

第7章 Electromagnetic Induction (電磁誘導)

7.1 Faraday's Discovery (Faraday の発見)

1. The power which electricity of tension possesses of causing an opposite electrical state in its vicinity has been expressed by the general term. Induction; which, as it has been received into scientific language, may also, with propriety, be used in the same general sense to express the power which electrical currents may possess of inducing any particular state upon matter in their immediate neighbourhood, otherwise indifferent. It is with this meaning that I purpose using it in the present paper.

2. Certain effects of the induction of electrical currents have already been recognized and described: as those of magnetization; Ampère's experiments of bringing a copper disc near to a flat spiral; his repetition with electromagnets of Arago's extraordinary experiments, and perhaps a few others. Still it appeared unlikely that these could be all the effects which induction by currents could produce; especially as, upon dispensing with iron, almost the whole of them disappear, whilst yet as infinity of bodies, exhibiting definite phenomena of induction with electricity of tension, still remain to be acted upon by the unduction of electricity in motion.

3. Further: Whether Ampère's beautiful theory were adopted, or any other, or whatever reservation were mentally made, still it appeared very extraordinary, that as every electric current was accompanied by a corresponding intensity of magnetic action at right angles to the current, good conductors of electricity, when placed within the sphere of this action, should not have any current induced through them, or some sensible effect produced equivalent in force to such a current.

4. These considerations, with their consequence, the hope of obtaining electricity from ordinary magnetism, have stimulated me at various times to investigate experimentally the inductive effect of electric currents. I lately arrived at positive results; and not only had my hopes fulfilled, but obtained a key which appeared to me to open out a full explanation of Arago's magnetic phenomena, and also to discover a new state, which may probably have great influence in some of the most important effects of electric currents.

5. These results I purpose describing, not as they were obtained, but such a manner as to give the most concise view of the whole.

このように Michael Faraday の電磁誘導の発見の説明が始まっている。この小節は 1831 年に Faraday が発表した論文の一部であって、彼の "Experimental Researches in Electricity" (1839, London) からの引用である。この論文には続いて 12 以上の実験の記述がある。これらの実験によって Faraday は磁気作用による電気の効果の発生の本質的様相に光明をもたらしたのである。

Faraday は "Electricity of Tension" が静電電荷のこと表し、1. での Induction を第 3 章で勉強した電荷が存在すると付近の導体上では電荷の再配置が引き起こされるという意味に使っている。Faraday はどうして電流が付近の導体中に電流を引き起こさないことに疑問を持った。

電流による磁場の生成は Oersted の発見の後、徹底的に研究された。使われた電流の電源は Volta 電池であり、最も感度のよい電流の測定器は Galvanometer(検流計)であった。この測定器は2つのコイルの間に方位磁針のように一点で回転する磁化した針もしくは弱いリボンで吊された磁化した針からできている。ときにはもう一本の磁針を最初の磁針にしっかり結びつけてコイルの外側において地磁気の影響を打ち消すように使われた(FIGURE 7.1a)。

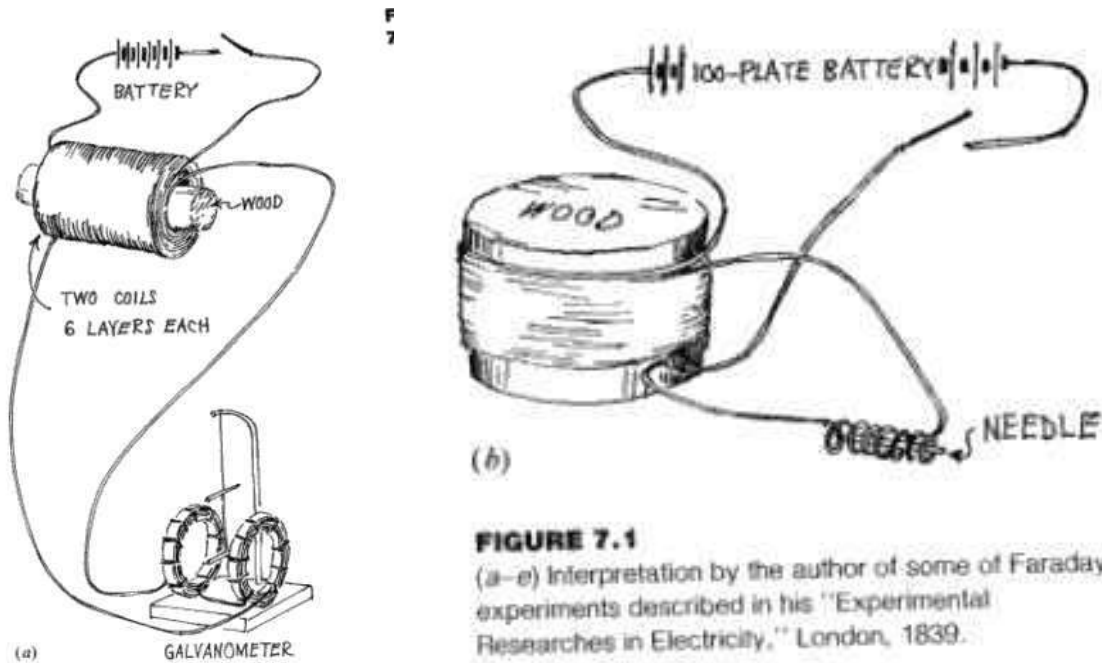


FIGURE 7.1
 (a-e) Interpretation by the author of some of Faraday's experiments described in his "Experimental Researches in Electricity," London, 1839.

Faraday の誘導の実験のスケッチを FIGURE 7.1(b) から (e) に描いた。諸君は彼が研究を進める際に見せた機敏さや、証拠を集めるときの油断の無さ、そして心の広さを認めるために実験科学の古典となっている Faraday 自身による説明を詠むべきである。

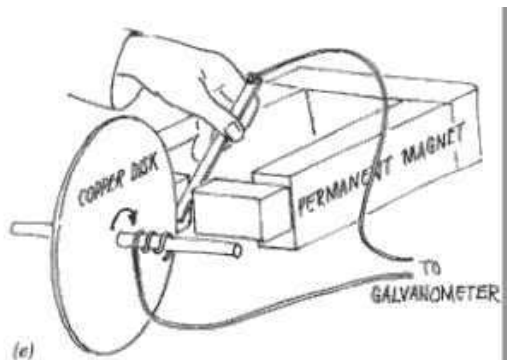
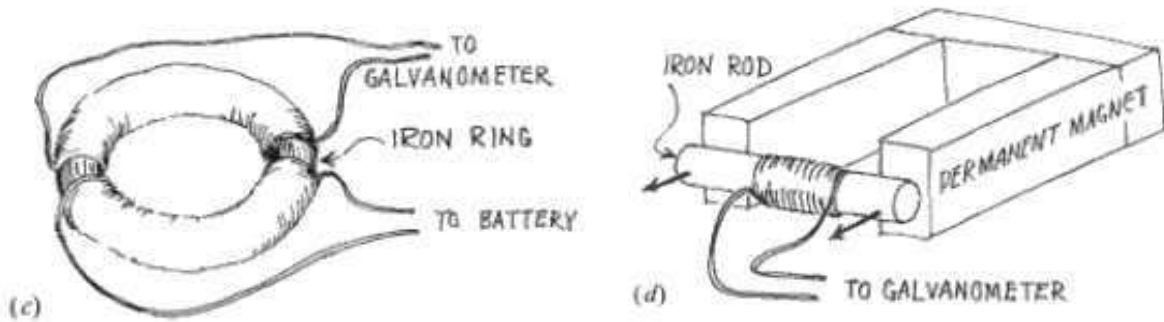


FIGURE 7.1
(Continued)

初めのうち Faraday は定常電流は周囲の回路に何の効果も生み出さないことを不思議に思った。色々なコイルを作って実験した。FIGURE 7.1a はその一例であるが、2つの導体を巻き、間に布や紙の絶縁体の仕切りを入れて導体同士が非常に近づくようにして、片方の導体に検流計を接続した回路を作った。他方の導体には電池をつなぎ、強い電流を流したけれども検流計の針は振れなかった。

しかし、ある実験を行っているとき、電流の流れ始めに針がかすかに振れたことに気づいた。また、電流を切った際にも針が振れるのに気づいた。

これを追求した結果、定常電流ではなく時間的に変化する電流が導体に流れるとき誘導現象がおきることをまもなく確立することができた。

ここでの Faraday の耀ける実験戦略の一つが磁化されていない鋼の針を小さなコイルの中に入れたもので検流計を置き換えたことであった (FIGURE 7.1b)。彼は検流計は短いパルス電流には適さないとわかったのでこのような工夫をしたのであった。

電流が流れ始めたとき、誘導されたパルス電流によって鋼の針が磁化し、電流を切るときには誘導される電流によって針が逆向きに磁化することを発見した。

Faraday による別の実験の記録を見よう。

In the preceding experiments the wires were placed near to each other, and the contact

of the inducing one with the battery made when the inductive effect was required; but as the particular action might be supposed to be exerted only at the moments of making and breaking contact, the induction was produced in another way. Several feet of copper wire were stretched in wide zigzag forms, representing the letter W, on one surface of broad board; a second wire was stretched in precisely similar forms on a second board, so that when brought near the first, the wires should everywhere touch, except that a sheet of thick paper was interposed. One of these wires was connected with the galvanometer, and the other with a voltaic battery. The first wire was moved towards the second, and as it approached, the needle was deflected. Being removed, the needle was deflected in the opposite direction. By first making the wires approach and then recede, simultaneously with the vibration of the needle, the latter soon became very extensive; but when the wires ceased to move from or towards each other, the galvanometer needle soon came to its usual position.

As the wires approximated, the induced current was in the *contrary* direction to the inducing current. As the wires receded, the induced current was in the *same* direction as the inducing current. When the wires remained stationary, there was no induced current.

この章では Faraday がこれらの実験でさぐった電磁相互作用を勉強する。現代の我々からみると誘導は磁場内を動いている電荷に働く力からの当然の帰結である。もうちょっと限定して言うと、既に知っている事柄から誘導の法則を導き出すことができると言える。

この道筋にしたがって進むと、またしても歴史的発展の順序からは離れてしまうが、(最初に引用した節の終りに Faraday 自身が述べている言葉を借りると) “to give the most concise view of the whole” 全部を最も簡潔に眺める視点にたつと言えよう。

7.2 A Conducting Rod Moving through A Uniform Magnetic Field (一様磁場内を動く導体棒)

FIGURE 7.2a は真直な導体棒がその延びている方向とは直交する向きに一定の速度 v で動いているところを示している。

この棒が動く空間には時間的に一定かつ空間的に一様な磁束密度が存在している。このような磁場は例えば図の領域全てをおおう大きなソレノイドで作ることができる。座標 x, y, z の系 F をこのソレノイドの静止系とする。導体棒がなければ、系 F では電場は無くただ一様な磁束密度 B があるのみである。

導体棒には力が働いたとき動く荷電粒子が含まれる。FIGURE 7.2b の電荷 q の粒子のように棒と共に動かされているどんな荷電粒子でも磁束密度 B の中を動くので力

$$\mathbf{f} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (7.1)$$

を感じる。

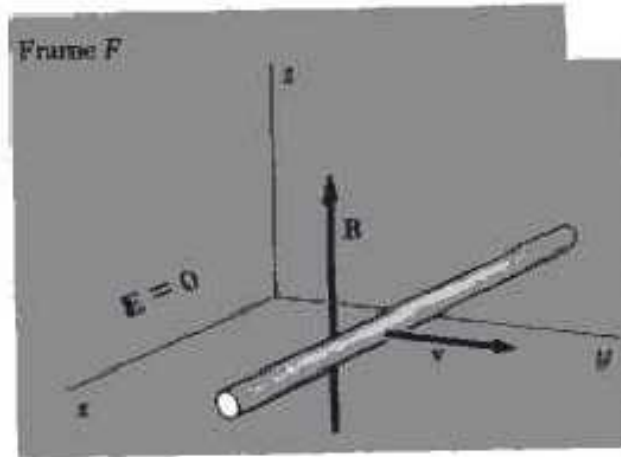


FIGURE 7.2 (a)

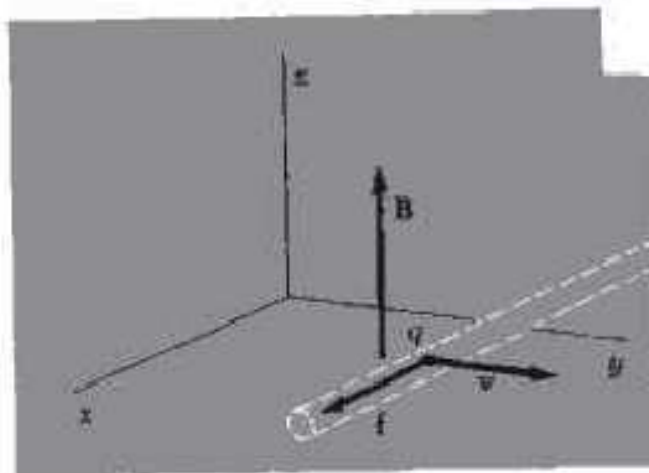


FIGURE 7.2 (b)

FIGURE 7.2に示された B と v の方向では q が正なら力は x 方向に働き、多くの金属導体中で実際に動く電荷である負に帯電している電子には負の x 方向に力が働く。負電荷が動けるか、正電荷が動けるか、あるいは両者とも動けるかには関係なく結論は同一となることがわかる。

導体棒が一定の速さで動いている定常状態になっているときは式 (7.1) での力 f は棒内の全てでこれと等しく反対向きの力とつりあわなければならない。このような力は導体棒内の電場からしか生じようがない。

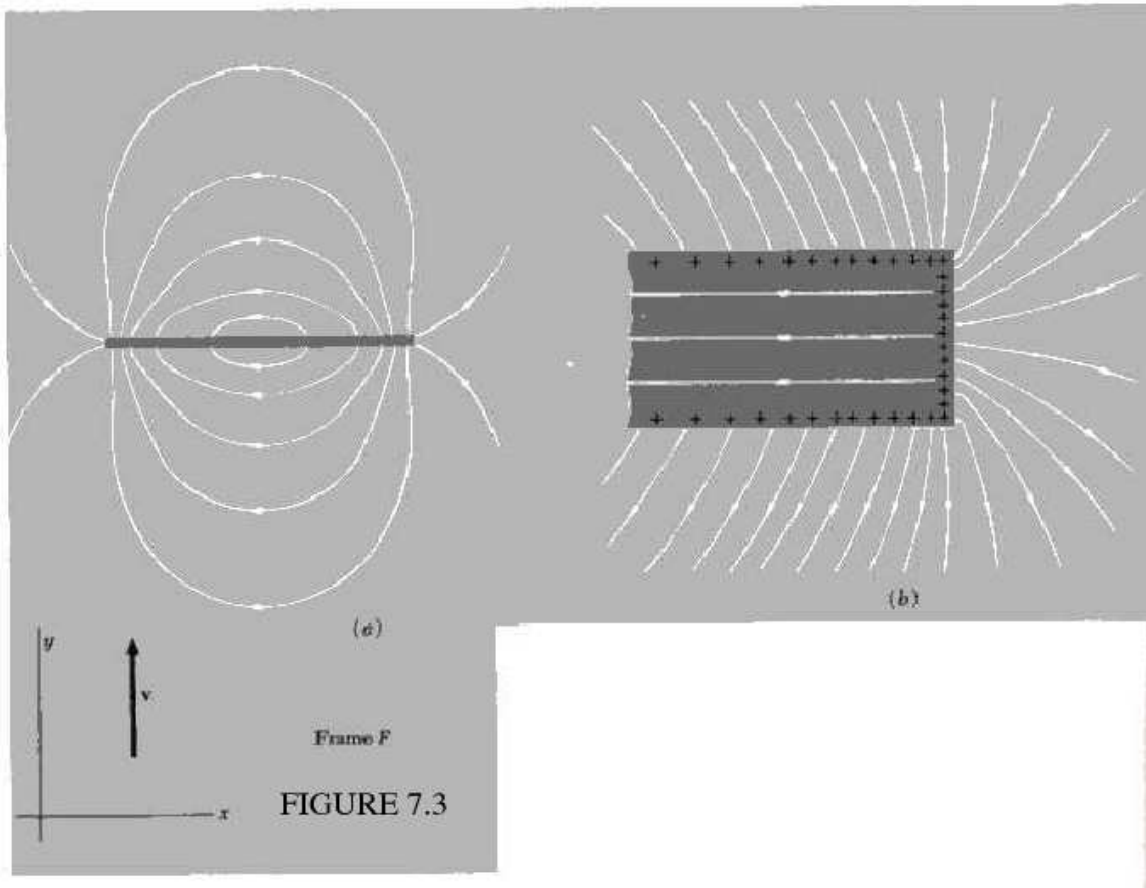
電場は次のようにして現われる: 力 f は負電荷を棒の一方の端 (FIGURE 7.2a, b では図の奥の方、向かって右端) に押し、もう一方の端 (図の手前の方、向かって左端) に正電荷

を行かせる。こうやって引き離された正負電荷自身による電場 E が導体棒の内部のどこでも

$$q\mathbf{E} = -\mathbf{f} \quad (7.2)$$

となるまで電荷の移動は続く。

最終的な電荷分布は棒の中側だけではなく、棒の外側にも電場を作る。外側での電場は離れた正電荷と負電荷が作る電場と似ている。電荷は棒の両端に完全に集中するわけではなく、棒に沿って分布するので違いはある。外側の電場の概略が FIGURE 7.3a である。FIGURE 7.3b は棒の正電荷がたまっている方の端の拡大図であり、導体表面上の電荷分布と導体内外部の電気力線の概略を示している。これが系 F でのある瞬間での様子である。



この系を導体棒と共に動く系 F' からみてみよう。棒をしばらく無視すると系 F' では FIGURE 7.2c に示したように磁束密度 B' (v が小さいときは B と大差は無い) および前章の電磁場の変換式の節の特別な場合に考えた式から得られる一様な電場

$$E' = -v' \times B' = v \times B' \quad (7.3)$$

が存在する。

この系に導体棒をあたえるとは、静止している導体棒を一様な電場の中に置くということである。その結果、導体棒の内側の電場をゼロにするような電荷の再配置が導体棒表面で生ずる。磁束密度 B' は静止している電荷には何の影響もおよぼさない。

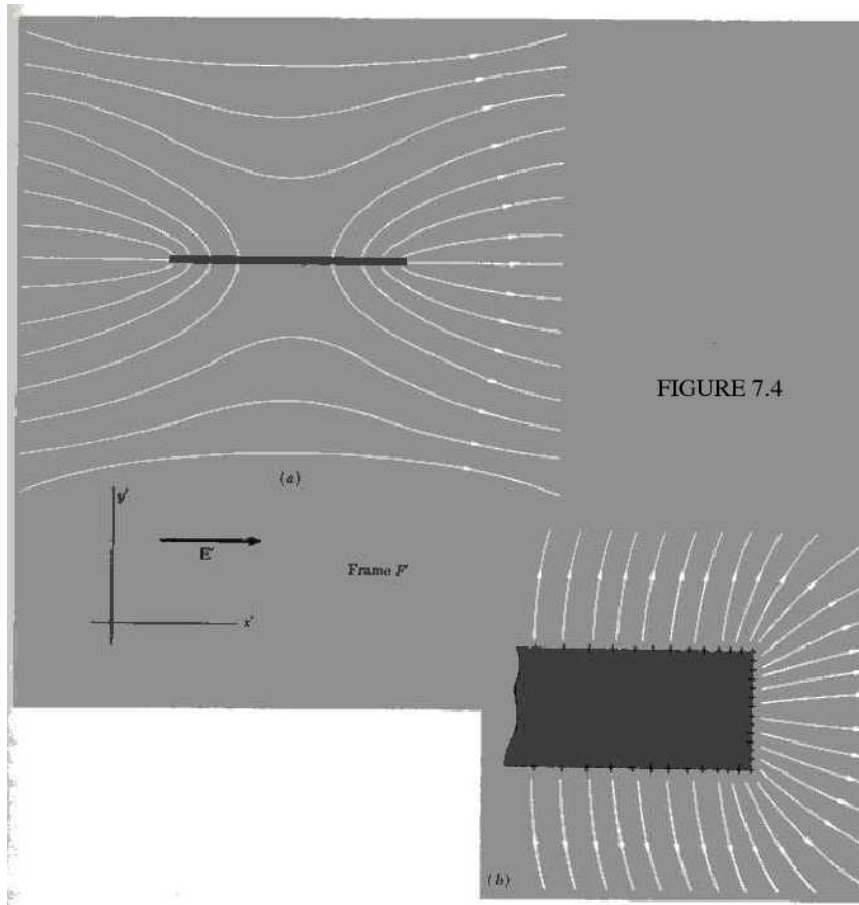


FIGURE 7.4a は系 F' での電気力線を示す図と、棒の端の拡大図である。FIGURE 7.4b では導体棒の中側での電場がゼロであることを示している。

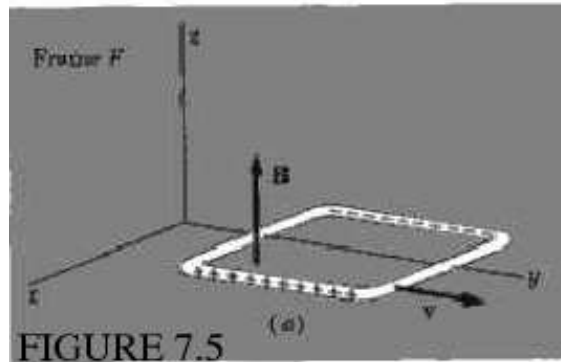
Lorentz 収縮 (v/c の 2 次の効果である。) を除くと系 F でのある時刻における電荷分布を示す FIGURE 7.3b は系 F' で見られるのと一緒である。電場の様子は F と F' では異なる。何故なら FIGURE 7.3 の電場は表面電荷の作る電場だけであるが、一方 FIGURE 7.4 の電場は表面電荷分布の作る電場と系 F' で存在する一様な電場の和であるからである。

系 F での観測者は”棒の内側では電場 $\mathbf{E} = \mathbf{v} \times \mathbf{B}$ が現われてしまった。これが電荷 q を棒に沿って動かす力 $q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ とちょうどつりあう力 $q\mathbf{E} = -q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ を電荷に働かせている。”と言う。

系 F' での観測者は”棒の内側では電場はない。また、ここには一様な磁束密度があるけれど、電荷が動いていないので力は存在しない。”と言う。どちらの説明も正しい。

7.3 A Loop Moving through A Nonuniform Magnetic Field (非一様磁場内を動くループ)

FIGURE 7.5で示したように導線で四角いループを作り一様磁束密度 \mathbf{B} 内を一定の速度で動かしたとき何がおこるだろうか。



この問に答えるためには系 F' を採用してこのループを一様な電場の中に置いたらどうなるかを考えるだけで良いだろう。明らかに長方形の相対する2辺に電荷が現われるだけである。

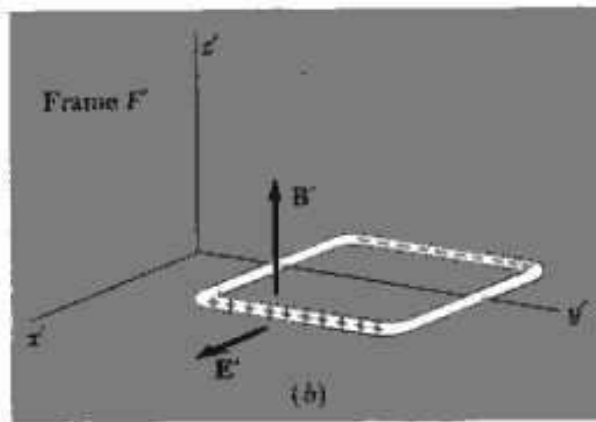


FIGURE 7.5
(a) Here the wire loop is moving in a uniform magnetic field \mathbf{B} . (b) Observed in the frame F' , in which the loop is at rest, the fields are \mathbf{B}' and \mathbf{E}' .

だが系 F での磁束密度 \mathbf{B} が時間的には変化しないが空間的に非一様であると考えよう。これを表すために FIGURE 7.6 では短いソレノイドで作った \mathbf{B} を描いておこう。

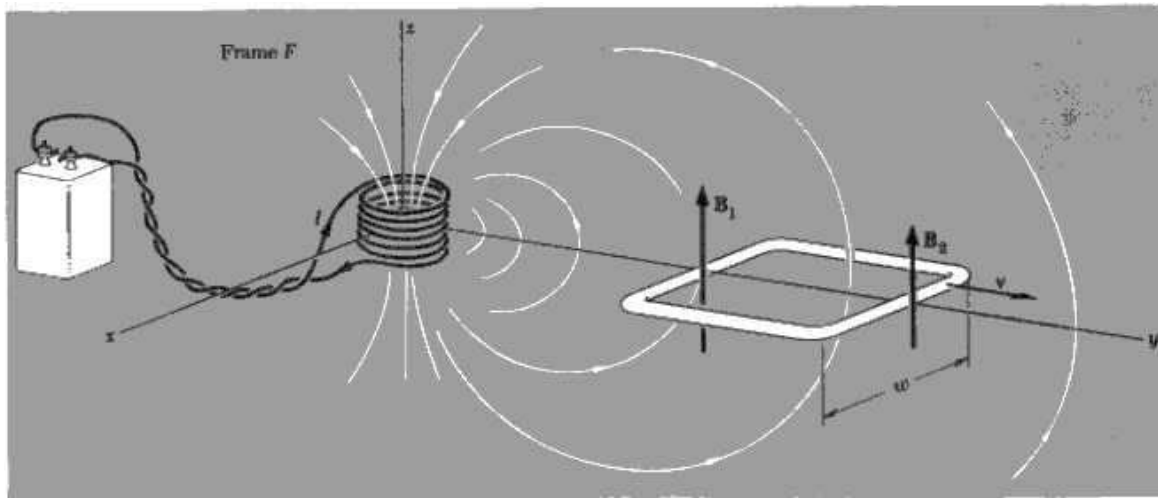


FIGURE 7.6

Here the field \mathbf{B} , observed in F , is not uniform. It varies in both direction and magnitude from place to place.

inition of emf to include any influence that causes charge to circulate

定電流を供給する電池につながれたソレノイドは系 F の原点に固定されている。(系 F には電場がないとしたが、本当に磁場を作るために抵抗のあるソレノイドを使うと、電池とこの回路には電場が存在する。しかし、この電場は今の問題には無関係なので無視する。あるいはソレノイドと電池全体を電荷がゼロであることを確かめた金属の箱の中におさめることもできる。)

系 F の y 方向に速さ v でこのループが動いているとき、ある時刻 t において長方形の左辺上での磁束密度の大きさが B_1 、右辺上での磁束密度の大きさが B_2 であったとしよう。ループ上にある電荷 q に働く力を \mathbf{f} と表し、 \mathbf{f} のループ全周にわたる線積分を計算する: 運動方向に平行な 2 辺上では \mathbf{f} は微小線素 $d\mathbf{s}$ と直交しているから積分への寄与はゼロである。

他の 2 辺からの寄与は、各辺の長さが w だから

$$\oint \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} = qv(B_1 - B_2)w \quad (7.4)$$

である。

もし短時間で q がループを一周させられて、この短時間内にはこのループの位置が変わらなければ上の線積分は \mathbf{f} によってなされた仕事をあたえる。

単位電荷あたりの仕事は

$$\frac{1}{q} \oint \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s}$$

である。これを *electromotive force* (起電力) とよぶ。記号 \mathcal{E} を用い、略して emf という。

SI系での単位はVである。

$$\mathcal{E} = \frac{1}{q} \oint \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} \quad (7.5)$$

electromotive force という言葉は以前に第4章10節ででてきた。そのときは Volta 電池を含む回路で電荷を動かすのに必要な単位電荷あたりの仕事として定義した。ここで emf の定義を拡張して電荷をある閉曲線に沿って周回させるあらゆる力まで含ませることにした。

たまたま経路が抵抗 R をもつ回路なら、emf \mathcal{E} は Ohm の法則にしたがって電流を流す： $I = \mathcal{E}/R$ 。

今考えている特別な例では \mathbf{f} は磁場内を動いている電荷に働く力であり、 \mathcal{E} は

$$\mathcal{E} = vw(B_1 - B_2) \quad (7.6)$$

なる大きさをもつ。

この emf はループを通る**磁束の時間的変化率**と簡単な関係にある。

ループを通る磁束とは、このループを縁とする面上での \mathbf{B} の面積分を意味する。

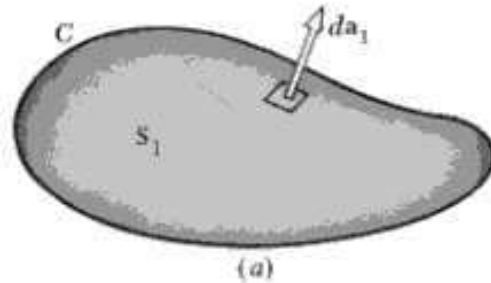
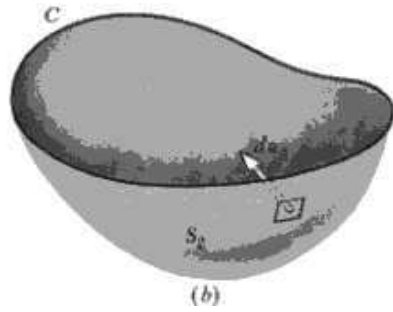


FIGURE 7.7a の閉曲線あるいはループ C を通る磁束 Φ は S_1 上での \mathbf{B} の面積分であたえらる：

$$\Phi_{S_1} = \int_{S_1} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a}_1 \quad (7.7)$$

C を縁とする面は無数にある。FIGURE 7.7b には別の面 S_2 が描かれている。



磁束を計算するためには特に面を指定しなくても良い。 $\int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a}$ はあらゆる面に対し同一の値をあたえるから差は全く生じない。この点について理由を考えてみよう。

S_2 を通る磁束は $\int_{S_2} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a}_2$ である。vector $d\mathbf{a}_2$ は S_2 面の下から上へ突き出ているようにとったことに注意せよ。そうすれば S_1 の面の選び方と同じになる。 C を通る正味の磁束が上向きになるとき磁束は正の値となる。

$$\Phi_{S_2} = \int_{S_2} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a}_2 \quad (7.8)$$

第6章の2節で磁束密度の発散はゼロであることを学んだ:

$$\text{div } \mathbf{B} = 0$$

Gauss の定理から S が任意の閉曲面 (風船形) で、 V をその中の体積とすると

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = \int_V \text{div } \mathbf{B} dv = 0 \quad (7.9)$$

となる。

これを S_1 と S_2 とをくっつけてできる FIGURE 7.7c のティンパニーのような閉曲面にしよう。

S_2 上での外向き法線は C を通る磁束を計算するのに使った vector $d\mathbf{a}_2$ とは反対向きである。故に

$$0 = \oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = \oint_{S_1} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a}_1 + \oint_{S_2} \mathbf{B} \cdot (-d\mathbf{a}_2)$$

つまり

$$\int_{S_1} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a}_1 = \int_{S_2} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a}_2 \quad (7.10)$$

である。

これは C を通る磁束を計算する際、どの面を使おうと構わないことを意味している。

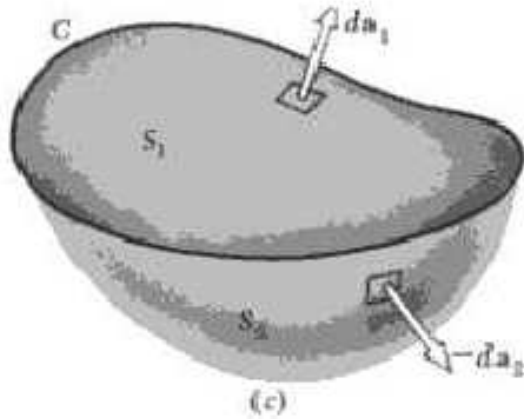
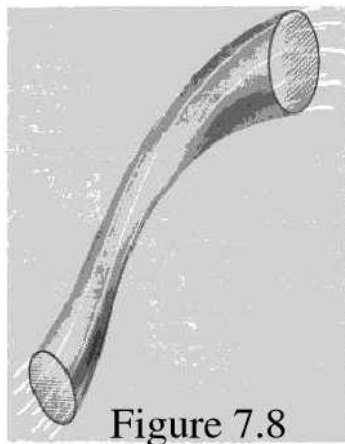


FIGURE 7.7

もし $\text{div } \mathbf{B} = 0$ が磁束に関して或る種の空間的保存則を意味することが理解できれば次のことは良くわかる。
 どんな領域でも磁束は出た数と同じだけ入って来る。



磁束管 (FIGURE 7.8) は磁力線が接平面上にのっている点の集合の作る面である。この面を通り抜ける磁束はゼロである。ちょうど電話のケーブルが電話線の束を含んでいるように磁束管は多数の磁束を含むものとも考えることもできる。
 一本の磁束管をぴったり取り囲む閉曲線を描くとどんな閉曲線でも通る磁束は同じ数になる。

電場について言うと $\text{div } \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0$ であるので、電荷がゼロの領域に対してのみ電場 \mathbf{E} に関して同じことが言える。

磁束密度はどこでもいつでも発散がゼロである。

動いている四角いループに戻り、ループを通る磁束の変化率を求めよう。

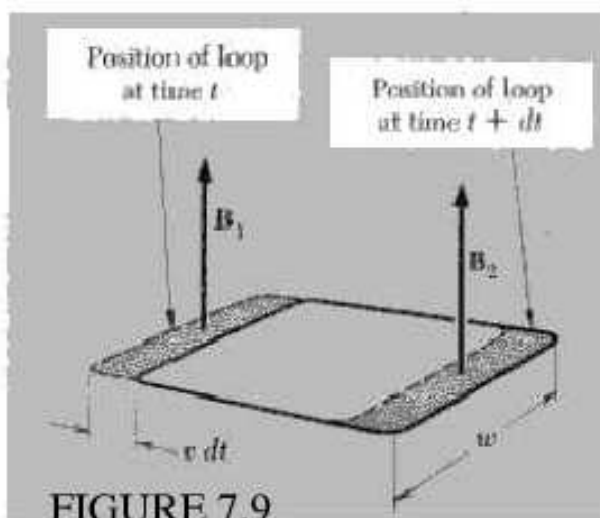
時間が dt だけ経過するとループは vdt だけ動く。このことによりループを通る磁束について2ヶ所で変化がおこる。全磁束はループの張る面上での面積分 $\int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a}$ である。FIGURE 7.9からわかるように磁束は右側の部分で $B_2 w v dt$ だけ増えるが、左側の部分で $B_1 w v dt$ だけ減る。よってこの時間 dt でのループを通る磁束の変化 $d\Phi$ は

$$d\Phi = -(B_1 - B_2) w v dt \quad (7.11)$$

となる。emfの表式とこの磁束の変化の表式を比べると、この場合のemfは

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} \quad (7.12)$$

となることがわかる。



一般にどんな形のループに関してもこの関係が動き方に関係なく成立することを示すことができる。

FIGURE 7.10のループ C が時刻 t で C_1 の位置にあり、時刻 $t + dt$ には C_2 の位置に動いているものとする。ループ上のある線素 $d\mathbf{s}$ は速度 \mathbf{v} でその新しい位置に移ったものとしよう。

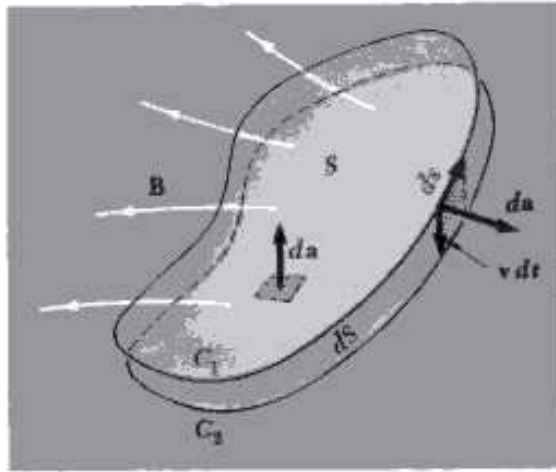


FIGURE 7.10
The loop moves from position C_1 to position C_2 in time dt .

時刻 t でループの張る面を S と表す。この時刻でのループを通る磁束は

$$\Phi(t) = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} \quad (7.13)$$

である。

ここでの観測を行っている系では静止している sources から磁束密度 \mathbf{B} が作られていて、この系での任意の点で \mathbf{B} は時間的な変化はしない。

時刻 $t + dt$ ではこのループの張る面は空間に固定された始めの面 S に縁 dS だけ増加させられている (ループを通る磁束を計算するのにループ上に張られた任意の面を使うことができたことを思い出せ。)。よって

$$\Phi(t + dt) = \int_{S+dS} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = \Phi(t) + \int_{dS} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} \quad (7.14)$$

故に、時間 dt での磁束の変化はちょうど縁 dS を通る磁束 $\int_{dS} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a}$ である。

縁上での微小面積要素 $d\mathbf{a}$ は $(\mathbf{v} dt) \times d\mathbf{s}$ と表せるので面 dS 上の面積分は閉曲線 C 上の線積分として書ける:

$$d\Phi = \int_{dS} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = \oint_C \mathbf{B} \cdot [(\mathbf{v} dt) \times d\mathbf{s}] \quad (7.15)$$

dt は積分に関しては定数だから取りだしてしまうと

$$\frac{d\Phi}{dt} = \oint_C \mathbf{B} \cdot (\mathbf{v} \times d\mathbf{s}) \quad (7.16)$$

どんな3つの vectors でも3重積 $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = -(\mathbf{b} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{c}$ をみたすので、この式は書き直せて

$$\frac{d\Phi}{dt} = - \oint_C (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{s} \quad (7.17)$$

を得る。

ループに沿って動かされる電荷 q に働く力は $q(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$ である。単位電荷あたりのこの力をループに沿って周回線積分して得られる emf は

$$\mathcal{E} = \oint_C (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{s} \quad (7.18)$$

である。

(7.17) 式と (7.18) 式を比べると、既に得た (7.12) 式を得るが、任意の形および運動状態のループに対し (7.12) 式が成立する (ここでの導出に際しループの全ての点と同じ \mathbf{v} であるとは仮定しなかったことに注意せよ)。

まとめると f/q なる単位電荷あたりの力を運動しているループの上で周回線積分した emf はこのループを通る磁束の時間的変化率の逆符号に等しい。

線積分の向きと磁束の正方向とは右ネジ則で関連づけられている。例えば FIGURE 7.6 ではループを通る磁束は正ではあるが減少していく。(7.12) 式に現われる-符号を考えに入れると右ネジ則からループ上の正電荷を反時計回りに動かすように emf が生じていることがわかる (FIGURE 7.11)。

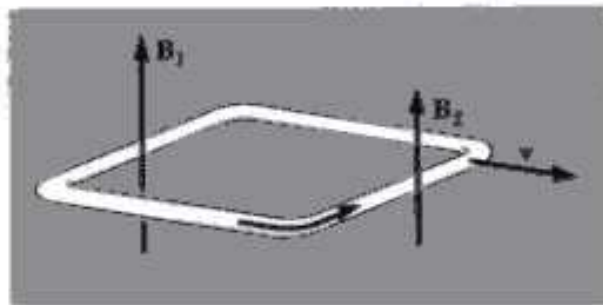


FIGURE 7.11
The flux through the loop is upward and is decreasing in magnitude as time goes on. The arrow shows the direction of the electromotive force, that is, the direction in which positive charge tends to be driven.

この符号と方向の関係を見るのに良い方法がある。FIGURE 7.11 に示されたように電流が誘導起電力によって流されるとき、この電流自身も磁束の変化を妨げる方向のループを通る磁束を作る。

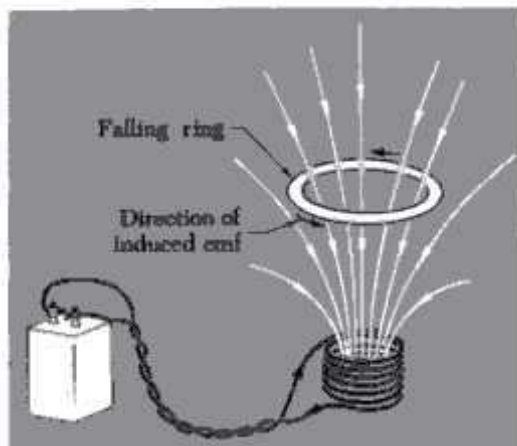
このことは符号と方向に関する便宜的理解ではなく、物理的には本質的なことがらである。系の変化に逆らう傾向の現われである。この内容を伝統的に Lenz(レンツ)の法則と

いう。

Lenz の法則のもう一つの例が FIGURE 7.12 に描かれている。

FIGURE 7.12

As the ring falls, the downward flux through the ring is increasing. Lenz's law tells us that the induced emf will be in the direction indicated by the arrows, for that is the direction in which current must flow to produce upward flux through the ring. The system reacts so as to oppose the change that is occurring.



コイルによる磁場中を導体円輪が落下している。円輪を通る磁束は下向きで落下とともに増大していく。このような磁束の変化を妨げるには上向きの磁束が新たに必要になる。この磁束を作るように矢印の方向の電流が円輪に流れるようになる。Lenz の法則が誘導起電力はこういう方向の電流が流れるように生じていることを教えてくれる。

emfが FIGURE 7.6 や 7.11 に示されたような電流をループ中に作る時、ループの抵抗により導線中でエネルギーが消費される。では何がこのエネルギーを補填供給しているのだろうか。

この問題に答えるために電流が FIGURE 7.11 の矢印でループを流れるとき、この電流に働く力を考えよう。

長方形の右側の導体上での磁束密度は B_2 であって、この導体は右向きの力を感じず。左側の導体は B_1 中にあり左向きに押す力を感じず。 B_1 の方が B_2 より大きいので、ループに働く正味の力は左向きとなり、運動方向とは逆向きである。よってこのループを一定の速度で運動させるには外部から仕事をしなければならず、こうして投げられたエネルギーが最後には導線中に発生する熱となるのである。

もしも Lenz の法則が成り立たなくなり、あるいはループに働く力がループの動く方向に働くならばどうなってしまうか想像してみよ。

電機機械や電気器具によく使われる道具として磁場中で回転しているループあるいはコイルがある。 FIGURE 7.13 にこれまで勉強して来たことを使ってみよう。図は殆んど

一様な磁場中を一定の速さで回転している一巻のループを示している。機械的なシャフト、ベアリング、駆動装置等は図には描かれていない。

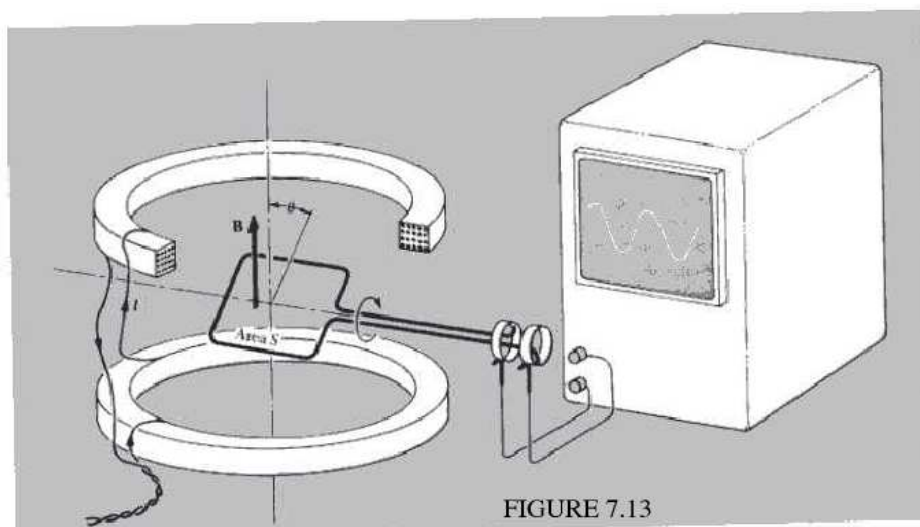


FIGURE 7.13

固定された2つのコイルが B を作っている。
 ループが角速度 ω [rad/s] で回っているとしよう。任意の時刻 t でのループの位置が角 θ で指定されるなら、 $\theta = \omega t + \alpha$ である (ここで α は $t = 0$ でのループの位置を表す角度である)。

ループ面に直交する B の成分は $B \sin \theta$ である。よって時刻 t でループを通る磁束は

$$\Phi(t) = SB \sin(\omega t + \alpha) \quad (7.19)$$

である。ここで S はループの面積である。

このとき誘導起電力は

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = -SB\omega \cos(\omega t + \alpha) \quad (7.20)$$

となる。

ループが FIGURE 7.13 のように接続リングで外部導線とつながれていれば正弦波的交流電圧を測定することができよう。

この装置がどう働くか、数値をあたってみよう。FIGURE 7.13 でのループの面積が 80 cm^2 、磁束密度 B が 0.005 T でループの回転速度が毎秒 30 回転であるとする。このとき、 $\omega = 2\pi \times 30$ つまり 188 rad/s である。

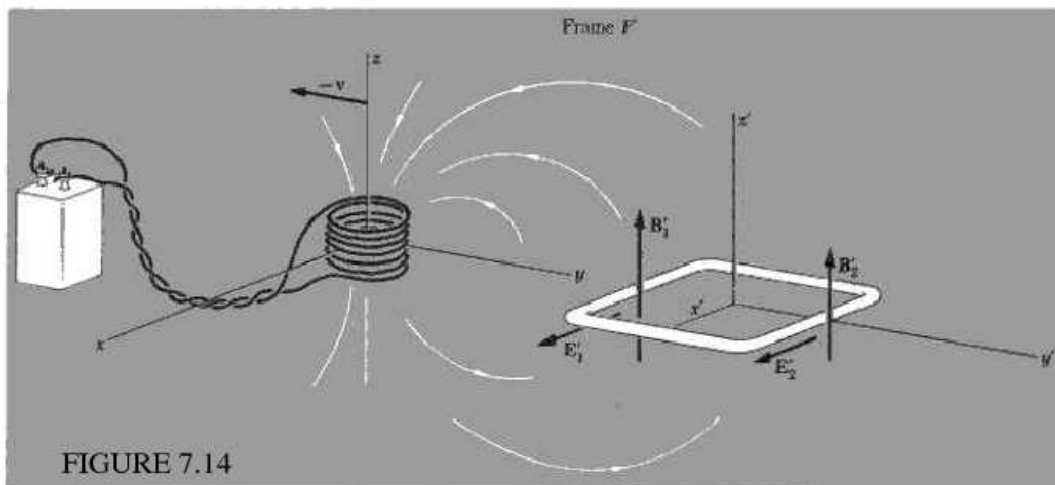
emf の振幅つまりループ中に誘導される振動起電力の最大値は

$$\mathcal{E}_0 = SB\omega = (80 \times 10^{-4} \text{ m}^2)(5 \times 10^{-3} \text{ T})(188 \text{ s}^{-1}) = 7.52 \times 10^{-3} \text{ V} \quad (7.21)$$

となる。

7.4 A Stationary Loop with The Field Source Moving (動く発生源による場に静止しているループ)

FIGURE 7.6 の事象をループと共に動いている系 F' で記述することができる。そうしても物理が変わるわけではなく、記述に用いる言葉が変わるだけである。系 F' の座標は x', y', z' であるが、ループは静止している。



系 F で静止していたコイルと電池は速度 $\mathbf{v}' = -\mathbf{v}$ で $-y'$ 方向に動いている。時刻 t' でのループの2つの端で測った磁束密度を \mathbf{B}'_1 と \mathbf{B}'_2 とする。系 F' ではこの両端の辺上に電場が存在する。

$$\begin{aligned} \mathbf{E}'_1 &= -\mathbf{v}' \times \mathbf{B}'_1 = \mathbf{v} \times \mathbf{B}'_1 \\ \mathbf{E}'_2 &= -\mathbf{v}' \times \mathbf{B}'_2 = \mathbf{v} \times \mathbf{B}'_2 \end{aligned} \quad (7.22)$$

となっている。

系 F' の観測者にとってこれは本当の電場であり、静電場ではない。つまり任意の閉曲線に沿う \mathbf{E}' の周回線積分はゼロにはならない。実際この長方形ループを一周する線積分は

$$\oint \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{s}' = wv(B'_1 - B'_2) \quad (7.23)$$

となる。

(11) 式の周回線積分はこの周回経路上の $\text{emf} \mathcal{E}'$ とよべる。もし荷電粒子がこの経路を一周するなら \mathcal{E}' はこの荷電粒子になされる仕事の単位電荷あたりの量である。 \mathcal{E}' はこのループを通る磁束の変化率と関係している。この関係を見るには、ループ自身は静止しているが**磁場の様相**は発生源の速度 $-\mathbf{v}$ で動いているのであることに注意すればよい。時

間隔 dt' でループの両端における磁束の得失が $d\Phi' = (B'_1 - B'_2)w(-v)dt'$ になっているから

$$\mathcal{E}' = -\frac{d\Phi'}{dt'} \quad (7.24)$$

と結論できる。

以下で \mathbf{B} の発生源が静止している系 F とループが静止している系 F' の2つの記述をまとめよう。

系 F での観測者は

”空間的には一様ではないが時間的に変動しない磁束密度がある。しかし電場はない。導線のループがこの磁場内を動いていてループ上の電荷には単位電荷あたり $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ [N] の力が働いている。このループ全体にわたる周回線積分が emf \mathcal{E} であって、 \mathcal{E} は $-d\Phi/dt$ に等しい。私の時計で測った時刻 t でのループが張る面 S 上の面積分 $\int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a}$ が磁束 Φ である。”

という。

系 F' での観測者は

”導線のループが静止している。そして電場だけが電荷を動かす。本当に電場 \mathbf{E}' がある。同時にかなり強い磁束密度 \mathbf{B}' を作る磁氣的物体が速度 $-v$ で動いていて電場が作られているように思われる。

この電場内に静止しているループをめぐる $\oint \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{s}$ はゼロではなく、このループを通る磁束の変化率の $-$ 倍に等しくなっている。私の時計で測った時刻 t' でのループが張る面上で測定できる \mathbf{B}' の値によって磁束 Φ' は $\int \mathbf{B}' \cdot d\mathbf{a}'$ なる面積分である。”

という。

この結論はこれまでのところ相対論的に正確である。 \mathbf{B} と \mathbf{B}' 、 t と t' 等の差を注意して使えば任意の速さ $v \leq c$ について成立する。もし $v \ll c$ なら v^2/c^2 は無視できて \mathbf{B}' は事実上 \mathbf{B} に等しくなるし、 t と t' の差もまた無視できる。

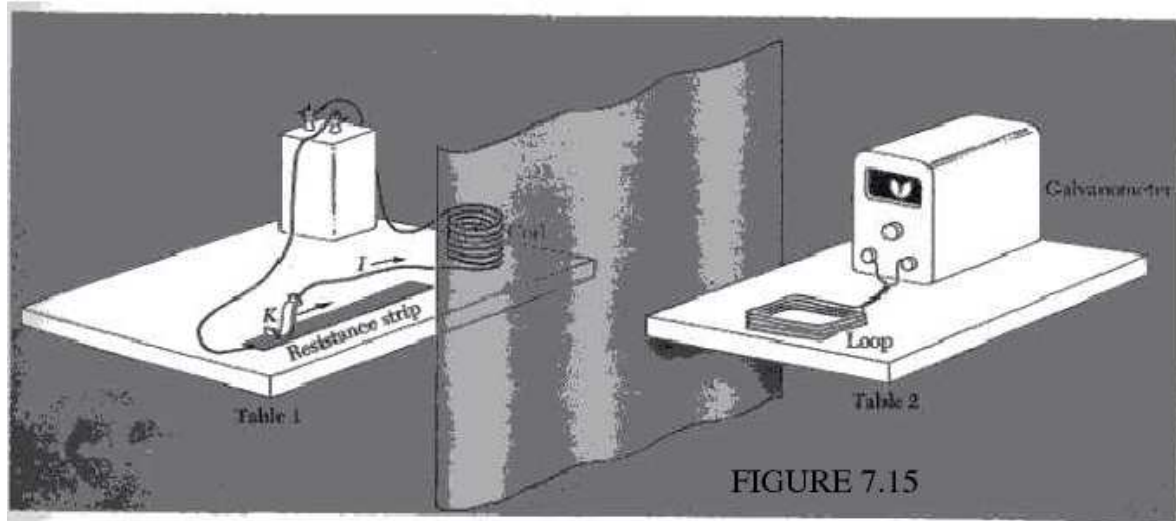
7.5 Universal Law of Induction (普遍的な電磁誘導の法則)

FIGURE 7.15 に示した装置を使って3つの実験を行う。

どちらの台も滑車にのって簡単に動かすことができる。幾重にも巻かれた四角いループに感度の良い検流計が接続されている。描かれた発生源では弱い磁場しかできないので、実際にはもっと改良が必要かもしれない。

実験 I コイルに電流を流した台1は静止させ、右向きに速さ v で台2を動かす。このとき検流計の針は振れる。前節でこれを分析した。

実験 II 台2を静止させたまま、コイルに電流を流した台1を速さ v で左向きに動かす。こ



のとき検流計の針は振れる。

台の速さが遅いときは実験 I と実験 II の等価性を Lorentz 不変性の一例として議論した。この 2 つの実験で検流計の針が振れるがこれはループを通る B による磁束の変化率と関係することはわかっている。

実験 III 2 つの台が静止しているがすべり抵抗の接点 K をすべらせてコイルの電流 I を変えよう。このようにしてループ面を通る B の磁束の減少率が実験 I と II での減少率と等しくすることができる。検流計の針は振れるか。

台 2 上のループだけを見ている観測者がこの近辺の磁束密度を時間と位置の関数として測っているときは実験 I と II と III を区別できない。このとき 2 つの台を暗幕で仕切ったと想像しよう。II と III の磁束密度や電場の配置には小さな差がありうるが一人の観測者が局所的な B を測っているだけでは暗幕の向うで何がおこっているかわからないので、どの実験を行っているかは決められない。

故に、もし検流計が実験 III で同じように振れなければある領域での磁束密度および電場が遠く離れた発生源の性質に依存することになる。

本質的に局所的性質が同じ 2 つの磁束密度は一方では $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} \neq 0$ なる電場を伴うが、他方では伴わないことになってしまう。

実験 III は I と II とに等価である。検流計の針は同じだけここでも振れる。

Faraday の行った諸々の実験はこの基本的事実を示した最初のものであった。観測される emf は B の作る磁束の時間変化率だけにより、他のものにはよらない。普遍的な関係式として Faraday の電磁誘導の法則を次のように述べることができる。

C が $x-y-z$ 座標空間に静止している閉曲線で、 S は C を張る面、 $\mathbf{B}(x, y, z)$ が時刻 t での (x, y, z) で測られる磁束密度であるとする。

$$\mathcal{E} = \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = -\frac{d\Phi}{dt} \quad (7.25)$$

微分演算子 vector である curl を使うと (7.25) 式ではなく微分形で Faraday の電磁誘導の法則を書き表せる。もし関係式

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} \quad (7.26)$$

が任意の曲線 C とこれを張る面 S について正しいなら、任意の点で

$$\text{curl } \mathbf{E} = -\frac{d\mathbf{B}}{dt} \quad (7.27)$$

であると主張することになる。

(7.26) 式から (7.27) 式を導くには C を一点のまわりに収縮させていくという普通のやり方を実行すれば良い; この一点は関数 \mathbf{B} の特異点ではない点をとる。この極限で C を張る面 \mathbf{a} の小片上の \mathbf{B} の変化は無視でき、表面積分は単に $\mathbf{B} \cdot \mathbf{a}$ に近づく。第2章で循環を用いて curl を定義したが、それを用いると小片が縮んで行くとき $\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$ が近づく極限は $\mathbf{a} \cdot \text{curl } \mathbf{E}$ である。

よって極限として

$$\mathbf{a} \cdot \text{curl } \mathbf{E} = -\frac{d}{dt}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{a}) = \mathbf{a} \cdot \left(-\frac{d\mathbf{B}}{dt}\right) \quad (7.28)$$

を得る。

これはどんな無限小 \mathbf{a} についても成立するので

$$\text{curl } \mathbf{E} = -\frac{d\mathbf{B}}{dt} \quad (7.29)$$

にならなければいけない。

\mathbf{B} は時間にも位置座標にも依存することを知っているので $d\mathbf{B}/dt$ のところで $\partial\mathbf{B}/\partial t$ と書こう。

こうして全く等価な電磁誘導の法則の2つの命題が得られた:

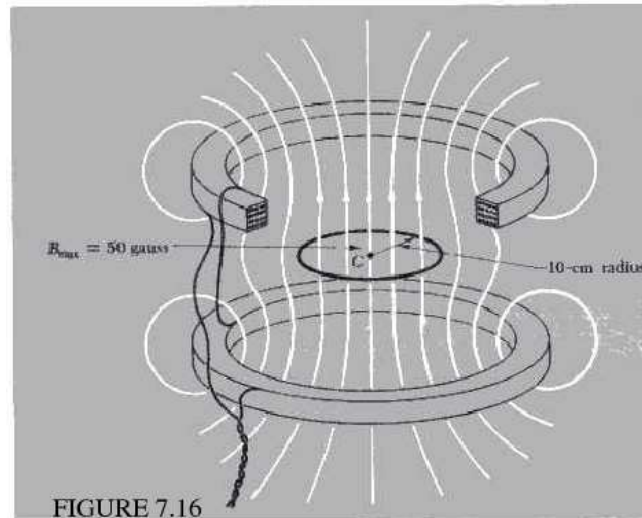
$$\begin{aligned} \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} &= -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} \\ \text{curl } \mathbf{E} &= -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} \end{aligned} \quad (7.30)$$

磁束 $\int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a}$ の単位は $\text{T} \cdot \text{m}^2$ である。これを weber(ウェーバー)と呼ぶ。1 weber = 1 は $\text{T} \cdot \text{m}^2$ である。

微分形式 $\text{curl } \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t$ なる場の関係式をみると先に指摘した局所性についてははっきりさせることができよう。

\mathbf{B} の時間変化が空間のその点での $\text{curl } \mathbf{E}$ を他のものによらず完全に決めてしまう。もちろん、この関係式が \mathbf{E} を完全に決めてしまうわけではなく、 $\text{curl } \mathbf{E} = 0$ となる任意の静電場を重ね合わせることができる。

具体例として FIGURE 7.13 のようなコイルに直流ではなく 60Hz(毎秒 60 サイクル) の交流電流を流したとしよう (FIGURE 7.16)。



電流および磁束密度は $\sin(2\pi \cdot 60t) = \sin 377t$ として変化する。電流の振幅は中心領域での磁束密度 \mathbf{B} の最大値が 50 gauss = 0.005 T に達するようなものであるとしよう。FIGURE 7.16 に示したような半径 10 cm の円周上に誘導される電場および emf を求めたい。この円周の中ではいつも \mathbf{B} が一様であると仮定しよう。

$$B = 0.005 \sin 377t \quad (7.32)$$

ループ C を通る磁束は

$$\Phi = \pi r^2 B = \pi \times 0.1^2 \times 0.005 \sin 377t = 1.57 \times 10^{-4} \sin 377t \text{ [T} \cdot \text{m}^2] \quad (7.33)$$

emf を求めると

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = -377 \times 1.57 \times 10^{-4} \cos 377t = -0.059 \cos 377t \text{ [V]} \quad (7.34)$$

\mathcal{E} の最大値は 59 mV である。方向は Lenz の法則から定まる。

Φ と \mathcal{E} の時間変化を FIGURE 7.17 に示した。

電場はどうなっているだろうか。 $\text{curl } \mathbf{E}$ だけから普通は \mathbf{E} はわからない。しかし今の経路 C は系の中心を巡る円周である。円周上にほかの発生源による電場がなければ、 \mathbf{E}

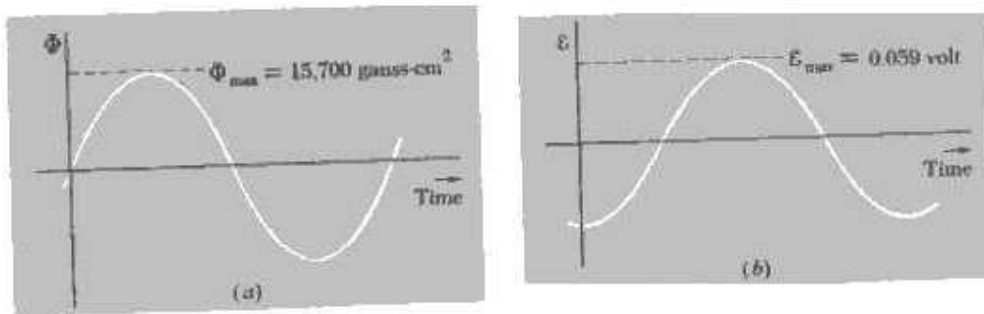


FIGURE 7.17

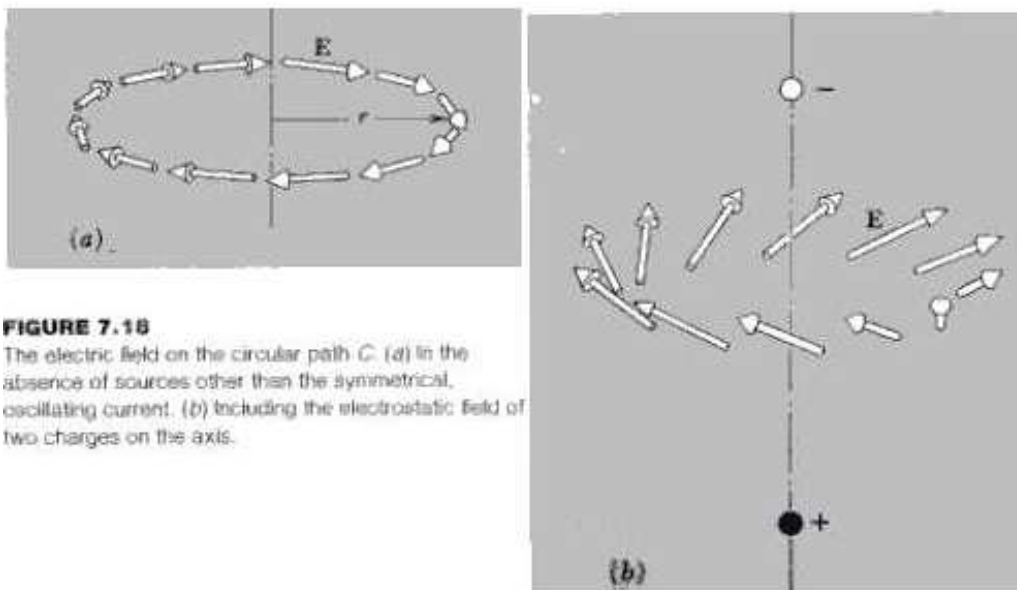


FIGURE 7.18
 The electric field on the circular path C : (a) in the absence of sources other than the symmetrical, oscillating current. (b) including the electrostatic field of two charges on the axis.

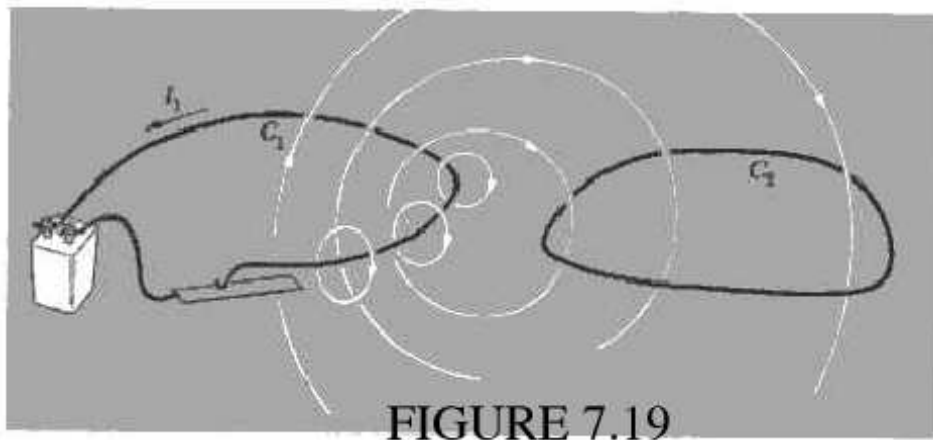
は円の面上にのっけていて、その大きさは一定である。

このとき $\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = 2\pi r E = \mathcal{E}$ で \mathcal{E} はもう求めておいたから電場の大きさは自明となる。今の場合、円周上の電場はある瞬間には FIGURE 7.18a のようになることがある。

もし電場の発生源が他にあれば、様子は全くことなる。例えば FIGURE 7.18b で示したように軸上に正負の電荷があるようなときは円周近辺の電場はこの2つの電荷による静電場と誘導された電場の重ね合わせになる。

7.6 Mutual Inductance (相互誘導)

2つの円周、すなわちループ C_1 と C_2 が決まった位置に固定されている (FIGURE 7.19)。



電池や可変抵抗で大きさの調節できる電流 I_1 が回路 C_1 に流れている。

C_1 に流れている電流が I_1 という一定の値のままのとき作られる磁場の磁束密度を $\mathbf{B}_1(x, y, z)$ とする。そして回路 C_2 を通る \mathbf{B}_1 の束を Φ_{21} と表そう。

$$\Phi_{21} = \int_{S_2} \mathbf{B}_1 \cdot d\mathbf{a}_2 \quad (7.35)$$

ここで S_2 はループ C_2 を張る面とする。

Φ_{21} は I_1 に比例する。その係数は固定された2つの回路の形と位置で決まる。

$$\frac{\Phi_{21}}{I_1} = \text{const} \quad (7.36)$$

I_1 が時間と共に変わるとき、その変化が非常にゆっくりならば C_2 付近のどんな点でも \mathbf{B}_1 は C_1 の電流 I_1 とは定常電流の場合と同じように関係するだろう (どうしてこんな制限が必要になるかをみるには、 C_1 と C_2 が 10m 離れていて、10ns もの短時間に C_1 での電流の値が2倍にもなるような急激な変化の場合を想像せよ。)。磁束 Φ_{21} の変化率は I_1

の変化率に比例する。回路 C_2 に誘導される emf は

$$\mathcal{E}_{21} = -\text{const} \frac{dI_1}{dt} \quad (7.37)$$

である。この const は (7.36) 式の const と同一である。これを M_{21} と表すと (7.37) 式は次のように書ける:

$$\mathcal{E}_{21} = -M_{21} \frac{dI_1}{dt} \quad (7.38)$$

この定数 M_{21} を *Mutual Inductance*(相互インダクタンス) という。この値はループ同士の幾何学の幾何学で決まる。単位は H(ヘンリー) であり、 $H = V/A = \Omega \cdot s$ である。1A/s で電流が変化するとき C_2 での誘導起電力が 1V であれば相互インダクタンスは 1H である。

例題として、小さなリング C_2 と大きなリング C_1 が同一平面上に中心を共有している FIGURE 7.20 の回路を考える。

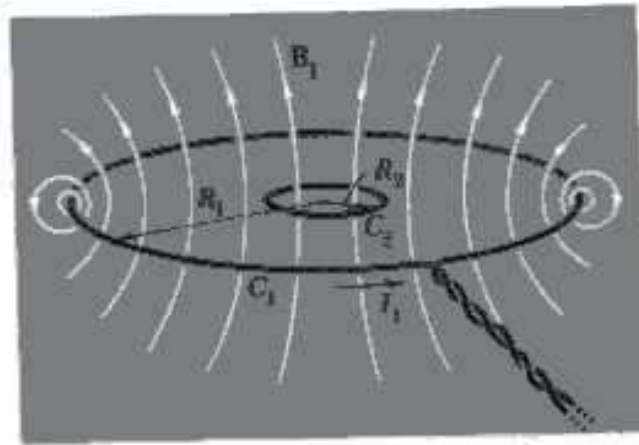


FIGURE 7.20
Current I_1 in ring C_1 causes a field B_1 which is approximately uniform over the region of the small ring

電流 I_1 が流れている C_1 回路の中心の磁束密度 B_1 の大きさは

$$B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2R_1} \quad (7.39)$$

であたえらる。

$R_2 \ll R_1$ を仮定して、小さいリング C_2 の内側での B_1 の変化を無視できるとする。このとき C_2 を通る磁束は

$$\Phi_{21} = (\pi R_2^2) \frac{\mu_0 I_1}{2R_1} = \frac{\mu_0 \pi I_1 R_2^2}{2R_1} \quad (7.40)$$

となる。

よってこの例での (7.36) 式の "const" は $\mu_0\pi I_1 R_2^2/2R_1$ なる値を持つ。 C_2 に誘導される emf は

$$\mathcal{E}_{21} = -\frac{\mu_0\pi R_2^2}{2R_1} \frac{dI_1}{dt} \quad (7.41)$$

となる。

相互インダクタンスは $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ H/m だから

$$\mathcal{E} [\text{V}] = -\frac{2\pi^2 R_2^2}{R_1} \cdot 10^{-7} \frac{dI_1}{dt} [[\text{H} \cdot \text{A/s}]] \quad (7.42)$$

よって M_{21} を H、 R_1 と R_2 を m で表すので

$$M_{21} = \frac{2\pi^2 \times 10^{-7} R_2^2}{R_1} \quad (7.43)$$

である。

マイナス符号をつけてはいるが、ここまでの段階ではご利益は特にあるわけではない。 emf が C_2 に誘導する電流の向きを確認するときは Lenz の法則によるのが一番良い方法である。

C_1 が一重のリングではなく、 N_1 巻きの導線で作られていれば、電流 I_1 があたえられても中心での B_1 は N_1 倍強くなる。同様に C_2 が全て N_2 回巻きの半径 R_2 のリングからできていれば、各リングの emf の和が全体の emf となるので一重巻きのときの N_2 倍の emf が得られる。

よって2つのコイルが *Multiple Turns* (多重巻き) になっている場合の相互インダクタンスは

$$M_{21} = \frac{2\pi^2 \times 10^{-7} N_1 N_2 R_2^2}{R_1} \quad (7.44)$$

であたえられる。

(7.44) 式では、2つのコイルの巻き線は密に巻かれていて巻き線の断面はコイルの半径に比べてとても小さいと仮定されている。

しかし2つの回路がこの仮定を満たさなくても、相互インダクタンス M_{21} は定義がきちんとされている。

M_{21} は回路1の変化する電流 I_1 によって生ずる回路2の emf [V] と I_1 の時間変化率 [A/s] の比である。つまり

$$M_{21} [\text{H}] = \frac{\mathcal{E}_{21} [\text{V}]}{\left(\frac{dI_1}{dt}\right) [\text{A/s}]} \quad (7.45)$$

が定義である。

7.7 A Reciprocity Theorem (相反定理)

閉回路 C_1 と C_2 があり、 C_2 に時間的に変化する電流 I_2 が流れるとき、回路 C_1 に誘導起電力 $\mathcal{E}_{\infty\epsilon}$ が生ずる。このとき相互インダクタンス M_{12} は

$$M_{12} = \frac{\mathcal{E}_{12}}{\left(\frac{dI_2}{dt}\right)} \quad (7.46)$$

と定義される。

Any(どんな)2つの回路についても

$$M_{12} = M_{21} \quad (7.47)$$

という注目すべき結果が得られる。

この結果は幾何学的対称性から得られるわけではない。FIGURE 7.20 のような単純な例でさえ2つの回路について対称性は存在しない。 M_{21} への R_1 と R_2 の入り方が違う。(7.47) 式からこの相異なる回路について、

$$M_{21} = \frac{2\pi^2 \times 10^{-7} N_1 N_2 R_2^2}{R_1}$$

となるから

$$M_{12} = \frac{2\pi^2 \times 10^{-7} N_1 N_2 R_1^2}{R_2}$$

も成立する。添字 1 と 2 をすべて置き換えたものにはならない。

定理 (7.47) 式を証明するためには、回路 C_2 上の電流 I の結果として C_1 を通る磁束 Φ_{12} と回路 C_1 上の電流 I の結果として C_2 を通る磁束 Φ_{21} が等しいことを示さなければならない。

Stokes の定理によると \mathbf{B} の Vector Potential が \mathbf{A} 、つまり $\mathbf{B} = \text{curl } \mathbf{A}$ であるとき

$$\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = \Phi_S \quad (7.49)$$

を得る。

That is, the line integral of the vector potential around a loop is equal to the flux of \mathbf{B} through the loop. (あるループ上の Vector Potential の周回線積分はこのループを通る磁束に等しい。)

第 6 章で見たように Vector Potential はその電流による発生源と次のように関係している:

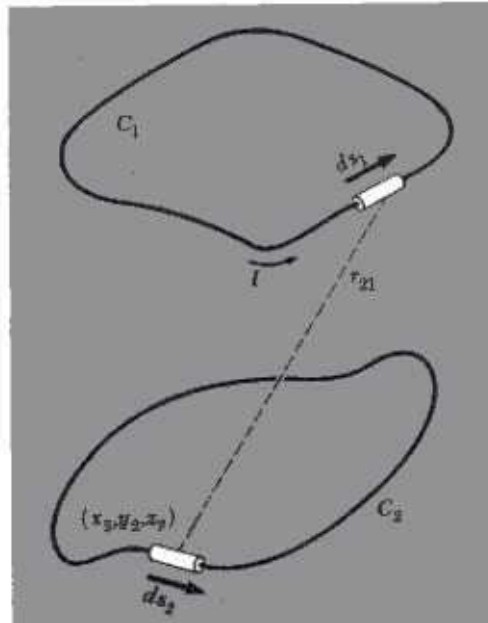
$$\mathbf{A}_{21} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{C_1} \frac{d\mathbf{s}_1}{r_{21}} \quad (7.50)$$

\mathbf{A}_{21} は閉回路 C_1 を流れる電流 I によって作られる点 (x_2, y_2, z_2) における Vector Potential である; $d\mathbf{s}_1$ は閉回路 C_1 の微小線素である; また r_{21} は $d\mathbf{s}_1$ の点から点 (x_2, y_2, z_2) までの

距離である。

FIGURE 7.21 は 2 つのループ C_1 と C_2 を示している。

FIGURE 7.21
Calculation of the flux Φ_{21} which passes through C_2 as a result of current I flowing in C_1 .



(x_2, y_2, z_2) をループ C_2 上のある点としよう。このとき C_1 上の電流 I によって作られる C_2 を通る磁束は

$$\Phi_{21} = \oint_{C_2} \mathbf{A}_{21} \cdot d\mathbf{s}_2 = \oint d\mathbf{s}_2 \cdot \mathbf{A}_{21} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{C_2} d\mathbf{s}_2 \cdot \oint_{C_1} \frac{d\mathbf{s}_1}{r_{21}} \quad (7.51)$$

である。

同様に C_2 上の電流 I によって作られる C_1 を通る磁束は

$$\Phi_{12} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{C_1} d\mathbf{s}_1 \cdot \oint_{C_2} \frac{d\mathbf{s}_2}{r_{12}} \quad (7.52)$$

である。

r_{12} も r_{21} も距離だから $r_{12} = r_{21}$ である。上述の線積分の意味は以下の通りである: 各ループ上に一つずつの微小線素をとって組とし、互いの微小線素ベクトルの内積とこの線素間の距離との比を考え、ループ上の組全てについて足した値を意味している。

(7.52) 式と (7.51) 式の差は唯一この操作を実行する *order* (順序) であって、この順序を変えても最終的な和を変えはしない。故に $\Phi_{12} = \Phi_{21}$ となるので、直ちに $M_{12} = M_{21}$ がわ

かる。

この定理のおかげで M_{12} と M_{21} の区別をする必要はなくなる。よってこれ以降は任意の2つの回路の相互インダクタンス M を考えればよい。

この類の定理はしばしば”Reciprocity”(相反あるいは可逆) 定理と呼ばれる。ここで問題とは関係のない電気回路の相反定理は他にもある。ここで第3章6節で述べられ Problem 3.27 で扱われた関係式 $C_{jk} = C_{kj}$ を思い出した人もいるだろう。相反(可逆)性は普通は系の見かけの構造に現われない或る一般的対称性の法則を表している。

7.8 Self-Induction (自己インダクタンス)

回路 C_1 上に流れる電流 I_1 が時間的に変化するとき、 C_1 自身を通る磁束も変化してその結果 emf が誘導される。磁束の発生源が何であっても、次の電磁誘導の法則が成立する:

$$\mathcal{E}_{11} = -\frac{d\Phi_{11}}{dt} \quad (7.53)$$

ここで Φ_{11} は回路 C_1 中の電流 I_1 による磁束密度 \mathbf{B}_1 の C_1 を通る磁束である。-符号は emf は常に電流による *change*(変化) とは *oppose*(反対) となるようにおこるという Lenz の法則を表している。

Φ_{11} は I_1 に比例するので

$$\mathcal{E}_{11} = -L_1 \frac{dI_1}{dt} \quad (7.54)$$

と書ける。

定数 L_1 はこの回路の *Self-Inductance*(自己インダクタンス) とよばれる。

L_1 を計算できる回路の例として FIGURE 7.22 で示した (Problem 6.14 の) 断面が長方形のトロイドを考えよう。 N 巻きのコイルを流れる電流 I はコイルの中心軸からの距離 r の点で大きさが

$$B = \frac{\mu_0 N I}{2\pi r}$$

とあたえられる磁束密度を作る。

コイルの一巻きを通る磁束はこの磁束密度をコイルの断面で積分したものである:

$$\Phi(1 \text{ 巻き}) = h \int_a^b \frac{\mu_0 N I}{2\pi r} dr = \frac{\mu_0 N I h}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \quad (7.55)$$

N 回巻きの回路を通りぬける磁束はこの N 倍大きい:

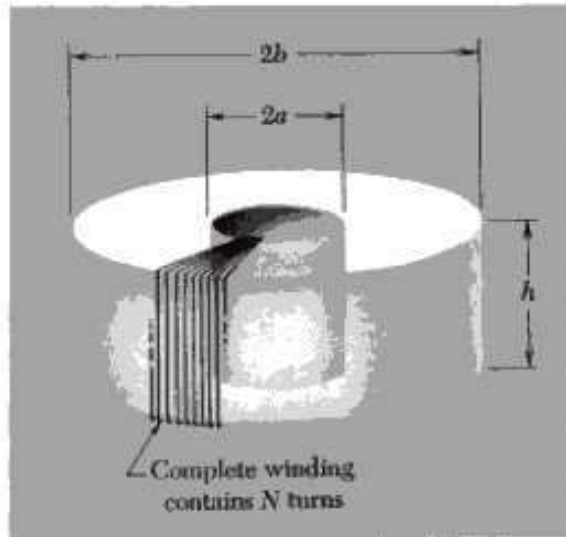
$$\Phi = \frac{\mu_0 N^2 I h}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \quad (7.56)$$

故に誘導起電力 \mathcal{E} は

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{\mu_0 N^2 h}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \frac{dI}{dt} \quad (7.57)$$

FIGURE 7.22

A toroidal coil of rectangular cross section. Only a few turns are shown.



よって、トロイドの自己インダクタンスは

$$L = \frac{\mu_0 N^2 h}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \quad (7.58)$$

であたえられる。

自己インダクタンスの単位も H である。h を m ではかると (7.58) 式の L は

$$L [\text{H}] = 2 \times 10^{-7} N^2 h \ln\left(\frac{b}{a}\right) \quad (7.59)$$

となる。

前に考えた一本の導線の円輪の方が自己インダクタンスの計算例として簡単だと考えるかも知れない。しかし、これを計算すると困難に出会う。導線の直径をゼロとすると問題が簡単になりそうであるが、やってみるとすぐ直径ゼロの細線に電流が流れるとループを通る磁束が無限大になってしまうことがわかる。どうしてかというと磁束密度の大きさ B は電流からの距離を r とすると $1/r$ のようになり、 $B \times$ 面積の積分 $\int dr/r$ を $r = 0$ まで伸ばすと発散するからである。

これを回避するには導線の半径をゼロではない有限の値にすることであるが、これの方がずっと現実的である。こうすると計算が少し複雑になるかも知れないが心配するにはあたらない。

本当に難しい問題はそれ巻き線の部分部分は異なる磁束で関係する別々の回路となっている。回路を貫く磁束とは何かはもはやはっきりしなくなってくる。事実、閉回路を分割した各ループ要素で emf が異なるから、環全体を急速に変化する電流が流れるとき電流密

度の再配置がおこななければならない。よって回路のインダクタンスが I の変化の速さによってしまい、(7.54) 式で仮定したようには一定ではないかもしれない。

ここではトロイドの各巻き線の間近の場を無視してこの問題を回避した。磁束は導線を通り抜けないし、そうであっても問題視していた効果は重要ではない。

7.9 A Circuit Containing Self-Inductance (自己インダクタンスを含む回路)

FIGURE 7.23a のように自己インダクタンス L のコイルつまり Inductor(インダクター) を emf \mathcal{E}_0 をあたえる電池につないだとしてしよう。

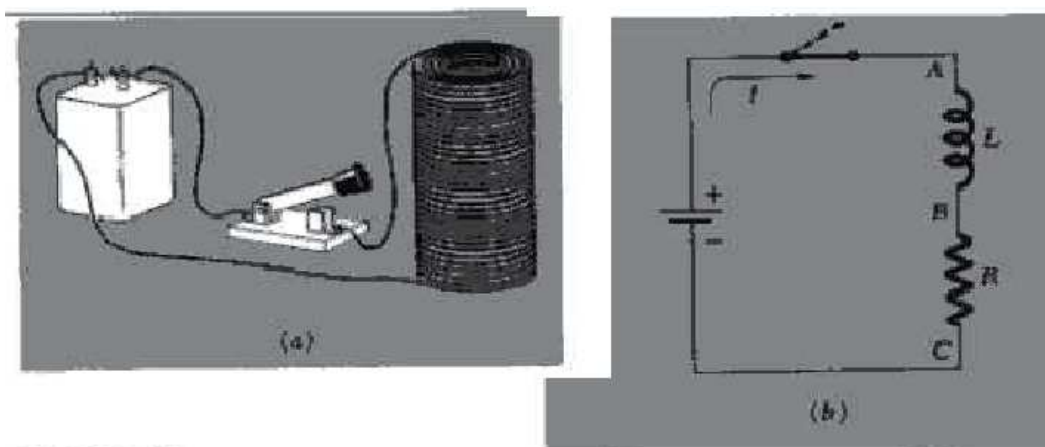


FIGURE 7.23
A simple circuit with inductance (a) and resistance (b).

コイルも導線もまた電池さえも何らかの抵抗をもつ。この抵抗を一まとめにして抵抗 R とし、回路中にどう分布しようと気にしないことにする。FIGURE 7.23b には抵抗記号で抵抗 R を回路図に記した。インダクタンスにも導線の部分が効いてくることがありうる; これも L が含んでいるとする。FIGURE 7.23b は言いかえると物理的回路の理想図である: インダクタンス L は抵抗を持たない; 抵抗 R はインダクタンスを持たない。これから分析するのはこのように理想化された回路である。

回路の電流 I が dI/dt の割合いで変化するとき、emf LdI/dt がこの変化を妨げる方向に誘導される。電池は一定の emf \mathcal{E}_0 をあたえている。電池が回路内で流す向きを電流の正の向きとすると、任意の時刻での正味の emf は $\mathcal{E}_0 - LdI/dt$ である。この emf により抵抗 R を電流 I が流れる。つまり

$$\mathcal{E}_0 - L \frac{dI}{dt} = RI \quad (7.60)$$

この状況をこうも言い表される:

A と B の間の電位差 (コイルの両端の電圧) は I が *increasing* (増す) とき、コイルの上側つまり A を正とすると LdI/dt である。B と C の間の電位差 (抵抗の両端の電圧) は抵抗の上側つまり B を正として RI である。よってコイルと抵抗の電圧の和は $LdI/dt + RI$ であり、これが電池の端子間電圧 \mathcal{E}_0 と同じである (理想化されているので電池は内部抵抗をもたない)。故に

$$\mathcal{E}_0 = L \frac{dI}{dt} + RI \quad (7.61)$$

となり、(7.60) 式の単なるくりかえしが得られる。

(7.60) 式を数学的に解く前に、スイッチが $t = 0$ に閉じられたとき回路に何がおこるか考えよう。

スイッチが開いていれば当然 $I = 0$ である。スイッチが閉められてから長時間後には何等かの定常状態に落ち着き、電流は一定の値 I_0 になるだろう。そうなると $dI/dt \neq 0$ だから (7.60) 式は

$$\mathcal{E}_0 = RI \quad (7.62)$$

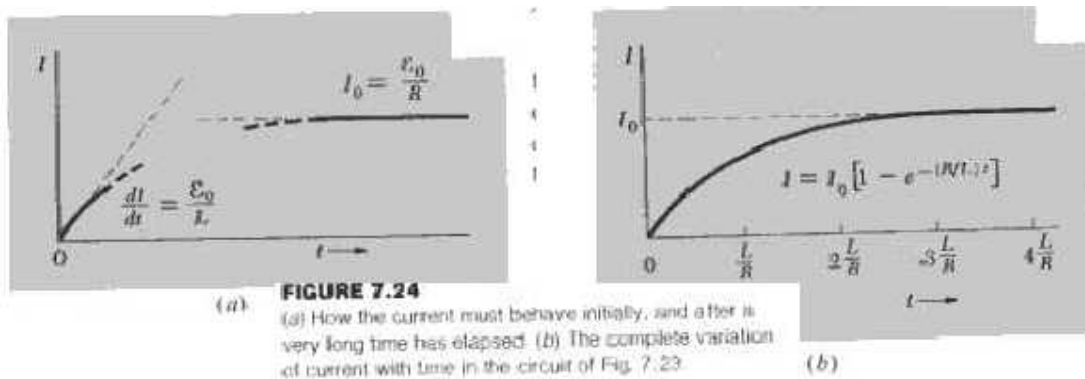
になってしまう。

$I = 0$ から定常電流値 I_0 への移行は突然 $t = 0$ でおこることはあり得ない。というのもそうであれば dI/dt が無限大になってしまうからである。実際、 $t = 0$ の直後では電流 I は小さいから (7.60) 式右辺第 2 項は無視でき

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\mathcal{E}_0}{L} \quad (7.63)$$

をあたえる。インダクタンス L で電流の立ち上がり工合を制限している。

これまでわかったことを FIGURE 7.24a にまとめよう。



まだ残っていることは全体の変化がどうおこるかを求めることである。 $t = 0$ で $I = 0$ なる初期条件を満たす (7.60) 式の解を書き下す:

$$I = \frac{\mathcal{E}_0}{R} (1 - e^{-(R/L)t}) \quad (7.64)$$

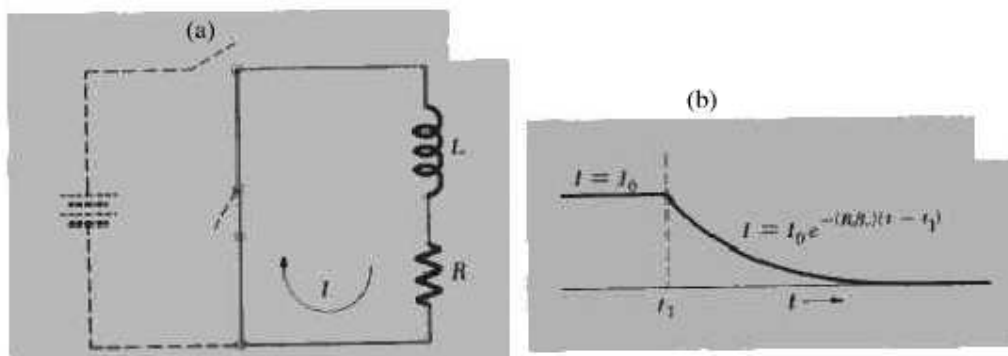
FIGURE 7.24b のグラフは電流が漸近値 I_0 に指数関数的に近づくことを表している。この回路の”時定数”は L/R なる量である。 L が H、 R が Ω で測られるとき L/R は s の単位になる。というのも $H = (V/A) \cdot s$ で $\Omega = V/A$ だからである。

電流が I_0 に達してからスイッチを切り、電流を突然ゼロに落とすとどうなるだろう。突然ゼロにするということは LdI/dt なる項をマイナス無限大にしてしまうことになる。悲劇的なことがおこり得る。何人もの人がこれまで強誘導回路のスイッチを切ったとき命を落している。

非常に高い誘導電圧が開けられたスイッチの端子間に火花またはアーク放電を生じさせるので、結局電流は連続的に流れる。そうしないで代わりに FIGURE 7.25a にしめたような LR 接続回路へとつなぐ伝導路を閉じて、回路から電池を切り放そう。

FIGURE 7.25

(a) LR circuit. (b) Exponential decay of current in the LR circuit.



こうすると回路は方程式

$$0 = L \frac{dI}{dt} + RI \quad (7.65)$$

で記述される。

t_1 を短絡回路が閉じられる時刻とすると $t = t_1$ で $I = I_0$ なる初期条件が課せられる。解は単純な減衰関数で

$$I = I_0 e^{-(R/L)(t-t_1)} \quad (7.66)$$

であり、時定数は前と同じく L/R である。

7.10 Energy Stored in The Magnetic Field (磁場に貯えられるエネルギー)

FIGURE 7.25b と $t = t_1$ で $I = I_0$ なる初期条件が課せられた解

$$I = I_0 e^{-(R/L)(t-t_1)}$$

により記述される電流は減衰する間にエネルギーが抵抗 R で消費される。

短時間 dt の間に消費されるエネルギー dU は $RI^2 dt$ だから、時刻 t_1 で短絡回路のスイッ

チを閉じた後で消費されるエネルギーは

$$U = \int_{t_1}^{\infty} RI^2 dt = \int_{t_1}^{\infty} RI_0^2 e^{-(2R/L)(t-t_1)} dt \quad (7.67)$$

である。

$x = 2R(t - t_1)/L$ の置き換えでこの積分はすぐに求まる:

$$U = RI_0^2 \int_0^{\infty} e^{-x} dx = \frac{1}{2} LI_0^2 \quad (7.68)$$

このエネルギー源は磁束密度を有するコイルであった。まず電池がこの電流を作りあげるのにこの量の仕事を最初に行った。続いてそのエネルギーが $t = 0$ から $t = t_1$ の間に抵抗で消費された。結局このエネルギーも電池が供給したものである。

これが一般的な関係として成立することを見るために、コイルの電流を増加させたときには誘導起電力 LdI/dt に抗して電流を流すためには仕事が必要になることに注意せよ。時間 dt でなされる仕事は

$$dW = LI \frac{dI}{dt} dt = LI dI = \frac{1}{2} d(I^2) \quad (7.69)$$

故に

$$U = \frac{1}{2} LI^2 \quad (7.70)$$

のエネルギーを電流 I が流れているコイルに持たせられる。

電流が減衰し切ってしまうと、このエネルギー量がどこか他のところに現われるのである。

帯電したコンデンサーのエネルギーが電場に貯えられたものとして記述したように、このコイルの持つエネルギーをコイルの中の磁場中に貯えられたエネルギーと見なすのは自然である。

電位差 V まで充電されたコンデンサーのエネルギーは $CV^2/2$ であったが、これを電場の強さ E の電場中の微小体積要素が $\epsilon_0 E^2 dv/2$ だけエネルギーを持っていると説明した。全く同じ関係がコイルに貯えられたエネルギーでも成立することがわかる。これは面白いことであるが不思議ではない。

磁束密度が存在する空間がエネルギー密度 $B^2/2\mu_0$ をもつことが示せ、このエネルギー密度を全空間にわたって足すとエネルギー $LI^2/2$ となることがわかるのである。

具体例で示すために第7章8節でインダクタンス L を計算したトロイドに戻ろう。

$$L = \frac{\mu_0 N^2 h}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \quad (7.71)$$

であることはわかった。

電流 I が流されると、磁束密度の大きさは

$$B = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r} \quad (7.72)$$

であった。

$B^2/2\mu_0$ の体積積分を求めるために FIGURE 7.26 にスケッチした体積 $2\pi r h dr$ の円柱形の殻からなる領域を用いよう。

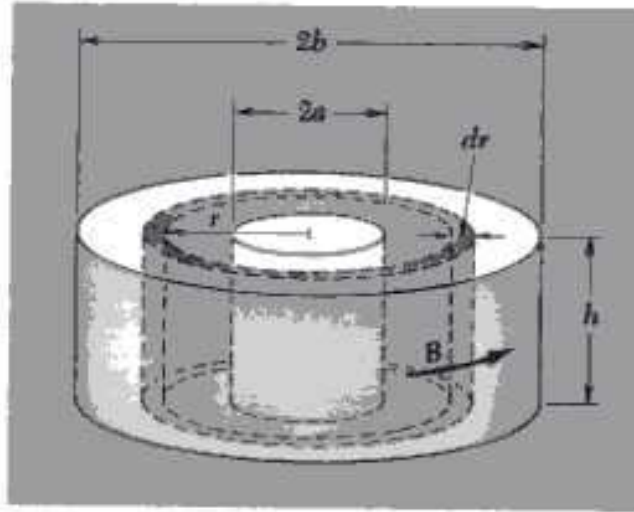


FIGURE 7.26
Calculation of energy stored in the magnetic field of the toroidal coil of Fig. 7.22.

$r = a$ から $r = b$ までこの殻が広がると、磁束密度が存在する全空間を覆うことになる (念のために言うと、トーラスの外側ではどこでも $B = 0$ である)。

$$\frac{1}{2\mu_0} \int B^2 dv = \frac{1}{2\mu_0} \int \left(\frac{\mu_0 N I}{2\pi r}\right)^2 2\pi r h dr = \frac{\mu_0 N^2 h I^2}{4\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \quad (7.73)$$

この結果と (7.71) 式を比べると、確かに

$$\frac{1}{2\mu_0} \int B^2 dv = \frac{1}{2} L I^2 \quad (7.74)$$

であることがわかる。

第 1 章での電場のエネルギー密度の命題に対応してより一般的に述べると、どんな磁束密度 $\mathbf{B}(x, y, z)$ に対しても、伴うエネルギー U は

$$U = \frac{1}{2\mu_0} \int_{\text{全磁場領域}} B^2 dv \quad (7.75)$$

と書ける。