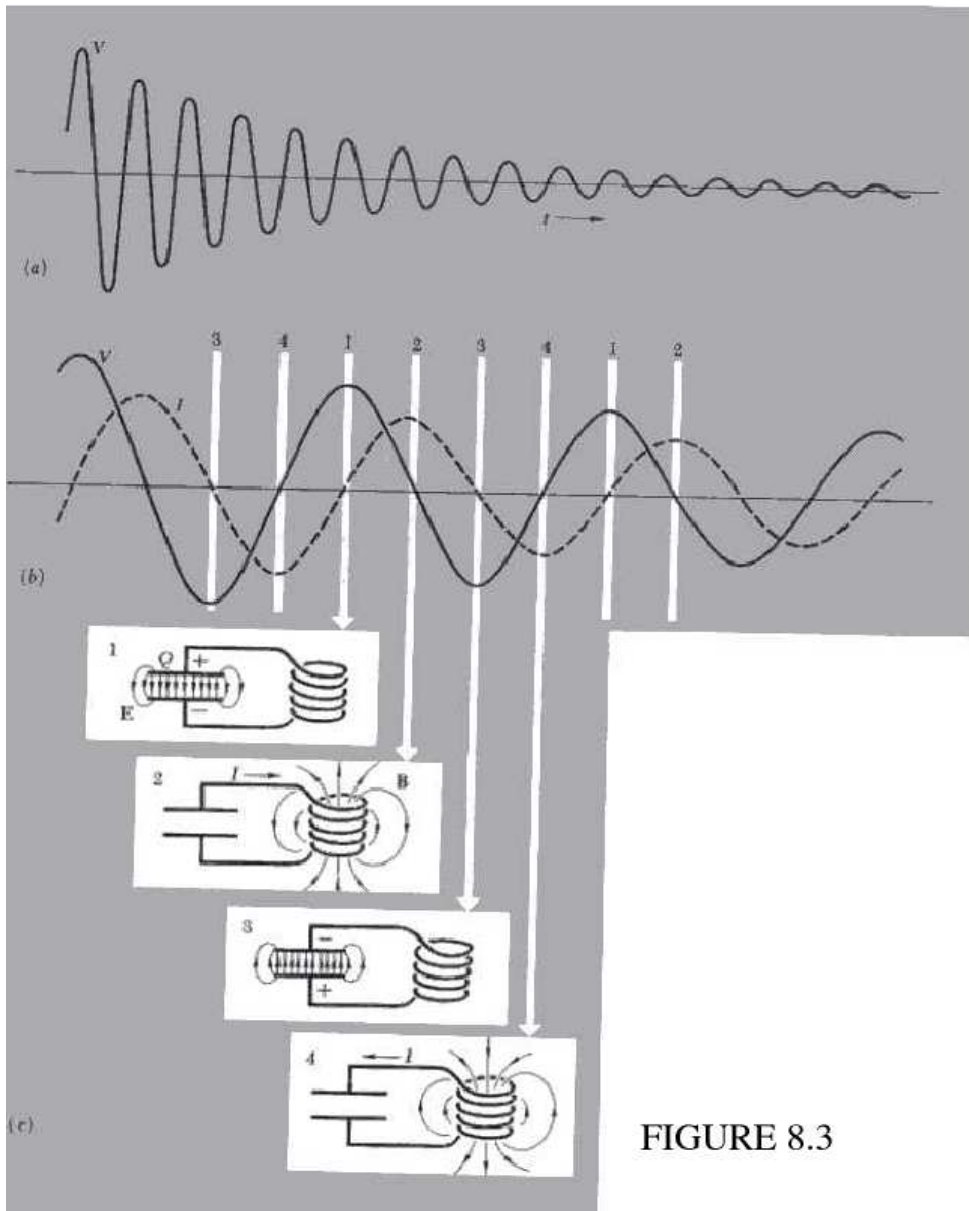


FIGURE 8.3

この振動により、エネルギーがコンデンサーからコイルへ行ったり来たりというやりとりがなされる。つまり電場から磁場へのエネルギーのやりとりが行われる。FIGURE 8.3bで1と表した時刻ではコンデンサーは放電してしまい、ほとんどのエネルギーがコイルの磁場中に貯えられていることがわかる。その間に抵抗 R がその税金を取ってしまい、振動が進行するにつれ場の中に残るエネルギーは漸減する。

振動子の減衰率は Q とよばれる数値で表されることが多い。この Q 値 (コンデンサーの電荷と混同しないようにせよ。) は *Quality* とか *Quality Factor* を意味している。原場

では誰もそんな呼び方はせず、ただ単に Q と言っている。
減衰が弱ければ Q 値は大きくなる。角振動数 ω の振動子では Q は次のように定義される無次元の比である:

$$Q = \omega \frac{\text{貯えられるエネルギー}}{\text{平均消費電力(パワー)}} \quad (8.13)$$

あるいは Q は振動子のエネルギーが $1/e$ だけ減るのに要する変数 ωt (つまり $(2\pi) \cdot (\text{振動数})$) を radian 単位で表した数と覚えてもよい。

今考えている回路では貯えられるエネルギーは V^2 あるいは I^2 に比例するから $e^{-2\alpha t}$ に比例する。エネルギーは $1/2\alpha$ だけ時間がたつと $1/e$ だけ減る。これ ω 倍して radian 単位で表すと $\omega/2\alpha$ radian である。故に考えている LCR 回路に対しては

$$Q = \frac{\omega}{2\alpha} = \frac{\omega L}{R} \quad (8.14)$$

である。

FIGURE 8.3 に示した振動での Q 値を大雑把でよいから見積もるとどうなるだろうか。

一般の場合をこれまで考えてきたが、当然いくつかの特別なときには簡単になる。 $R = 0$ のときは全く減衰しない場合になり、このときの角振動数 ω_0 は

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (8.15)$$

となる。

ほとんどの場合、減衰が小さいので振動数を求めるときに無視できる系になっている。(8.10) 式からもわかるように、また Problem 8.9 で示されるように弱い減衰は ω について 2 次の項のみである。

補完するために $R > 2\sqrt{L/C}$ なる過減衰回路では何がおこっているか手短かにみておこう。このとき (8.2) 式は β の 2 つの値 β_1 と β_2 に対し $V = e^{-\beta t}$ なる形の解をもつので、一般解は

$$V(t) = Ae^{-\beta_1 t} + Be^{-\beta_2 t} \quad (8.16)$$

であり、振動はせず、単調に減衰するのみである。

$R = 2\sqrt{L/C}$ なる $\beta = \beta_1 = \beta_2$ である臨界減衰という特別な場合には (8.2) 式の微分方程式は

$$V(t) = (A + Bt)e^{-\beta t} \quad (8.17)$$

なる形の解を有する。

L と C が決まっているとき回路のエネルギーが最も速く消費される条件はこの $R = 2\sqrt{L/C}$ である (Problem 8.8 参照)。

FIGURE 8.4 には広範囲の解が示されている。ここでは 2 つの減衰回路、臨界減衰回路、過減衰回路の場合の $V(t)$ がプロットされている。コンデンサーとインダクタンスは

固定され、抵抗の値が変えられている。回路の角振動数 $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ は 10^6 s^{-1} で、毎秒 $10^6/2\pi$ 周期、つまり 159 [kHz=キロサイクル/s] である。

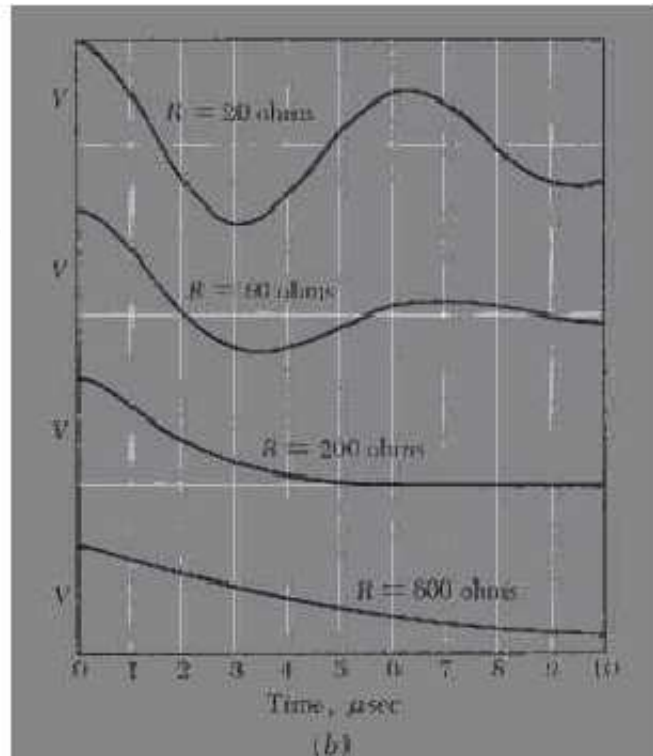
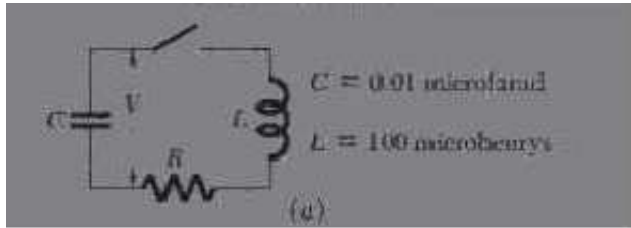


Figure 8.4

この回路でコンデンサーを例えば 1 V にまで充電してから $t = 0$ でスイッチを閉じたとしてよう。つまり $t = 0$ で $V = 1$ が 1 つの初期条件である。
 また、 $t = 0$ で $I = 0$ である。何故ならコイルの電流が非連続的に大きくなれないからである。これがもう 1 つの初期条件 $t = 0$ で $dC/dt = 0$ をあたえる。

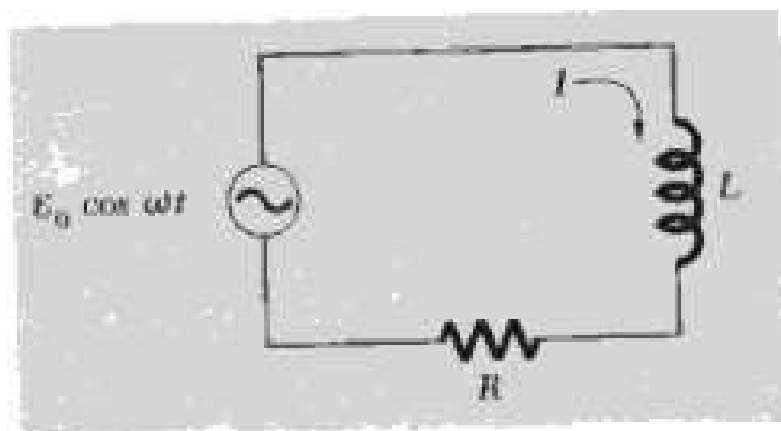
減衰曲線は 4 つとも始まりが同じであることに注意せよ。過減衰の場合 ($R = 600 \Omega$) の曲線はほぼ RC 回路の単純な減衰指数関数曲線に似ている。始まりの曲線が丸くなっていて傾きがゼロととなっている時期だけがインダクタンス L の存在を露呈している。

8.2 Alternating Current (交流)

前節で論じた共鳴回路はエネルギー源が含まれていなかったののでいづれ減衰し消滅していく *transient*(過渡的)な振動現象であった。ここで論ずる交流回路では電流、電圧ともに振幅の変わらない正弦的振動の *steady state*(定常状態)を扱おう。振動する emf が系を働かす。

交流電流の振動数(周波数) f のサイクル/sを普通は(電磁波の発見者¹に因み)Hzという単位であらわす。方程式には角振動数 $\omega = 2\pi f$ が顔を出す。この単位は rad/s であるが、これに特別な名前はない; 単に s^{-1} と書く。故に北米での 60 Hz の電流は $\omega = 377s^{-1}$ である²。

インダクタンスと抵抗からなる回路に emf $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \cos \omega t$ をあたえよう。



この \mathcal{E} を発生させるために、一定の角速度 ω で回転するエンジンかモーターを使った FIGURE 7.13 のような機械を使ってもよい。FIGURE 8.5 中の左側の記号は回路に交流の emf があることを便宜的に示している。これを回路に直列に接続された発電機と考えてもよい。しかし回路の特別な位置の emf を装釘しなくてもよい。問題になるのは回路全体を周回する線積分である。FIGURE 8.5 は回路により囲まれる全領域を通る磁束の変化から生じる emf がある回路であってもよい。

この回路に含まれる素子の電位の降下の和が emf \mathcal{E} に等しいと置くと、電流を決める

¹Heinrich Hertz は 1887 年巨視的な電子回路の振動電流が電磁波を生ずることを示した。周波数はおよそ 10^9 Hz であった。これは 30cm の波長に対応する。その発見の 15 年前の Maxwell の理論で光は電磁気現象であることにほとんど疑いを残してはいなかったが、電磁気学の歴史上、Hertz の実験は大きな意義を持つ転回点になった。

²YC 注: 我が国では富士川以西の値であり、以東では 50 Hz で $\omega = 314s^{-1}$ である。

方程式が

$$L \frac{dI}{dt} + RI = \mathcal{E}_0 \cos \omega t \quad (8.18)$$

となる。

初期条件、つまりいつ発電機のスイッチが入れられたかによる条件によって決まる過渡的な行動がこの系に現われるが、ここでは電流が emf と同じ振動数で (8.18) 式を満足する振幅と位相の定常状態にのみ関心がある。こうなっていることを見るために、電流が

$$I = I_0 \cos(\omega t + \phi) \quad (8.19)$$

により記述されると考えよう。

定数 I_0 と ϕ を決めるため、この形を (8.18) 式に代入する:

$$-LI_0\omega \sin(\omega t + \phi) + RI_0 \cos(\omega t + \phi) = \mathcal{E}_0 \cos \omega t \quad (8.20)$$

$\cos \omega t$ と $\sin \omega t$ に分けてしまう:

$$-LI_0\omega(\sin \omega t \cos \phi + \cos \omega t \sin \phi) + RI_0(\cos \omega t \cos \phi - \sin \omega t \sin \phi) = \mathcal{E}_0 \cos \omega t \quad (8.21)$$

$\cos \omega t$ と $\sin \omega t$ の係数をそれぞれゼロと置く。

$$-LI_0\omega \cos \phi - RI_0 \sin \phi = 0 \quad (8.22)$$

より

$$\tan \phi = -\frac{\omega L}{R} \quad (8.23)$$

を得る。

また

$$-LI_0\omega \sin \phi + RI_0 \cos \phi - \mathcal{E}_0 = 0 \quad (8.24)$$

より

$$\begin{aligned} I_0 &= \frac{\mathcal{E}_0}{R \cos \phi - \omega L \sin \phi} \\ &= \frac{\mathcal{E}_0}{R(\cos \phi + \sin \phi \tan \phi)} = \frac{\mathcal{E}_0 \cos \phi}{R} \end{aligned} \quad (8.25)$$

を得る。

あるいは (8.23) 式より

$$\cos \phi = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \quad (8.26)$$

だから

$$I_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \quad (8.27)$$

とも書ける。

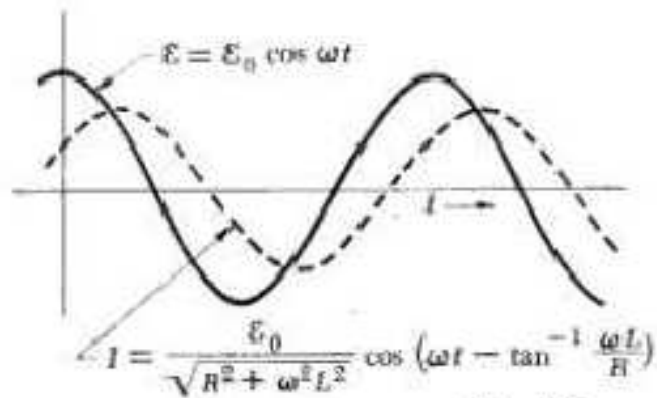


FIG 8.6

FIGURE 8.6に \mathcal{E} と I の振動の様子を同じグラフにのせてある。角 ϕ は負であるので、電流は emf より *later* (遅れて) 最大値に達する。人は”誘導回路では電流は電圧より遅れる。”という。 ωL は抵抗の次元をもち Ω の単位で表され、*inductive reactance* (リアクタンス) とよばれる。

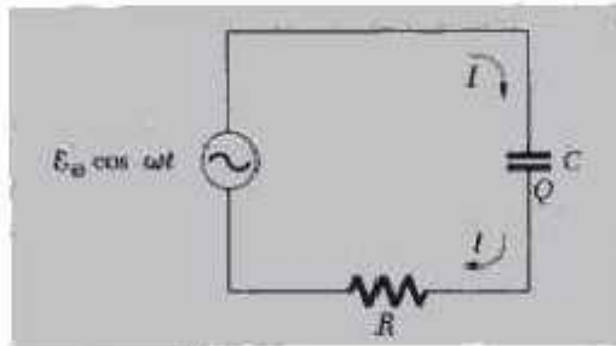


Fig. 8.7

FIGURE 8.7 のように FIGURE 8.5 の回路のコイルのインダクタンス L をコンデンサーの容量 C で置き換えると方程式

$$-\frac{Q}{C} + RI = \mathcal{E}_0 \cos \omega t \quad (8.28)$$

がこの回路を支配する。
定常電流の解

$$I = I_0 \cos(\omega t + \phi) \quad (8.29)$$

を考えよう。

$$I = -\frac{dQ}{dt}$$

だから

$$Q = -\int I dt = -\frac{I_0}{\omega} \sin(\omega t + \phi) \quad (8.30)$$

となる。 I を積分して Q を求めるとき積分定数を足す必要はない。というのも定常状態では Q はゼロのまわりで対称的に振動することを知っているからである。

(8.28) 式に代入すると

$$\frac{I_0}{\omega C} \sin(\omega t + \phi) + RI_0 \cos(\omega t + \phi) = \mathcal{E}_0 \cos \omega t \quad (8.31)$$

を得る。

前と同じように $\cos \omega t$ と $\sin \omega t$ の係数が別々にゼロであることを要求すると ϕ と I_0 の条件を得る。この結果は

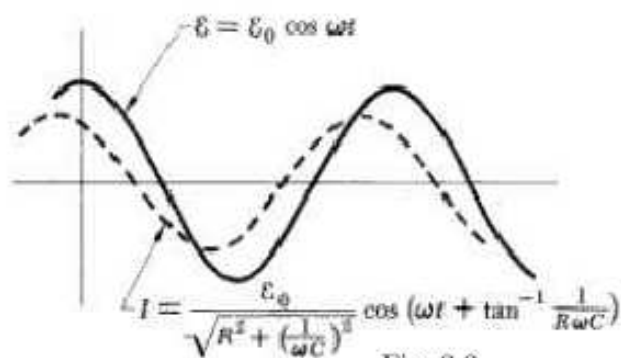
$$\tan \phi = \frac{1}{R\omega C} \quad (8.32)$$

と

$$I_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{R^2 + (\frac{1}{\omega C})^2}} \quad (8.33)$$

である。

今の場合、位相角は正であることを注意せよ。”コンデンサー回路では電流は電圧に先行する。”と人はいふ。この意味は FIGURE 8.8 のグラフから明らかである。



数学的にいうと

$$I = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{R^2 + (\frac{1}{\omega C})^2}} \cos(\omega t - \tan^{-1} \frac{\omega L}{R}) \quad (8.34)$$

は微分方程式 (8.18) の *particular integral* (特 (殊) 解) である。これに *complementary function*、つまり斉次微分方程式

$$L \frac{dI}{dt} + RI = 0 \quad (8.35)$$

の任意の解を加えてもよい。これは第 7 章 9 節で解を述べたが指数関数的に減少する関数

$$I \sim e^{-(R/L)t} \quad (8.36)$$

である。

この物理的意味は次の通りである：

ある初期条件で決まる過渡現象は (8.36) 式の形の $I(t)$ の減衰する成分で表される。 $t \gg L/R$ より後ではこの成分は消えて、後には (8.34) 式の特解で表される emf の振動数をもつ定常的正弦振動が残る。

RL 回路と RC 回路の結果が良く似ているので、コイルとコンデンサーが直列に接続された場合の解き方が推量できる。交流電流 $I = I_0 \cos(\omega t + \phi)$ がこの回路を流れるものとする (FIGURE 8.9)。

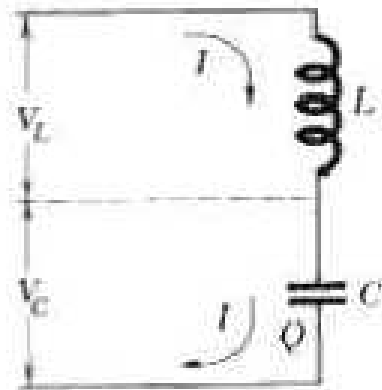


Fig. 8.9

インダクタンスでの電圧 V_L は

$$V_L = L \frac{dI}{dt} = -I_0 \omega L \sin(\omega t + \phi) \quad (8.37)$$

コンデンサーでの電圧 V_C は、 V_L と矛盾しない符号で

$$V_C = -\frac{Q}{C} = \frac{1}{C} \int I dt = \frac{I_0}{\omega C} \sin(\omega t + \phi) \quad (8.38)$$

よって、この直列接続の電圧は

$$V = V_L + V_C = -(\omega L - \frac{1}{\omega C}) I_0 \sin(\omega t + \phi) \quad (8.39)$$

となる。

For a given(あたえられた) ω に対して、 $\omega L - 1/\omega C$ の符号の正負に応じてこの2つの素子の直列接続はコイルあるいはコンデンサーの一つの素子と等価になる。

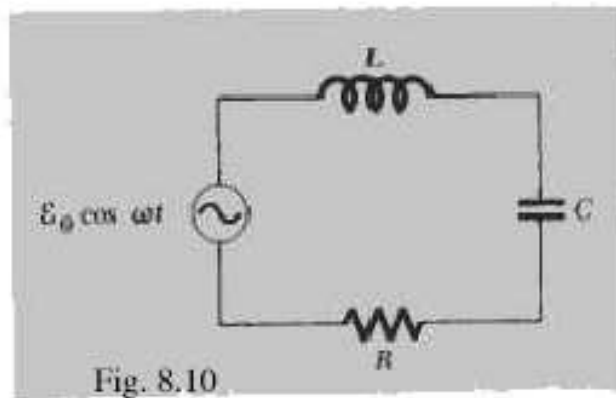
例えば $\omega L > 1/\omega C$ の場合を考えよう。このときはインダクタンス L' と等価で

$$\omega L' = \omega L - \frac{1}{\omega C} \quad (8.40)$$

である。

equivalence(等価)とは only(単に) 特定の ω での定常振動における電流と電圧の関係が同じであることを意味している。この振動数で動いているどんな回路でも、いつも L と C を L' で置き換えて良いのである。

これを FIGURE 8.10 の簡単な RLC 回路に応用できる。



(8.23) 式と (8.27) 式を思い出せばよく、 RL 回路が $\mathcal{E}_0 \cos \omega t$ の下で働いている場合の解の ωL を $\omega L - 1/\omega C$ で置き換えるだけで良い。

$$I = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}} \cos(\omega t + \phi) \quad (8.41)$$

$$\tan \phi = \frac{1}{R\omega C} - \frac{\omega L}{R} \quad (8.42)$$

emf の振幅 \mathcal{E}_0 を決めるとあたえられた L 、 C 、 R に対し、角振動数 ω が

$$\omega L - \frac{1}{\omega C} = 0 \quad (8.43)$$

であるとき電流の最大値を得る。

つまり

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_0 = \text{非減衰 } LC \text{ 回路の共鳴角振動数}$$

が最大の電流をあたえるということが得られた。

この場合、(8.41)式は

$$I = \frac{\mathcal{E}_0 \cos \omega t}{R} \quad (8.44)$$

となる。これは正に回路が抵抗だけで構成されているとき流れる電流に等しくなっている。

FIGURE 8.4aの回路の例で $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \cos \omega t$ なる交流起電力をあたえる source または発電機につなげたとしよう。角振動数 ω は共鳴角振動数 $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ とは違っていても良い。 ω_0 は電気容量が $0.01 \mu\text{F}$ で、インダクタンスが $100 \mu\text{H}$ であるので 10^6 rad/s ($10^6/2\pi\text{Hz}$) である。

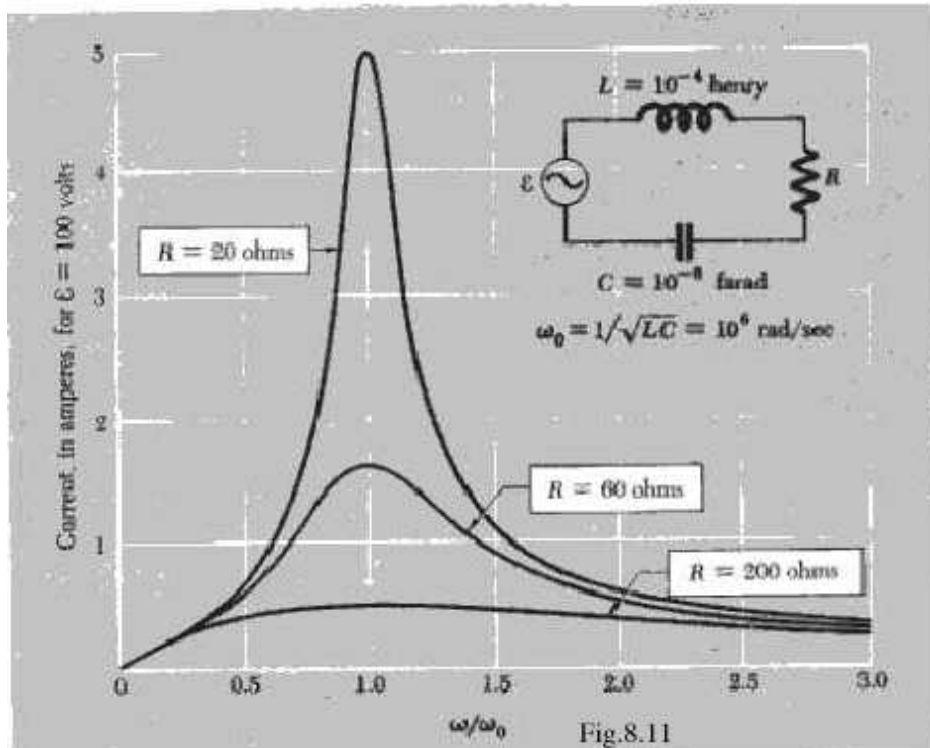


FIGURE 8.11は R の3種類の値に対して振動電流の振幅を ω の関数で表したものである。どの場合も $\mathcal{E}_0 100 \text{ V}$ と仮定している。

$\omega = \omega_0$ に現われる共鳴のピークは抵抗値が最低のとき最もはっきりして鋭いことに注意せよ。この抵抗値は emf を持たない減衰回路の場合 FIGURE 8.4b の一番上のグラフで示されているときの R の値に等しい。

Q 値は $\omega_0 L/R$ で定義されていた³ので $10^6 \times 10^{-4}/20 = 5$ である。一般的に言って回路

³第8章1節での分子は ω とされていた。これは減衰振動子の角振動数の意味であり、弱い減衰のときは事実上 ω_0 と同じであった。この節では Q の定義に ω_0 を使う。この節では ω は回路に使うとき任意に選べる角振動数として用いられている。

の Q 値が高ければ高いほど ω の関数としての応答関数のピークは狭くかつ高くなる。もっと詳しく言うために ω_0 近傍の角振動数 $\omega = \omega_0 + \Delta\omega$ を考えよう。このとき $\Delta\omega/\omega_0$ の1次までの近似では (8.41) 式の分母の $\omega L - 1/\omega C$ は

$$\omega L - \frac{1}{\omega C} = \omega_0 L \left(1 + \frac{\Delta\omega}{\omega_0}\right) - \frac{1}{\omega_0 C \left(1 + \frac{\Delta\omega}{\omega_0}\right)} \quad (8.45)$$

となる。

$\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ だから、これは

$$\omega_0 L \left(1 + \frac{\Delta\omega}{\omega_0}\right) - \frac{1}{\omega_0 C \left(1 + \frac{\Delta\omega}{\omega_0}\right)} \approx \omega_0 L \left(2 \frac{\Delta\omega}{\omega_0}\right) \quad (8.46)$$

となる。共鳴点では (8.41) 式の $\sqrt{\quad}$ 記号の中は R^2 である。

ω が共鳴点からずれると $|\omega L - 1/\omega C| = R$ のとき、あるいは近似的に

$$2 \frac{|\Delta\omega|}{\omega_0} = \frac{R}{\omega_0 L} = \frac{1}{Q} \quad (8.47)$$

のとき、 $\sqrt{\quad}$ の中は2倍になる。

これは

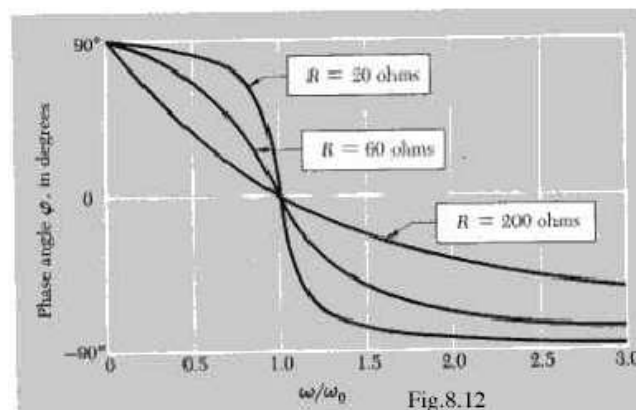
$$\left| \frac{\Delta\omega}{\omega_0} \right| = \frac{1}{2Q}$$

のとき、電流の振幅はピーク値の $1/\sqrt{2}$ に落ちてしまうことを意味する。これらは”half-power” point (半値点) である。なぜなら第8章5節で述べるようにエネルギーあるいは電力は振幅の2乗に比例しているからである。

共鳴幅として半値点の間の幅をあたえることがよくある。明らかに共鳴幅は $1/Q$ と共鳴角振動数 ω_0 の積である。

ここで考えた回路よりずっと高い Q 値をもつ回路が断然多い。ラジオの受信機は 600 ~ 700 の Q 値の共鳴回路を使って、特定の局を選び、他局を消してしまう。

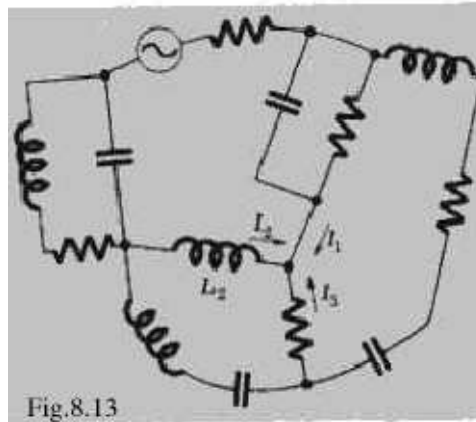
$10^4 \sim 10^5$ の Q 値をもつマイクロウェーブの共鳴回路も簡単に作れる。



電流と emf の位相差を表す角 ϕ は角振動数 ω によって FIGURE 8.12 のように変化する。非常に低い角振動数では主としてコンデンサーが電流を妨げ ϕ は正になる。共鳴点では $\phi = 0$ になる。Q 値が高ければ高いほど、角振動数が ω_0 を通って大きくなる時 ϕ の正から負への移り方が激しくなる。

8.3 Alternating- Current Networks (交流回路網)

交流回路網は一定の角振動数 ω の電流が抵抗やコンデンサー、コイルを任意に組み合わせた通り道からなる。この角振動数の emf が 1 つあるいは複数あり振動電流を流している。FIGURE 8.13 はこの種の回路網の一例である。



交流起電力は次の記号で表されている。



回路網の一部、例えばインダクタンス L_2 を含む部分では時間の関数としての電流が

$$I_2 = I_{02} \cos(\omega t + \phi_2) \quad (8.48)$$

と書ける。角振動数は回路網全体で同じ定数であるので、ある特定の部分の電流を決めるには振幅 I_{02} と位相定数 ϕ_2 を決めれば充分である。電圧も同様にこの部分ではある振幅と位相で振動している。

$$V_2 = V_{02} \cos(\omega t + \theta_2) \quad (8.49)$$

回路網の全部分の電流と電圧が決まれば、この回路は全部分分析されつくしてしまうことになる。もちろん適切な微分方程式を全てについてたてて解けば全電流および全電圧を求めることが可能である；また回路網の過渡現象を解きたければこれを実行しなければならない。

あたえられた角振動数 ω の定常状態だけを求めるためには、もっとずっと簡単かつエレガントな方法を使うことができる。

この方法は以下の 2 つのアイディアに基づいている：

1. 複素数を用いて交流電流や交流電圧を表すことができる。
2. 回路分枝でも回路素子でも、あたえられた振動数では、その部分の電圧と電流との関係で解けてしまう。

1 番目のアイディアは数学的恒等式

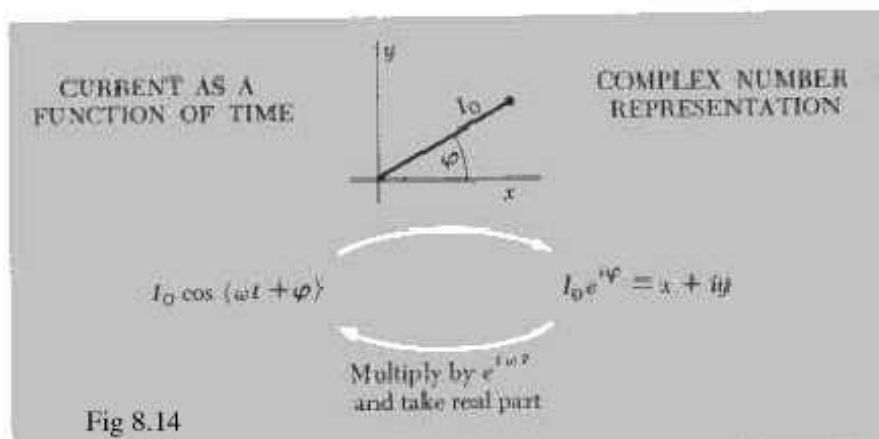
$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta \quad (8.50)$$

から出てくる。ここで $i^2 = -1$ である。

このアイディアを実現するために次の表示 *rule(法)* を採用する:

交流電流 $I_0 \cos(\omega t + \phi)$ は、複素数 $I_0 e^{i\phi}$ 、つまり実部が $I_0 \cos \phi$ で、虚部が $I_0 \sin \phi$ なる数で *represented(表現)* されることができる。
 別の言い方をすると、もし複素数 $x + iy$ が電流 I を *represent(表現)* するならば、時間の関数としての電流は積 $(x + iy)e^{i\omega t}$ の実部であたえられる。

FIGURE 8.14はこの2つのやり方の覚え方である。



複素数 $x + iy$ は2次元平面でグラフ化できるので、位相定数を角 $\tan^{-1}(y/x)$ で、振幅 I_0 を $\sqrt{x^2 + y^2}$ で図示することは簡単である。

こんな表示法が有用になるのは以下の事柄による:

The representation of the sum of two currents is the sum of their representations. (2つの電流の和の表示は表示の和である。)

FIGURE 8.13の2本の導線が出会う結節点での電流 I_1 と I_2 の和を考えよう。

任意の時刻 t での電流の和は

$$\begin{aligned} I_1 + I_2 &= I_{01} \cos(\omega t + \phi_1) + I_{02} \cos(\omega t + \phi_2) \\ &= (I_{01} \cos \phi_1 + I_{02} \cos \phi_2) \cos \omega t \\ &\quad - (I_{01} \sin \phi_1 + I_{02} \sin \phi_2) \sin \omega t \end{aligned} \quad (8.51)$$

他方、 I_1 と I_2 をここでの表示法による複素数の和で表すと

$$I_{01}e^{i\phi_1} + I_{02}e^{i\phi_2} = (I_{01} \cos \phi_1 + I_{02} \cos \phi_2) + i(I_{01} \sin \phi_1 + I_{02} \sin \phi_2) \quad (8.52)$$

となる。

(8.52) 式の右辺を $\cos \omega t + i \sin \omega t$ 倍し、その結果の実部を取ると (8.51) 式の右辺に現われる式を得る。

上述のことは、時間の周期関数を足したり引いたりする代わりに、それらを表示する複素数を足したり引いたりすることができることを意味している。言い方を変えると、交流電流の代数は和に関して複素数の代数と同じであることがわかる。この対応は積にはあてはまら *not* ない。複素数 $I_{01}I_{02}e^{i(\phi_1+\phi_2)}$ は (8.51) 式の2つの電流関数の積を表現しない。

しかしながら、回路網の分析に必要なのは電流の和と電圧の和だけである。例えば、FIGURE 8.13 で電流 I_1 が I_2 と出会う結節点では物理的に *at every instant*(いつでも) 流れ込む電流の正味の値はゼロであるという条件がある。

故に

$$I_1 + I_2 + I_3 = 0 \quad (8.53)$$

が成立しなければならない。ここで I_1 、 I_2 、 I_3 は *actual periodic functions of time*(本当の時間的周期関数) である。

我々の表示則のおかげで、これを3つの複素数の和はゼロという代数の簡単な命題で言うことができる。

電圧も同様に扱える。ある時刻での回路網内の任意のループに沿う電圧降下の和は、その時刻でのループ内の emf に等しくなければならない。周期的電圧関数同士を関係づけるこの条件が、電流の場合と同様に、関数 $V_1(t)$ 、 $V_2(t)$ 、等々を表示する複素数の和についての命題で置き換えることができる。

8.4 Admittance And Impedance (アドミッタンスとインピーダンス)

電流と電流が通る回路素子の端子間電圧の関係は電圧と電流の複素数表示の関係で表すことができる。FIGURE 8.5 のインダクタンスと抵抗 (LR) 連結を考えよう。

この振動電圧は \mathcal{E}_0 で、電流は $I_0 e^{i\phi}$ で表示できる。

ここで

$$I_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}$$

で

$$\tan \phi = -\frac{\omega L}{R}$$

である。

この位相差 ϕ および電流の振幅と電圧の振幅の比はこの角振動数でのこの回路に特有な値である。

次のような複素数 Y を定める:

$$Y = \frac{e^{i\phi}}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \quad \text{ここで } \phi = \tan^{-1}\left(-\frac{\omega L}{R}\right) \quad (8.54)$$

これより

$$I = YV \quad (8.55)$$

なる関係が成立する。ここで V は R と L の直列接続の 2 端子間の電圧を表す複素数で、 I は電流を表示する複素数である。 Y を *Admittance*(アドミッタンス) という。

同じ関係を Y の逆数 Z で表すこともできる。 Z は *Impedance*(インピーダンス) という:

$$V = \left(\frac{1}{Y}\right)I = ZI \quad (8.56)$$

2つの複素数の積が現われたが、このうち一つだけが交流電流あるいは電圧を表示する。もう一つの方はインピーダンスあるいはアドミッタンスである。こうして2つのカテゴリーの複素数を我々の代数は含むことになった。例えばインピーダンスを表す複素数と電流を表示する複素数である。

2つの”インピーダンス数”の積は、2つの”電流数”の積同様、何も表現しない。

インピーダンスは Ω 単位で測られる。実際、回路素子が抵抗 R だけから構成されているとき、インピーダンスは実数で、単に R に等しく、(??) 式は直流回路の Ohm の法則 $V = RI$ に似てしまう。

抵抗のないコイルのアドミッタンスは

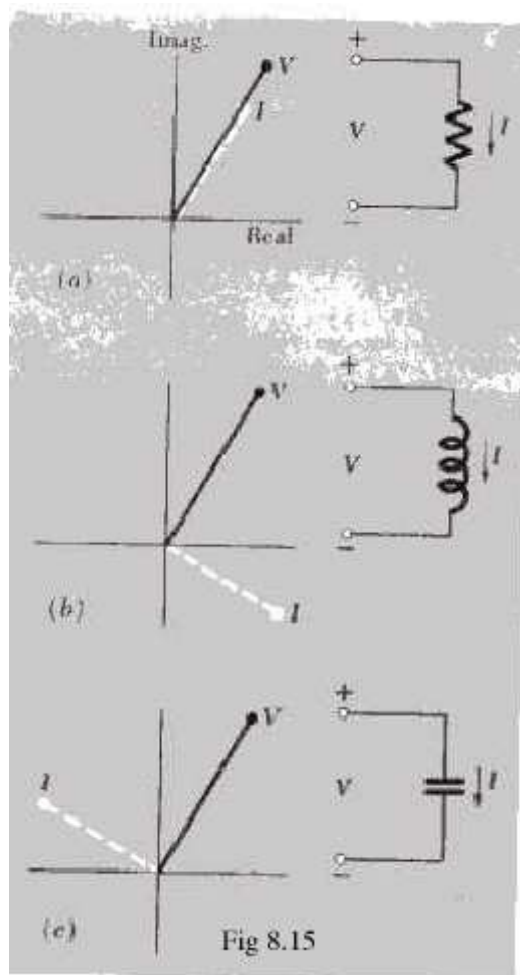
$$Y = -\frac{i}{\omega L}$$

という虚数である。

これは (8.54) 式で $R = 0$ として得られる。 $-i$ なる因子は電流の振動が $\pi/2$ だけ電圧の振動より遅れることを示している。

電流と電圧の振動の相対的位相差は vectors 間の角度で表されている。

- (a) 抵抗の場合は電流と電圧は同位相、
- (b) コイルでは電流は電圧より遅れ、
- (c) コンデンサーでは電流は電圧より先行する。



複素平面上では電圧が V と表される時電流は I と表されて FIGURE 8.15b に示された位置になる。

コンデンサーに対しては FIGURE 8.8 の電流に対する表式からわかるように




$$Y = i\omega C$$

である。この場合 V と I は FIGURE 8.15c に示したような関係にある。

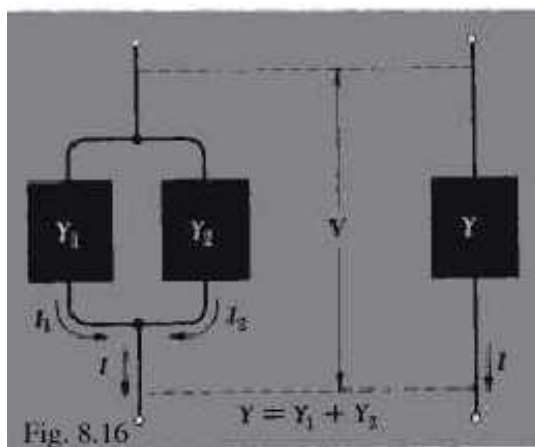
各 FIGURE には V と I の相対的符号がどう定まるべきかコメントされている。これを予

盾なく行わなければ *leading*(先行) とか *lagging*(遅れ) の意味がなくなる。電流の方向は、抵抗にかかった電圧が正のとき、電流が正になるように決めている (FIGURE 8.15a)。

3つの基本的回路素子の性質を以下にまとめた。

Symbol	Admittance, Y	Impedance, $Z = \frac{1}{Y}$
R 	$\frac{1}{R}$	R
L 	$\frac{-i}{\omega L}$	$i\omega L$
C 	$i\omega C$	$\frac{-i}{\omega C}$
$I = YV$		$V = ZI$

どんな回路でもこの3つの素子から作ることができる。素子や素子の組み合わせが並列に接続されたときはアドミッタンスを足せばよい。FIGURE 8.16ではアドミッタンス Y_1 と Y_2 をもつ2つのブラックボックスを並列につないである。



このとき

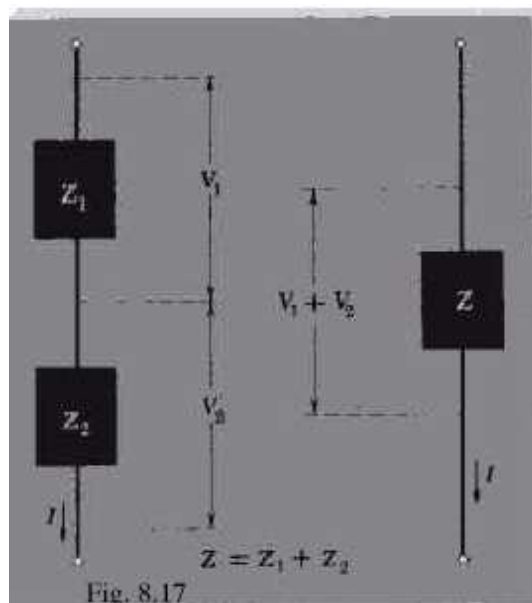
$$I = I_1 + I_2 = Y_1V + Y_2V = (Y_1 + Y_2)V \quad (8.57)$$

であり、これは

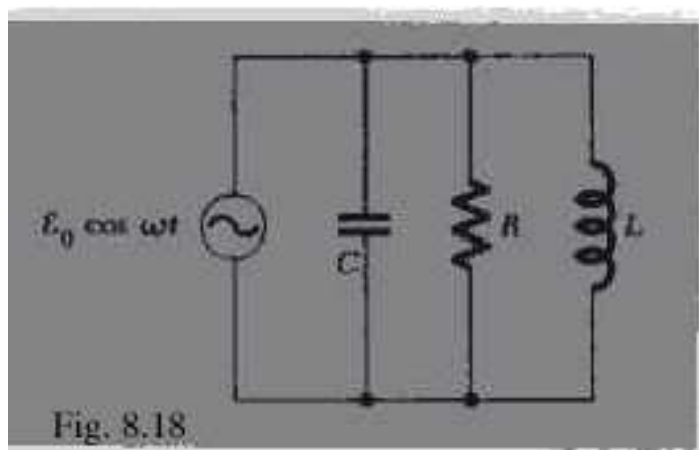
$$Y = Y_1 + Y_2$$

というアドミッタンスをもつ1個のブラックボックスと等価であることを意味している。FIGURE 8.17から *series*(直列) に素子がつながれるとき、*impedances*(インピーダンス)

が和になることは明らかである。ちょうど、直流回路網について論じているのと似ている。事実、交流回路網を直流回路網の問題に還元できてしまう。唯一の違いは：扱うべき数が複素数であることである。



例として FIGURE 8.18 の” 並列 RLC 回路” を見てみよう。



3つの並列の部分のアドミッタンスをまとめると

$$Y = \frac{1}{R} + i\omega C - \frac{i}{\omega L} \quad (8.58)$$

である。

電圧は単に \mathcal{E}_0 だから、複素電流は

$$I = YV = \mathcal{E}_0 \left[\frac{1}{R} + i\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right) \right] \quad (8.59)$$

となる。
振動電流の振幅は複素数 I の絶対値で

$$\mathcal{E}_0 \left[\left(\frac{1}{R} \right)^2 + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L} \right)^2 \right]^{1/2}$$

であり、
位相角は

$$\tan^{-1} \left(R\omega C - \frac{R}{\omega L} \right)$$

となる。

このようにして電流と電圧が比例する *linear*(線形) 回路は取り扱える。言い直すと、このようにして取り扱える回路は線形微分方程式で記述されていなければならない。非線形回路は重要かつ面白いデバイスである。もし君が実験室で何かやってみたことがあれば、どうして非線形デバイスがここで述べた分析方法をあてえないか分かるかも知れない。

これまでは全部一定の角振動数での連続的振動についての叙述である。電流の過渡的振舞いは別の問題であった。しかし線形回路ではここで述べた方法も過渡現象に役立つことがある。この理由は、多数の振動数の定常的振動を重ね合わせると非定常的振舞いを扱えることができるからであり、また個々の振動数についての応答はあたかもその振動数しか存在しないようにして計算できるからである。

8.5 Power And Energy in Alternating-Current Circuits (交流回路の電力とエネルギー)

抵抗 R の両端間の電圧が $V_0 \cos \omega t$ のとき、電流は $I = V_0 \cos \omega t / R$ である。ある瞬間の電力、つまり抵抗で消費されるエネルギーの時間変化率は

$$P = RI^2 = \frac{V_0^2}{R} \cos^2 \omega t \quad (8.60)$$

である。

$\cos^2 \omega t$ を周期で平均すると $1/2$ となるから、抵抗で消費される平均の電力は

$$\bar{P} = \frac{1}{2} \frac{V_0^2}{R} \quad (8.61)$$

である。

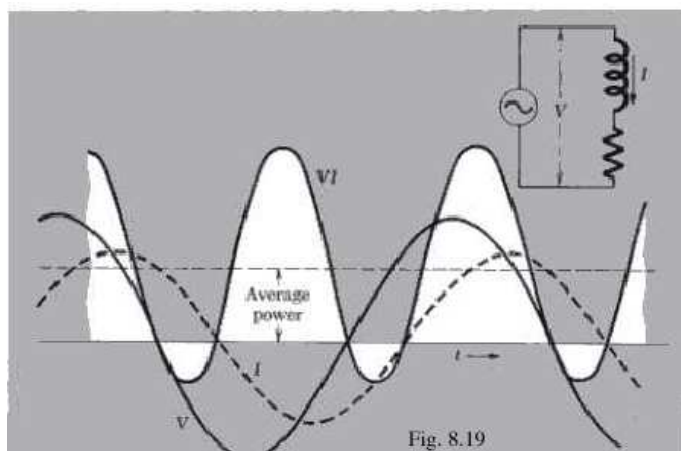
交流回路の電圧と電流を表すとき、振幅ではなく振幅の $1/\sqrt{2}$ 倍を使うのが慣例である。これを *Root-Mean-Square* (2乗平均の平方根あるいは実効値) という。(8.61) 式の $1/2$ を含めてしまって

$$\bar{P} = \frac{V_{\text{rms}}^2}{R} \quad (8.62)$$

例えば⁴東京での 100 V の家庭電圧は *textitAmplitude* (振幅) の値が $100\sqrt{2} \text{ V}$ に対応している。

君の部屋のコンセントの端子間の電位差 (通常電圧のとき) は $V(t) = 141 \cos 314t$ である。ここで、 V は $[\text{V}]$ 単位で t は $[\text{s}]$ 単位である。

交流電流計は電流の振幅が 1.414 A のとき 1 A と読むように較正されている。



⁴YC 注: Purcell の原文では北米となっているが、これを東京に変えておく。西日本の値は自分で計算しておくべし。

一般に回路素子に伝えられるエネルギーの時間的な割合は VI である。これを FIGURE 8.5 の単純な LR 回路に流れる電流について考えよう。FIGURE 8.19 にもう一度電流と電圧のグラフを書き、積 VI に比例する曲線を書き加えた。

VI が正である場合は emf の sources あるいは発電機から LR 接続素子に移されたエネルギーであることを意味している。ある周期のところでは VI が負になることに注意せよ。ここではエネルギーが発電機に戻されている。この振舞いはインダクタンスの磁場中に貯えられるエネルギーの振動で説明がつく。 $LI^2/2$ で貯えられるエネルギーは各周期で 2 回ほど最大になるのである。

average(平均) 電力 \bar{P} は水平な破線で示されている。この値を計算するため $V = \mathcal{E}_0 \cos \omega t$ と $I = I_0 \cos(\omega t + \phi)$ の積 VI を見てみよう:

$$\begin{aligned} VI &= \mathcal{E}_0 I_0 \cos \omega t \cos(\omega t + \phi) \\ &= \mathcal{E}_0 I_0 (\cos^2 \omega t \cos \phi - \cos \omega t \sin \omega t \sin \phi) \end{aligned} \quad (8.63)$$

$\cos \omega t \sin \omega t$ に比例する項の時間平均は、これを $\sin 2\omega t/2$ と書くと明らかのようにゼロであるが、 $\cos^2 \omega t$ の時間平均は $1/2$ である。よって時間平均すると

$$\bar{P} = \overline{VI} = \frac{1}{2} \mathcal{E}_0 I_0 \cos \phi \quad (8.64)$$

を得る。

電流と電圧がともに RMS 値で [A] 単位と [V] 単位で表されると

$$\bar{P} = V_{\text{rms}} I_{\text{rms}} \cos \phi \quad (8.65)$$

である。

この回路では、全ての消費エネルギーは抵抗 R で消費されている。当然どんなコイルも抵抗を持つが、この回路を分析するためにこの抵抗も抵抗 R に含めた。もちろん熱は抵抗が本当にあるところで発生するが。

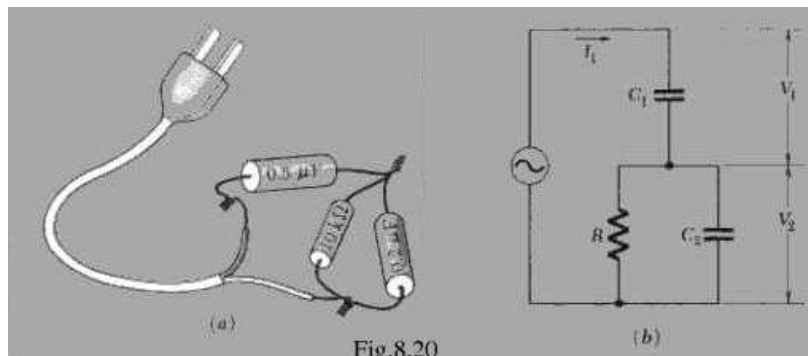


Fig.8.20

第8章4節で学んだ表示法を練習するために FIGURE 8.20a の回路を分析しよう。
 $10,000\Omega$ 、 $1W$ の抵抗が $0.2\mu F$ および $0.5\mu F$ の容量の2個のコンデンサーとつながっている回路である。

プラグを $100V$ 、 $50Hz$ のコンセントに差しこもう。

問題: $1W$ の抵抗は熱くなりすぎることはないだろうか。

R で消費される平均電力が $1W$ の割合を超えるかどうか判断する際に、いくつかの回路の中の素子の組み合わせでの電流と電圧を計算しよう。

以下に一つのやり方の概観を述べる。

$$\begin{aligned} C_2 \text{ のアドミッタンス} &= i\omega C_2 &= (314)(2 \times 10^{-7})i \\ &= 0.628 \times 10^{-4}i \Omega^{-1} \end{aligned}$$

$$\text{抵抗のアドミッタンス} = \frac{1}{R} = 10^{-4} \Omega$$

$$R \text{ と } C_2 \text{ の並列回路のアドミッタンス} = 10^{-4}(1 + 0.628i) \Omega^{-1}$$

$$\begin{aligned} R \text{ と } C_2 \text{ の並列回路のインピーダンス} &= \frac{1}{\frac{10^{-4}(1+0.628i)}{10^4(1-0.628i)}} \\ &= \frac{10^4(1-0.628i)}{1^2+0.628^2} \\ &= (7171 - 4503i) \Omega \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_1 \text{ のインピーダンス} &= -\frac{i}{\omega C_1} &= -\frac{i}{(314)(5 \times 10^{-7})} \\ &= -6369i \Omega \end{aligned}$$

$$\text{回路全体のインピーダンス} = (7171 - 10,872i) \Omega$$

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{100}{7171 - 10,872i} &= \frac{100(7171 + 10,872i)}{(7171)^2 + (10,872)^2} \\ &= (4.23 + 6.41i) \times 10^{-3} \text{ A} \end{aligned}$$

ここで $100V$ なる RMS 電圧を使ったので電流の結果も実効値である。

つまり、複素電流の絶対値 $[(4.23)^2 + (6.41)^2]^{1/2} \times 10^{-3} \text{ A} = 7.68 \text{ mA}$ は RMS 電流 (実効値) である。

回路に直列に挿入された交流 mA 電流計の指針は 7.7 mA となる。この電流の電圧との位相差の角 ϕ は

$$\phi = \tan^{-1} \frac{0.641}{0.423} = 0.99 \text{ rad}$$

となり、回路全体に伝えられた平均電力は

$$\bar{P} = (100 \text{ V})(0.0077 \text{ A}) \cos 0.99 = 0.42 \text{ W}$$

である。

この回路では抵抗だけがエネルギーを消費する素子だから、この値が消費される平均電力

である。

検算として抵抗の端子間電圧を求めてみよう。

$$\begin{aligned} V_1 &= I_1 \left(\frac{-i}{\omega C} \right) = (4.23 + 6.41i)(-6369i) \\ &= (40.8 - 26.9i) \text{ V} \end{aligned}$$

$$V_2 = 100 - V_1 = (59.2 + 26.9i) \text{ V}$$

もちろん R を通る電流 I_2 は V_2 と同期している (位相差はゼロ) ので R での平均電力は

$$\bar{P} = \frac{|V_2|^2}{R} = \frac{(59.2)^2 + (26.9)^2}{10^4} = 0.42 \text{ W} \quad (8.66)$$

となり、両者は合致している。

よって抵抗の消費電力は 1 W を超えない。こういう保証の意義は大きい。
現実には、抵抗が熱くなりすぎるか否かは平均消費電力だけではなく、熱をどれだけ効率良く除去できるかにも依存している。よって抵抗に対するこのような評価は大雑把な見当をあたえるガイドでしかない。