

第6章 The Magnetic Field (磁場)

6.1 Definition of The Magnetic Field (磁場の定義)

電流と平行に動いている電荷はその速度と直交する力を感じる。FIGURE 5.3 では電子ビームが偏ることを述べたが、このことはこの事実を示している。

5.9 で Coulomb の法則、電荷の不変性、そして特殊相対論とに合致していること、というより要求されていることであることをみてきた。さらに荷電粒子の速度と直交する力が電流の流れている導線とも直交することもわかった。

FIGURE 5.20(a) では電流があたえられたときの力を特別な場合で計算した。この力は荷電粒子の電荷と速さの積に比例した。

静止した単位電荷に働く力として電場 \mathbf{E} を定義したが、同様に動いている電荷に働く力の電荷の速度に依存する部分から別の場 \mathbf{B} を定義することができる。この場は 5.2 で既に導入されたが、もう一度述べることにする。

電荷 q の粒子が、ある時刻 t で (x, y, z) なる場所を速度 \mathbf{v} で通ったとする。この時刻での運動量の変化率、つまり力を \mathbf{F} とあらわす。

この時空点 (時間と場所で指定される点) での電場 \mathbf{E} がわかっているとすると、磁束密度 \mathbf{B} は次式をみたす Lorentz 力として定められる。

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q\mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (6.1)$$

この定義をみたす場 \mathbf{B} はいつでも存在できる。ある領域での \mathbf{E} と \mathbf{B} の値がわかればこの領域を任意の速度で動いているどんな荷電粒子でも働いている力は (1) であたえられる。時間と空間で必ずしも一定ではなく変化する場に対しては、(1) を \mathbf{F} 、 \mathbf{E} 、 \mathbf{v} と \mathbf{B} のある時刻についての値に関して成立する局所的関係式とみなせばよい。もちろん 4 つのベクトル量はすべて同一の慣性系で測られなければならない。

FIGURE 5.20(a) での LAB FRAME における試験電荷に対する力を考察した際、電場はゼロであった。 x 方向に速さ v で動いている試験電荷 q に働く力は、 $-y$ 方向であり、その大きさは

$$\frac{Iqv}{2\pi\epsilon_0 c^2 r}$$

であり

$$\mathbf{F} = -\hat{\mathbf{y}} \frac{Iqv}{2\pi\epsilon_0 c^2 r} = -\hat{\mathbf{y}} \frac{\mu_0 Iqv}{2\pi r} \quad (6.2)$$

と書ける。

磁束密度は

$$\mathbf{B} = \hat{\mathbf{z}} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \quad (6.3)$$

である。よって (6.1) は

$$\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B} = (\hat{\mathbf{x}} \times \hat{\mathbf{z}}) \frac{\mu_0 I}{2\pi r} = -\hat{\mathbf{y}} \frac{\mu_0 Iqv}{2\pi r} \quad (1)$$

となり (2) と一致する。

FIGURE 6.1は B と v そして電流 I の直交関係をあらわしている。

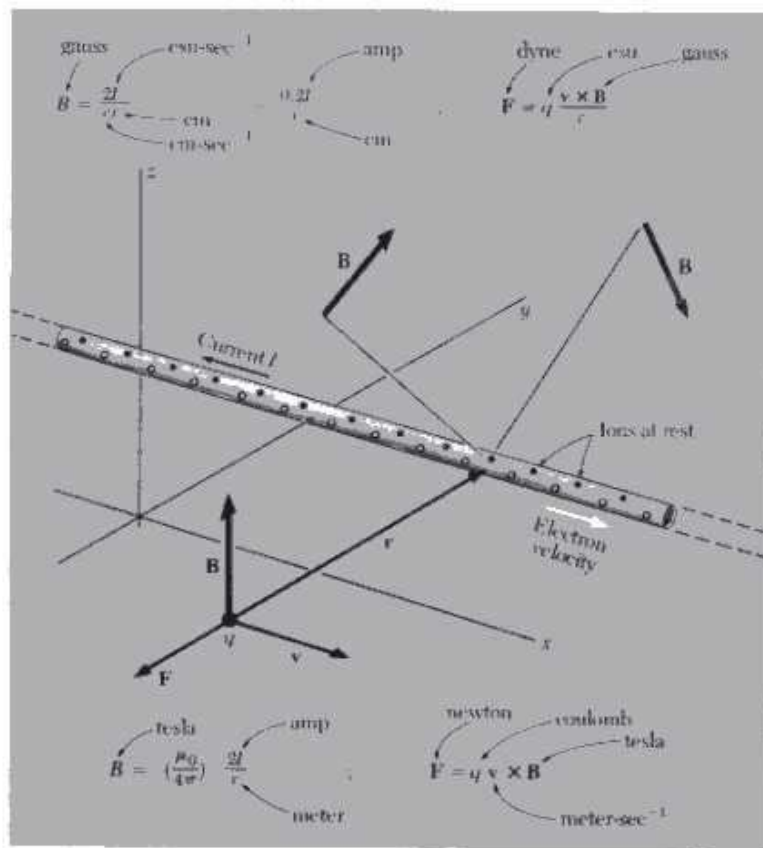


FIGURE 6.1

The magnetic field of a current in a long straight wire and the force on a charged particle moving through that field.

$$\left(\frac{2I}{rc}\right) = -\hat{y} \frac{2Iqv}{rc^2} \quad (4)$$

FIGURE 5.2(a) の電流と方位磁針に関する Oertsted の実験では、導線に接続された電池により、電流の流れる向きが決まる。方位磁針の向きは (古くから続く伝統によるが) 磁針の北向の端につけられた色による印をみるとわかる。FIGURE 5.2(a) と FIGURE 6.1 を比べると、電流により地球の北磁極とは異なる局所的な実験室での北磁極を磁針が指すことがわかる。

単位について触れよう。
SI系では磁束密度 B は

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q\mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (6.1)$$

で定義された。

ここで F の単位は N、 q の単位は C、 E の単位は V/m、 v の単位は m/s である¹
 磁束密度 B の単位 [T] (テスラ) を、 B に垂直に速さ 1[m/s] で動いている 1[C] の電荷が 1[N] の力を感じると定める²。
 真空の透磁率 μ_0 は SI 系での基本定数であり、その値は $4\pi \times 10^{-7} \text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^2 / \text{A}^2 = 4\pi \times 10^{-7} \text{H/m}$ と定義されている³。

平行電流間に働く磁気的な力を求める。間隔 r で同じ方向に I_1 と I_2 なる電流が流れているとする (FIGURE 6.3)。間隔 r に比べて導線の長さは充分長いとし、導線が無限に長いものと仮定しよう。
 一方の導線の長さ l の部分に働く力を求める。

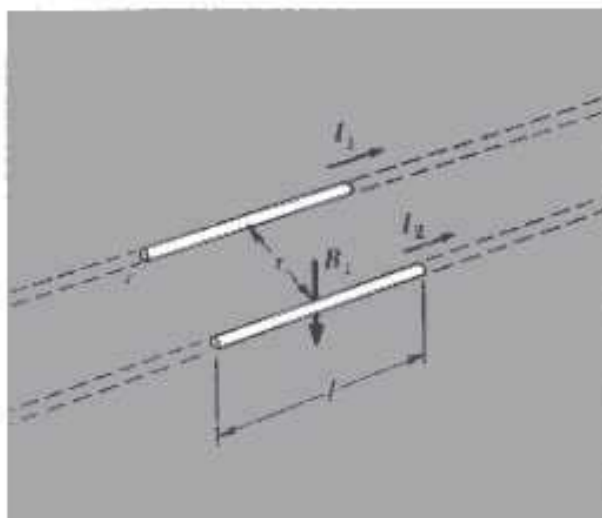


FIGURE 6.3
 Current I_1 produced magnetic field B_1 at conductor 2. The force on a length l of conductor 2 is given by Eq. 7 or 7'.

導線 1 を流れる電流は導線 2 のところに大きさ

$$B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r} \quad (6.5)$$

の磁束密度を作る。

導線 2 の内部には単位長さあたり n_2 個の電荷 q_2 が速さ v_2 で動いているとする。電流 I_2 は

$$I_2 = n_2 q_2 v_2 \quad (6.6)$$

¹cgs 系での定義は

$$F = qE + \frac{q}{c} v \times B$$

であり、光速度 c が定義に現われる。

²cgs 系での B の単位はガウスであるが、 $1\text{T} = 10^4 \text{G}$ (ガウス) である。

³後に述べるインダクタンスの単位 H (ヘンリー) を用いた。

である。

(6.1)式によれば、各電荷に働く力の大きさは

$$q_2 v_2 B_1$$

だから、導線2の単位長さあたりに働く力の大きさは

$$n_2 q_2 v_2 B_1 = I_2 B_1 [\text{N/m}] \quad (2)$$

となる。よって、(4)式から期待されるように、導線2の長さ ℓ の部分に働く力の大きさ F は

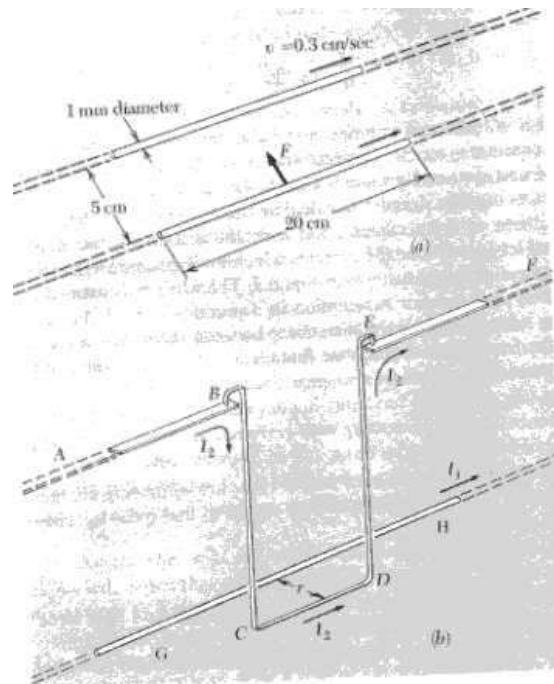
$$F = \frac{\mu_0 I_1 I_2 \ell}{2\pi r} \quad (6.7)$$

となる。

導線2の作る磁場による導線1に作用する力も同じ式であらわされる。

同方向に流れる電流は互いに引力を働かせることは既にみた通りである。

前述の表式を同じ大きさの電流が流れる FIGURE 6.4(a) の2本の導線に応用してみよう。導線はいずれも直径1mmの銅でできていて、5cm離れている。



銅内の伝導電子は 1m^3 あたり 8.45×10^{28} 個であるので、1mの長さの銅線には 6.6×10^{22} 個の伝導電子が存在することになる。

平均速度は $3 \times 10^{-3}\text{m/s}$ である場合を考えよう。このとき各導線中には電流

$$I_1 = I_2 = I = nq\bar{v} = (8.45 \times 10^{28} [1/\text{m}^3])(1.6 \times 10^{-19} [\text{C}])(3 \times 10^{-3} [\text{m/s}]) = 32 [\text{A}] \quad (6.8)$$

が流れている。

$l = 20\text{cm}$ の導線の部分に働く引力は大きさが

$$F = \frac{I^2 l}{2\pi\epsilon_0 c^2 r} = \frac{\mu_0 I^2 l}{2\pi r} = \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 32^2 \times 0.20}{2\pi \times 0.05} = 8 \times 10^{-4} \text{ [N]} \quad (6.9)$$

であることがわかる。この大きさの力を測定するのは簡単である。FIGURE 6.4(b) のようにして測ればよい。

(6.9) 式の分母の c^2 は前章でみたように v^2/c^2 に比例する相対論的効果であって、Lorentz 収縮の痕跡である。ここでの毎秒3ミリメートルという速さは蟻より遅いけれども明白な磁氣的力を生み出しているのである。

これは伝導電子が担っている非常に大きな負電荷による効果である。ただし、普通は正電気により完全に中性となっているので気付かないだけである。もしも1メートルあたり 6.6×10^{22} 個もの電子が中和されなかったら磁氣的な力の c^2/v^2 倍になり、2本の導線の静電気力による引力は導線1メートルあたりおよそ 40×10^{14} トンの重さに匹敵してしまう。もしも雨滴一つの中の全ての電子が地球から取り去られたとしても地球全体の電位は何百万Vも上昇してしまう程である。

巨視的物体は、たとえば雨滴から惑星までもほとんど中性である。分子サイズよりずっと大きな物体では、どんな部分でも電子と陽子はほぼ同数含んでいる。さもなければ生ずる電場が強くなってしまい余分な電荷は必然的に吹きとばされてしまうだろう。もし、銅線が全体の 10^{10} ほど負電荷を余分に持っていたとしても銅線内の電子にこんなことが起こってしまうことになるだろう。

しかし、磁場は電場と異なり物体を壊すようなことはない。どんなに磁場が強くなっても、止まっている電荷には力をおよぼさない。このため動いている電荷による力が巨視的世界では重要になり得るのである。(6.1) 式の Lorentz 力の第2項が第1項よりずっと大きくなることもあり得る。この第2項のお陰で電動モーターで車を発進させることができる。しかし、原子の世界では荷電粒子間には Coulomb 力が現われて、磁氣的な力は電気力に比べ2次的な効果かしかもたらさない。一般に磁気力は粒子と光の速さの比の2乗分だけ弱いのである。

原子内では、磁束密度は10T位である。実験室で簡単にできる巨視的磁場で最強のものは短時間では数百Tではあるが、通常は大体10T位である。普通の電気機械では、電動モーターのようなもので1Tが典型的な値である。地磁気の強さは地表では十分の数Gであるが、地球磁場の原因である電流が流れている金属コアの部分ではもっとずっと強いはずである。

太陽表面近辺では壮大な磁場の振舞いがみられる。黒点は数千Gもの強い磁場の噴出口である。他の星にはもっと強い磁場をもつものもある。最強の磁場と目されているのは中性子星(パルサー)の表面での磁場であり、 10^8T という想像もつかない強度にまで達すると考えられている。

もっと巨大なスケールでいうと、我々の銀河では星間空間には数千光年以上にわたって広がっている磁場の存在が得られている。電波天文学による観測で磁場強度が得られていて、数 μG という僅かだが、星間物質の世界では重要な役割を演ずる値となっている。

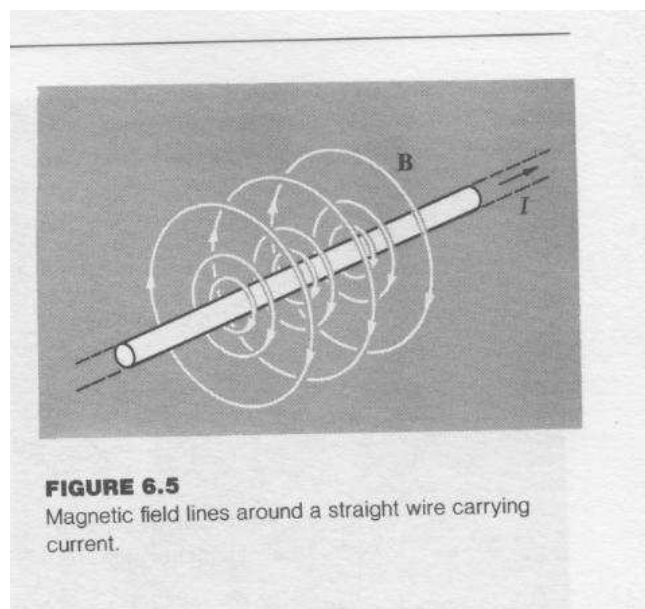
6.2 Some Properties of The Magnetic Field (磁束密度の諸性質)

磁場は電場と同様に荷電粒子同士がどう相互作用するかを記述する道具である。ある時刻に磁場のある点で磁束密度の方向と大きさを記述すると、その時空点で動いている荷電粒子が持つ加速度について述べていることになる。注目すべきことはベクトル量 \mathbf{B} をあたえるだけで述べるべきことを尽くしてしまっていることである。 \mathbf{B} をあたえると、任意の速度で動いているどんな荷電粒子についても作用する力の速度依存項を一意的に言い当てることができるのである。磁場の sources となっている他の荷電粒子に言及することは不必要なことである。

もし動いている電荷からなる2つの異なる系がある点でたまたま同一の \mathbf{E} と \mathbf{B} を生み出している、この2つの系において任意の試験電荷のその点における振舞いは同一になるのである。

この理由により粒子同士の相互作用の仲介者として場の概念が役に立ち、また場を独立な実体として考えることができるのである。

この立場からみて、粒子同士の相互作用を記述するための道具として以上の場は現実性を持つか否かは、当面脇に置いておくが、これは深い質問である。Faraday や Maxwell 等の人々にとって電場や磁場は生き生きとした実在物であって、この概念により新しい洞察や偉大な発見に導かれたのであった。ここでは、彼等と同様に磁場を具体的に考察し、性質を理解していこう。



これまでは、直線導線に定常電流を通してできた磁場だけを考えてきた。磁束密度の方向は導線と場の観測点を含む平面といたるいところで直交しているのを見てきた。磁束密度

の大きさは $1/r$ に比例している。FIGURE 6.5 に示したように、磁束密度は導線のまわりを取り囲んでいる。

B の方向はベクトル積と (6.1) 式の第 2 項を $qv \times B$ と書くとしたこと、および電流の流れる向きに動く正電荷は引きつけられるという物理的事実によって決められる。図のように電流の向きに関して磁束密度 B は時計回りにまわっている。

B についての空間内の閉曲線上に沿う線積分を考えよう (点電荷の作る静電場について同様の線積分を考えて、あらゆる静電場について簡潔で基本的な性質を得ることができたことを想起せよ)。

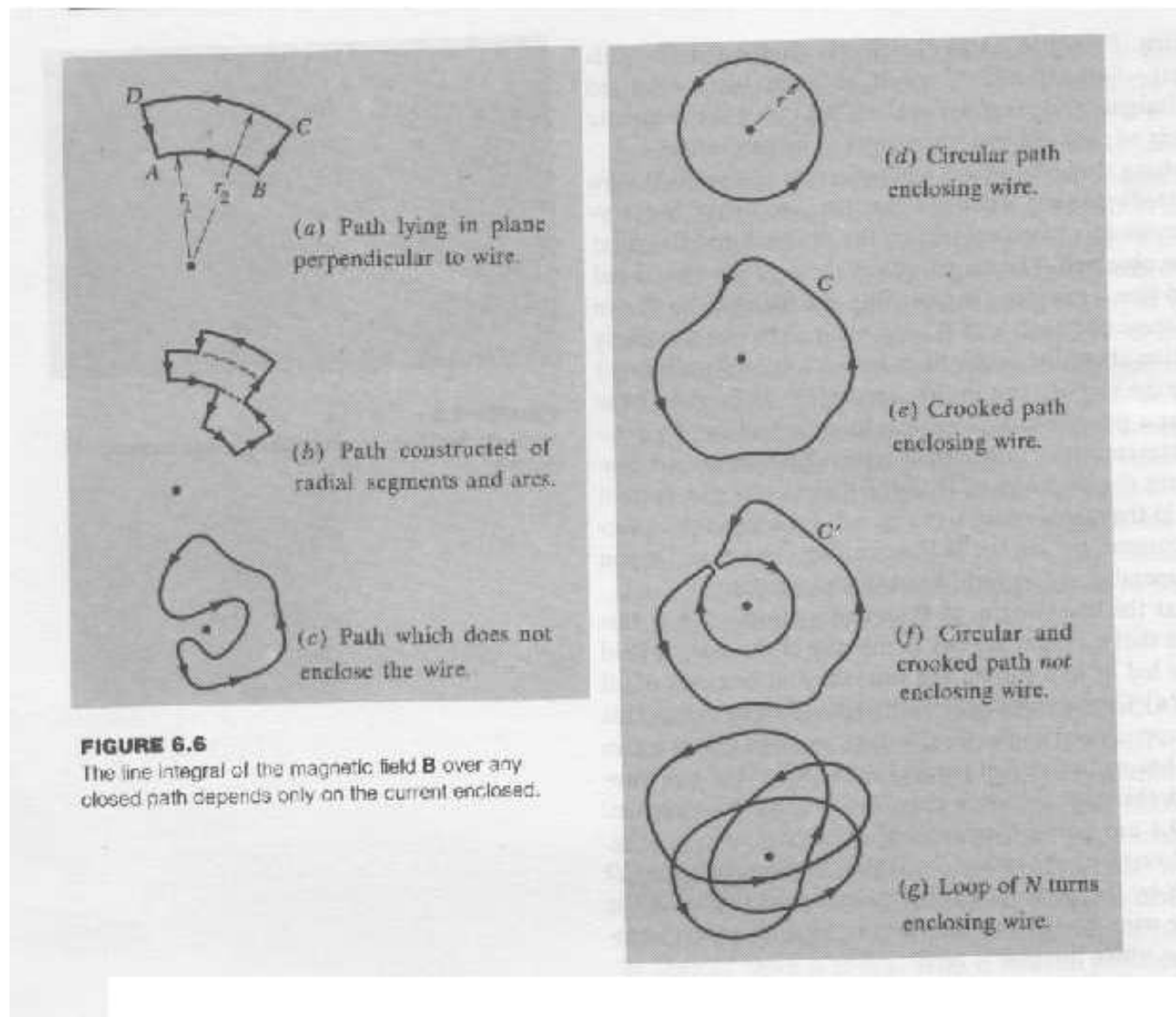


FIGURE 6.6(a) の経路 ABCD を考えよう。この経路は導線に直交する平面上にのって

る。 B は導線に平行な成分を持たないからこの平面上だけで考えてよい。以下に述べる理由でこの経路に沿う線積分の値はゼロである。BCとDAの経路は B と直交するので積分には寄与しない。AB上ではCD上に比べて B が r_2/r_1 倍大きい値になるが、導線を見込む角が等しいからCDの方がABより r_1/r_2 だけ長い。よってAB上とCD上では線積分の値の大きさは等しくなり、符号が反対になるので全積分の値はゼロとなる。

このことから(b)に示したような動径方向の線分と弧からなるどんな経路に沿っても B の線積分の値がゼロになることもわかる。

よって導線を取り囲まないどんな経路でも、 B の線積分はゼロになることがわかる。ごつごつした角を丸めるためには小さな三角形の辺上の経路での線積分が消えてしまうことを示せばよい。小さな三角形をくっつけていくと、隣り合う2つの三角形で共通に重なる辺上の線積分は大きさが等しく反対符号になるので打ち消しあってしまう最後には一番外側の外周上の線積分だけが残ることになるので滑らかな経路を考えることができるのである。

導線を取り囲まない経路は(c)のような経路であり、仮にこの経路が糸からできているとして、引っ張っても導線に引っかからない。このような経路上ならどんなものでもその線積分はゼロとなる。

導線を取り囲む(d)のような円周路を考えよう。この円周の長さは $2\pi r$ 、 B の大きさは $\mu_0 I / 2\pi r$ である。 B の方向は常に円の接線と平行であるから、線積分の値は $(2\pi r)\mu_0 I / 2\pi r = \mu_0 I$ である。

ここで、導線を1回囲むとどんな経路でも(d)の場合と同じ線積分の値になることも示すことができる。

例えば(e)のような経路 C を考える。さらにこの経路に小さな切込みを入れてそこに円周路をつけくわえ(f)の形の経路 C' を作る。できた経路 C' は導線を囲まないように作る。 C' に沿う線積分は導線を取り囲まないからゼロであるので、 C に沿う線積分は既に(d)で求めた円周に沿う線積分の値から $-\mu_0 I$ の符号を変えた $\mu_0 I$ に等しいことがわかる。線積分の符号は明らかに経路の進み方の向きに依存している。

ここでの一般的な結論は

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 \times [\text{取り囲まれた電流}] \quad (6.10)$$

である。この結論は周回積分経路が電流を一度まわったとき成立する。

(g)のような電流を N 回まわる経路の右辺は N 倍となることは明らかであろう。

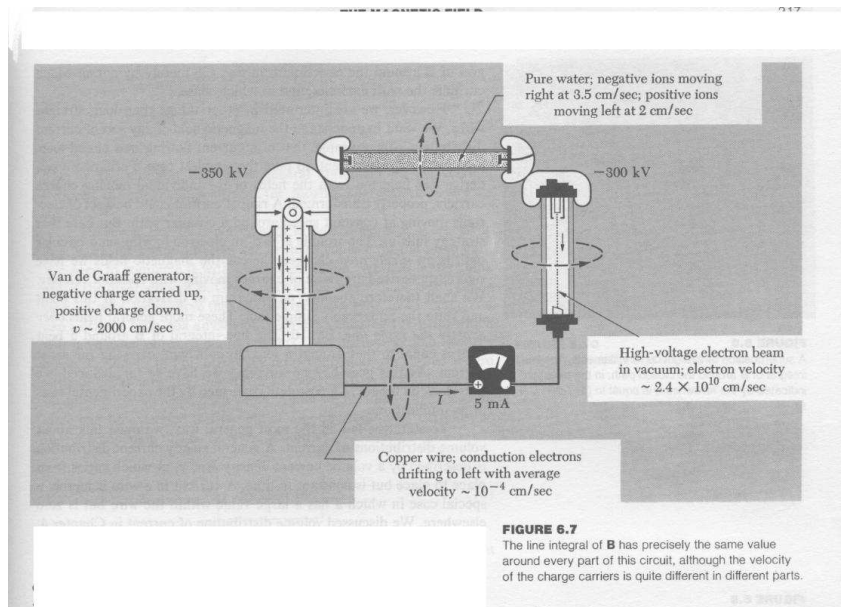
磁束密度は既に強調したように電荷輸送の変化率、つまり回路中でのある1点を通過する1秒あたりの電荷の値で決まってしまう。

FIGURE 6.7は5mAの電流が流れている回路を示している。

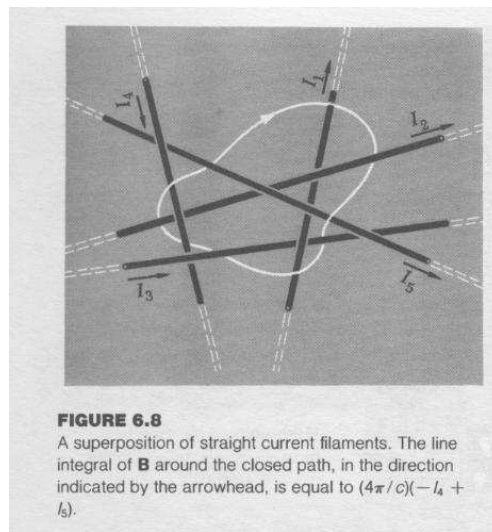
荷電粒子の速さは回路のある部分では 10^{-6} m/sであるが、他の部分では光速の0.8倍になるといふ具合に広い範囲にわたっている。しかし、閉曲線上での B の線積分の値は、この回路のどの部分で求めても同じ値になる。

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 I = 4\pi \times 10^{-7} \times 5 \times 10^{-3} = 6.28 \times 10^{-9} [\text{T} \cdot \text{m}] \quad (6.11)$$

である。



重ね合わせの原理から1本の直線電流について示したことを複数の直線電流からなる系にすぐ拡張できる。FIGURE 6.8は何本かの導線が異なる方向に電流を流している系である。



一般的結論 (6.10) 式が一つ一つの導線についてなりたてば、各点での磁束密度は個々の導線による磁束密度のベクトル和であるのでこうして得られる磁場についても式 (6.10) は成立する。FIGURE 6.8 の閉曲線に沿う \mathbf{B} の線積分の値は閉曲線が個々の電流をどちら向きに取り囲むかで決まってしまう。

直線電流以外の一般的な系についても考えたい。

最も簡単な例は円電流であるが、円運動している個々の電荷による磁束密度を正しく変換すれば得られるだろう。けれども、円運動している電子は加速度運動を行っている。前に厳密に導いた磁束密度は一定の速度で動いている電荷によるものであったので、同じやり方の適用をあきらめなければならない。

一般の系でも式 (6.10) は成立することを実験的要請として受け入れよう。

曲った導線に関しても、 \mathbf{B} の線積分は電流が等しい直線電流の場合の線積分に等しい。

この法則を一般的に述べるために電流の空間分布を考える。

一般の定常的電流分布は時間的に一定の電流密度 $\mathbf{J}(x, y, z)$ により記述される。

導線を流れる電流の \mathbf{J} は導線内でのみ値をもち、外ではゼロという単純な関数である。

第4章で時間に依存しない電流では、連続の方程式は

$$\operatorname{div} \mathbf{J} = 0 \quad (6.12)$$

となることを述べた。

電流が流れている領域に閉曲線 C を描く。 C によって囲まれる電流とは C を縁とする面 S を通り抜ける \mathbf{J} の束からなる。則ち S 上の面積分 $\int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a}$ である。

よって (12) 式の一般的命題は

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a} \quad (6.13)$$

となる。

Stokes の定理は

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 \int_S \operatorname{curl} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{a} \quad (6.14)$$

であったので、(6.13) 式と等価な微分形

$$\operatorname{curl} \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} \quad (6.15)$$

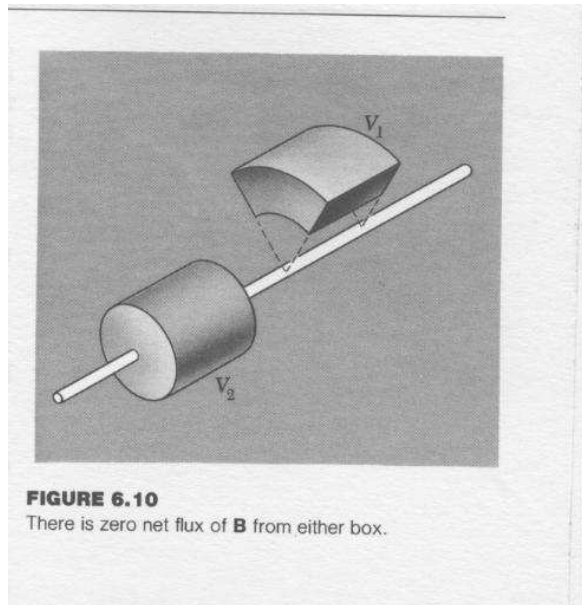
が得られる。これが動いている電荷とそれにより生ずる磁束密度の関係をもっと簡単かつ一般的に述べた命題である。

電流密度が与えられたとしても (6.15) 式だけでは \mathbf{B} を定められない。異なるベクトル場でも同じ curl の値を持つことがあるからである。

\mathbf{B} の発散を考えよう。直線電流の作る磁束密度の発散がゼロになることがわかる。導線を取り囲む箱を描いたとき、正味の磁束が出る、あるいは入るようなものは描けない。FIGURE 6.10 の箱 V_1 および V_2 の出入りする磁束の正味の値はゼロであるから、事態を何も変えずに、大きさをゼロに縮めることができる。よってこの磁束密度に対しては

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$$

である。直線電流が複数あってできている場についても重ね合わせにより磁束密度の発散はゼロである。



任意の電流配置が作る磁束密度に対してはまたも要請として直線電流の場合を拡張して

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \quad (6.16)$$

という条件をおく。

以下では磁場の源になる電流が有限な領域内にある磁場を考えよう。無限に離れた source は考えない。

\mathbf{J} があたえられたとき (6.15) 式と (6.16) 式の 2 つから \mathbf{B} が一意的に定まる。

というのも、仮に 2 つの異なるベクトル場 \mathbf{B}_1 と \mathbf{B}_2 がこの 2 つの式を満たしたとする。このとき差のベクトル場 $\mathbf{D} = \mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2$ はいたるところゼロなる発散、ゼロなる回転 (curl) である。

curl がどこでもゼロということから \mathbf{D} はある potential 関数 $f(x, y, z)$ の勾配 $\mathbf{D} = \nabla f$ であたえられる。しかし $\nabla \cdot \mathbf{D} = 0$ でもあるので、いたるところ $\nabla^2 f = 0$ となっている。境界を含む十分な遠方では f は何らかの定数 f_0 になっていなければならない。境界を含む十分な遠方では f は何らかの定数 f_0 になっていなければならない。 f は境界の中の全ての点で Laplace 方程式をみたす。よってこの領域内ではどこにも最大値または最小値をとることができない (2.11 節参照)。故に $\mathbf{D} = \nabla f = 0$ 、すなわち $\mathbf{B}_1 = \mathbf{B}_2$ である。

静電場の場合、(6.15) 式と (6.16) 式に対応するのは

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \text{と} \quad \operatorname{curl} \mathbf{E} = 0 \quad (6.17)$$

であった。

電場の場合は Coulomb の法則から出発した。Coulomb の法則により任意の点で電荷の電

場への寄与を直接できた。次節ではこれと同様に電流素片⁴の作るポテンシャル関数を用いて磁束密度を表してみる。

6.3 Vector Potential (ベクトルポテンシャル)

電荷分布 $\rho(x, y, z)$ による静電場の計算は Scalar Potential 関数 $\phi(x, y, z)$ によって簡単になった。

任意の点 (x_1, y_1, z_1) でのポテンシャル (電位) は体積積分

$$\phi(x_1, y_1, z_1) = \int \frac{\rho(x_2, y_2, z_2)}{4\pi\epsilon_0 r_{12}} dv_2 \quad (6.18)$$

であたえられる。ここで積分は全ての電荷分布にわたって行われ、 r_{12} は (x_2, y_2, z_2) から (x_1, y_1, z_1) までの距離である。

電場 \mathbf{E} は ϕ の勾配に負符号をつけて得られる。

$$\mathbf{E} = -\text{grad } \phi \quad (6.18)$$

磁場の場合は静電場と全く同じにはできない。curl \mathbf{B} は必ずしもゼロではないので、 \mathbf{B} をスカラー関数の勾配と表せないからである。しかし、別の微分演算であるベクトル関数の回転を使って表すことができる。

$$\mathbf{B} = \text{curl } \mathbf{A} \quad (6.20)$$

Scalar Potential との類推で \mathbf{A} を Vector Potential (ベクトルポテンシャル) という。この段階ではこのポテンシャルの利点は明らかでないが、話を進めて行くうちにはっきりして来る。

式 $\mathbf{B} = \text{curl } \mathbf{A}$ のようにとると、div $\mathbf{B} = 0$ は任意の \mathbf{A} に対し div curl $\mathbf{A} = 0$ (Problem 2.16) であるので自動的に満たされる。

ここでなすべきことは電流密度 \mathbf{J} があたえられたとき \mathbf{A} をどうやって求めるかということを考えることである。

curl $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$ に $\mathbf{B} = \text{curl } \mathbf{A}$ を代入すると

$$\text{curl}(\text{curl } \mathbf{A}) = \mu_0 \mathbf{J} \quad (6.21)$$

となる。これはベクトル方程式であり、3つの方程式である。

x 成分に対する方程式を考えよう。curl の成分を書き下せば

$$B_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \quad B_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \quad B_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \quad (6.22)$$

⁴ある素片を他の素片から離して実験することはできないが。

であるから、 $\text{curl}(\text{curl } \mathbf{A}) = \mu_0 \mathbf{J}$ の x 成分は

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) = \mu_0 J_x \quad (6.23)$$

となる。

偏微分の順序を変えても良い関数であると仮定しよう。この式は次のように書ける。

$$-\frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial A_y}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial A_z}{\partial z} \right) = \mu_0 J_x \quad (6.24)$$

さらに

$$\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2}$$

を足して引くと添字に対して対称的になる。

$$-\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) = \mu_0 J_x \quad (6.25)$$

この式の第1の部分は A_x の Laplacian にマイナス符号をつけたもの、第2の部分の括弧内の量は \mathbf{A} の発散である。

\mathbf{A} の curl である \mathbf{B} が一意的に決まれば良いので、 \mathbf{A} には自由度がある。

\mathbf{A} の発散を次のように要請してかまわない⁵。

$$\text{div } \mathbf{A} = 0 \quad (6.26)$$

言い方を変えると $\text{curl } \mathbf{A} = \mathbf{B}$ の要求をみたす多くの関数の中から発散がゼロになるものだけにしぼって考えようというわけである。

このとき

$$\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} = -\mu_0 J_x \quad (6.27)$$

が成立することになる。ここで J_x は x, y, z の関数としてわかっているスカラー関数とみなせる。

この式と静電場の Poisson 方程式

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (6.28)$$

を比べると全く同じ型であるので、Vector Potential の成分に対する解は体積積分で

$$A_x(x_1, y_1, z_1) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{J_x(x_2, y_2, z_2) dv_2}{r_{12}} \quad (6.29)$$

⁵ $\text{curl } \mathbf{A} = \mathbf{B}$ であるが、発散がゼロではなく $\text{div } \mathbf{A} = f(x, y, z) \neq 0$ であるとする。ここで静電場に対する Gauss の法則が $\text{div } \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0$ であり、 $\text{curl } \mathbf{E} = 0$ であったことを想起しよう。この解は存在していたので類推から $\text{div } \mathbf{F} = f$ であり、 $\text{curl } \mathbf{F} = 0$ となるようなベクトル場 \mathbf{F} を見つけることができる。 \mathbf{A} から \mathbf{F} を引くと $\text{curl}(\mathbf{A} - \mathbf{F}) = \mu_0 \mathbf{J}$ かつ $\text{div}(\mathbf{A} - \mathbf{F}) = 0$ となるので、あらためて $\mathbf{A} - \mathbf{F}$ を \mathbf{A} とすれば $\text{div } \mathbf{A} = 0$ となる。

とあたえられる。

もちろん、他の成分も同様の表式をみたすのですべてをベクトル記号で表すと

$$\mathbf{A}(x_1, y_1, z_1) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}(x_2, y_2, z_2) dv_2}{r_{12}} \quad (6.30)$$

となる。

この解の発散がゼロになるということも示すことができる⁶。

Vector Potential の一例として、電流 I が流れている直線の導線の導線を考えよう。

FIGURE 6.11

Some field lines around a current filament. Current flows toward you (out of the plane of the paper).

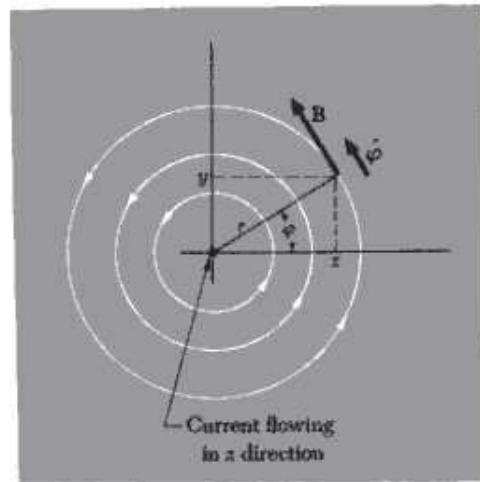


FIGURE 6.11 は紙面から出てくる向き (これを z の正の向きとする。) に流れる電流を示している。この直線電流の磁束密度はわかっていて、3本の磁力線は FIGURE 6.5 に既に示したが円を描く。磁束密度の大きさは $B = \mu_0 I / 2\pi r$ である。単位ベクトル $\hat{\phi}$ は $-\sin \phi \hat{x} + \cos \phi \hat{y}$ であるので、磁束密度は

$$\hat{\mathbf{B}} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{-\sin \phi \hat{x} + \cos \phi \hat{y}}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{-y \hat{x} + x \hat{y}}{x^2 + y^2} \quad (6.32)$$

となる。

$\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}$ をみたすベクトル関数 \mathbf{A} として次のものがある。

$$\mathbf{A} = -\hat{z} \frac{\mu_0 I}{4\pi} \ln(x^2 + y^2) \quad (6.33)$$

⁶YC 注: 自明ではないが

$\nabla \times \mathbf{A}$ の各成分を計算すると磁束密度が正しく再現されることがわかる。

$$\begin{aligned} (\nabla \times \mathbf{A})_x &= \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = -\frac{\mu_0 I y}{2\pi(x^2+y^2)} \quad (= B_x) \\ (\nabla \times \mathbf{A})_y &= \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} = \frac{\mu_0 I x}{2\pi(x^2+y^2)} \quad (= B_y) \\ (\nabla \times \mathbf{A})_z &= \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} = 0 \quad (= B_z) \end{aligned} \quad (6.34)$$

この磁束密度を再現するベクトル関数は上述のベクトル関数が唯一のものではない。回転がゼロとなるベクトル関数であれば何を足しても良い。

導線の外側ではこの Vector Potential でよいが、導線の中側では \mathbf{B} が異なるので \mathbf{A} も異なる。中側の正しい Vector Potential を見つけるのは難しくはない (Problem 6.26 を参照)。

ただし、ここで考えている無限に長い導線の例では (13) 式は発散積分となってしまうので使えない。この事情は同様の幾何学からなる帯電直線の作る Scalar Potential (電位) につきまとう困難と同じである。このスカラー関数は $-\lambda \ln(x^2 + y^2) + \text{任意定数}$ であった。ゼロポテンシャルを導線上ではなく無限遠でもない適当な点にとった。ここでの直線電流の作る磁場に関する Vector Potential もやはり原点および無限遠は特異点になっている。

6.4 Field of Any Current-Carrying Wire (電流の作る磁束密度)

FIGURE 6.12 はループ状の導線を電流が流れている図である。

点 (x_1, y_1, z_1) における Vector Potential はループの各点での電流密度とその点から問題にしている空間の点までの距離の比のループ全体にわたって体積積分すれば求まるはずである。

しかし細い導線が一様で一様な電流密度の場合は回路に沿う線積分で導線の外側での Vector Potential を求めることができる。導線の断面積を a とし、導線の微小な長さを dl とすると導線の微小体積 dv_2 は $dv_2 = a dl$ となる。電流密度の大きさは $J = I/a$ であるから $J dv_2 = I dl$ となる。電流 I の流れる向きを持ち、大きさが dl の vector $d\boldsymbol{\ell}$ を考えると $\mathbf{J} dv_2 = I d\boldsymbol{\ell}$ と書ける⁷。

細い導線を通る電流が作る Vector Potential は回路の線積分として書き下すことができる。

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{d\boldsymbol{\ell}}{r_{12}} \quad (6.35)$$

しかし空間の各点で $\mathbf{B} = \text{curl } \mathbf{A}$ を計算するのは大変な仕事量になり実用的ではない。そこで、 \mathbf{A} に対する上述の線積分の一部の寄与だけを取りだして扱おう。FIGURE 6.13 で示したように電流がたまたま x 方向に流れている導線の部分を原点とする座標系を設けて、その部分の微小区間の寄与を取りだすことにする。

⁷YC 注: この右辺を電流素片とよぶ。

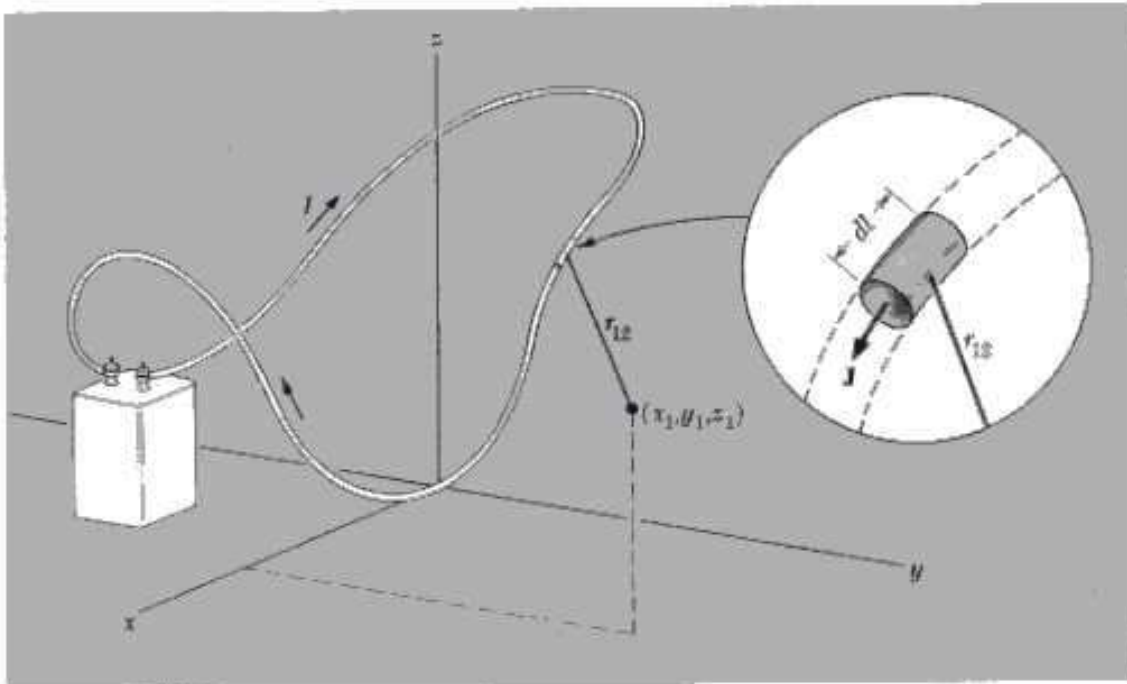


FIGURE 6.12

for a thin wire or filament, we can write Eq

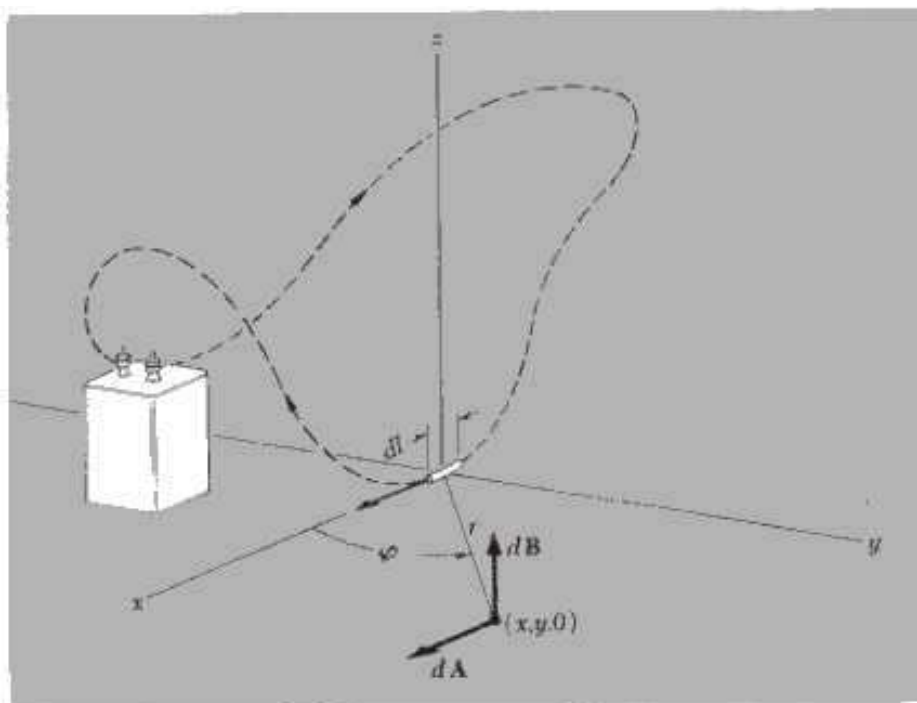


FIGURE 6.13

この微小部分の長さを dl とし、この微小区間の \mathbf{A} に対する積分への寄与を $d\mathbf{A}$ と表す。 xy 平面上の点 $(x, y, 0)$ において $d\mathbf{A}$ は x の正方向を向いているが

$$d\mathbf{A} = \hat{\mathbf{x}} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{dl}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad (6.36)$$

となる。

この部分の curl は対称性から明らかに xy 平面と直交する。 \mathbf{B} に対するこの微小区間の寄与を $d\mathbf{B}$ と書くことにすると

$$d\mathbf{B} = \text{curl } d\mathbf{A} = -\hat{\mathbf{z}} \frac{\partial A_x}{\partial y} = \hat{\mathbf{z}} \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dl y}{(x^2 + y^2)^{3/2}} = \hat{\mathbf{z}} \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dl \sin \phi}{r^2} \quad (6.37)$$

この結果を特定の座標系の成分を使わないで書くことができる。鍵は素片 dl から $d\mathbf{B}$ を求める点までの変位 $d\mathbf{r}$ と素片のなす相対的な方向である。

任意の位置での導線上の微小区間 dl の \mathbf{B} への寄与は dl と \mathbf{r} を含む平面に直交する vector となる。その大きさは ϕ を dl と \mathbf{r} のなす角であるとする $\mu_0 I dl \sin \phi / 4\pi r^2$ である。これを外積で表すと FIGURE 6.14 に示したように

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\mathbf{l} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2} \quad (6.38)$$

となる。

$\nabla(1/r) = -\hat{\mathbf{r}}/r^2$ を使うと

$$d\mathbf{B} = \nabla \times \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\mathbf{l}}{r} = -\frac{\mu_0}{4\pi} I d\mathbf{l} \times \nabla \frac{1}{r} = -\frac{\mu_0}{4\pi} I d\mathbf{l} \times \left(-\frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2}\right) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\mathbf{l} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2} \quad (6.39)$$

となる。

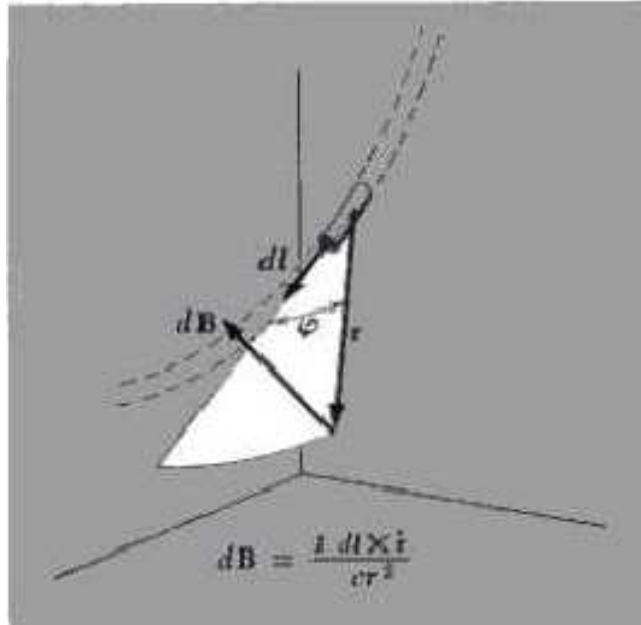
これは歴史的には Biot-Savart の法則として知られているものである。この公式で与えられる各素片の寄与を回路全体にわたって積分すると \mathbf{B} が正しく得られる。

回路の一部分の寄与は一意的には定まらない。閉曲線に沿って積分したときゼロとなるような関数を勝手につけくわえても良いのである。

Vector Potential を Biot-Savart の法則を導いた途端に忘れてしまったかのように見えるかも知れない。実際、多くの場合、Biot-Savart の法則を使って直接電流系の場を求める方が Vector Potential をまず求めてからやるより簡単である。次節でいくつか例題を解くが、Vector Potential はより深い理由によって重要なものになっている。一例として挙げると、電場 \mathbf{E} とその source である電荷の関係と、磁束密度 \mathbf{B} と定常電荷の関係との間の明確な類似性を Vector Potential があらわしたのであった。最大の実用性は時間的に変動する場や電磁放射の際に現われる。

FIGURE 6.14

The field of any circuit can be calculated by using this relation for the contribution of each circuit element.



6.5 Field of Rings and Coils (円輪電流とコイルの作る磁束密度)

FIGURE 6.15(a) に半径 b の円周上を流れる電流を示した。

計算をしなくても円の中心を通り、円と直交する対称軸を含む面での磁力線の様子は FIGURE 6.15(b) のようになっていることがわかる。

磁束密度はこの対称軸 ((a) の z 軸) に関して回転対称性を持ち、磁力線は xy 平面に関して対称でなければならない。非常に導線に近い磁場は直線電流による磁場のようなであろう。というのも円電流の遠く離れた部分はそれほど寄与しないはずだから。

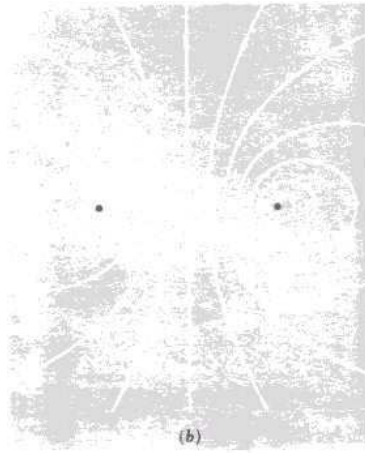
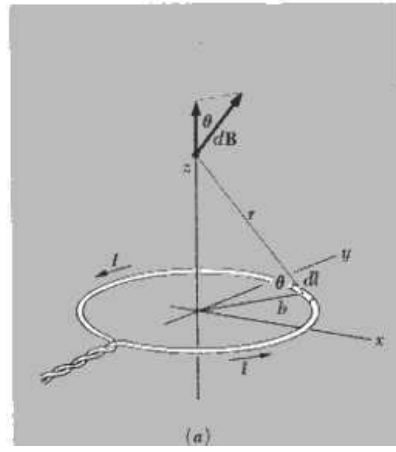
z 軸上の磁束密度を Biot-Savart の法則から求めるのは簡単である。

環の長さ dl なる素片は r と直交する $d\mathbf{B}$ を作る。 z 軸上では \mathbf{B} は z 方向を向くので $d\mathbf{B}$ の z 成分だけを考えれば良い。

$$dB_z = \frac{\mu_0 I dl}{4\pi r^2} \cos \theta = \frac{\mu_0 I dl b}{4\pi r^2 r} \quad (6.40)$$

環全体にわたって積分すると $\oint dl = 2\pi b$ だから、 z 軸上の任意の点 z での磁束密度は

$$B_z = \frac{\mu_0 b^2 I}{2 r^3} = \frac{\mu_0 b^2 I}{2 (b^2 + z^2)^{3/2}} \quad [\text{軸上で}] \quad (6.41)$$



環の中心は $z = 0$ であり、そこでの磁束密度は

$$B_z = \frac{\mu_0 I}{2b} \quad [\text{中心で}] \quad (6.42)$$

となる。

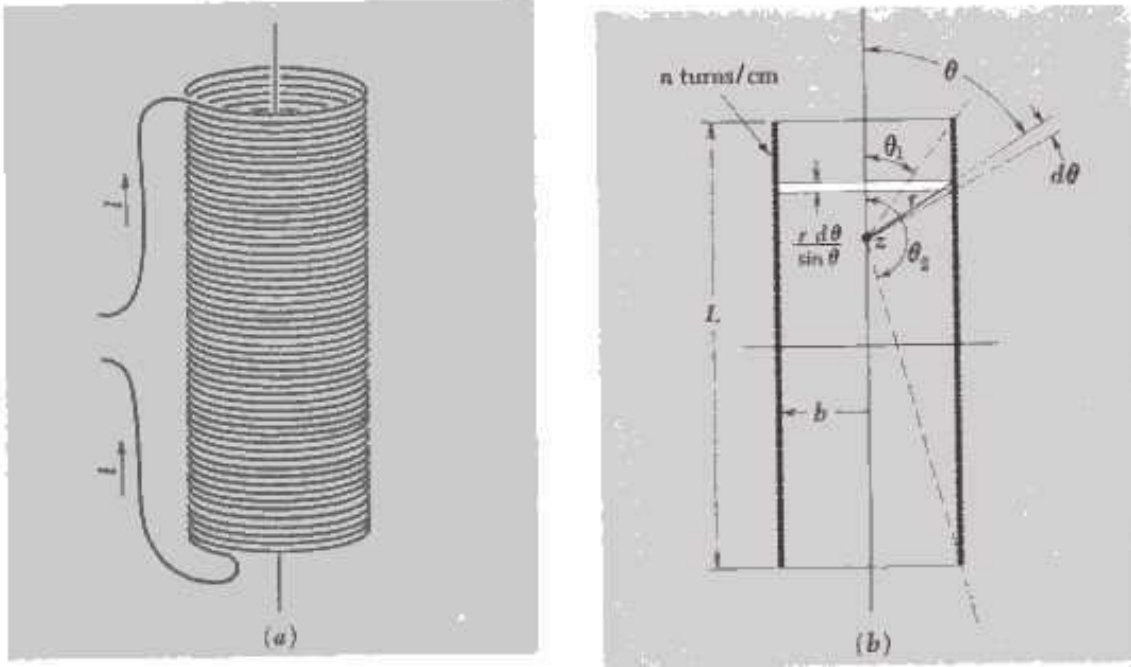


FIGURE 6.16(a) で示された円柱状に巻きつけられた導線によるコイルをソレノイドという。導線は同じ間隔できっちり稠密に巻かれており円柱に沿った単位長さあたりの巻数を n としよう。実際の電流は螺旋状に流れるわけであるが、巻数が膨大で、巻方も稠密であれば螺旋を無視して円電流が積み重なったものがソレノイドであると見做せよう。このとき、コイルの中心軸上の点 z のところでの磁束密度は基本的に前述の円電流の場合の拡張であるとして扱えよう。

まず点 z から引いた動径と中心軸のなす角が θ と $\theta + d\theta$ となる間にある環状電流層からの寄与を考える。この部分のソレノイドの長さは FIGURE 6.16(b) に示された部分であるが、 $r d\theta / \sin \theta$ となる。よって電流 $Inr d\theta / \sin \theta$ が流れる環状導線と等しい。 $r = b / \sin \theta$ より、この環状電流が中心軸上の点 z に作る微小磁束密度は

$$dB_z = \frac{\mu_0 b^2 Inr d\theta}{2 r^3 \sin \theta} = \frac{\mu_0 In}{2} \sin \theta d\theta \quad (6.43)$$

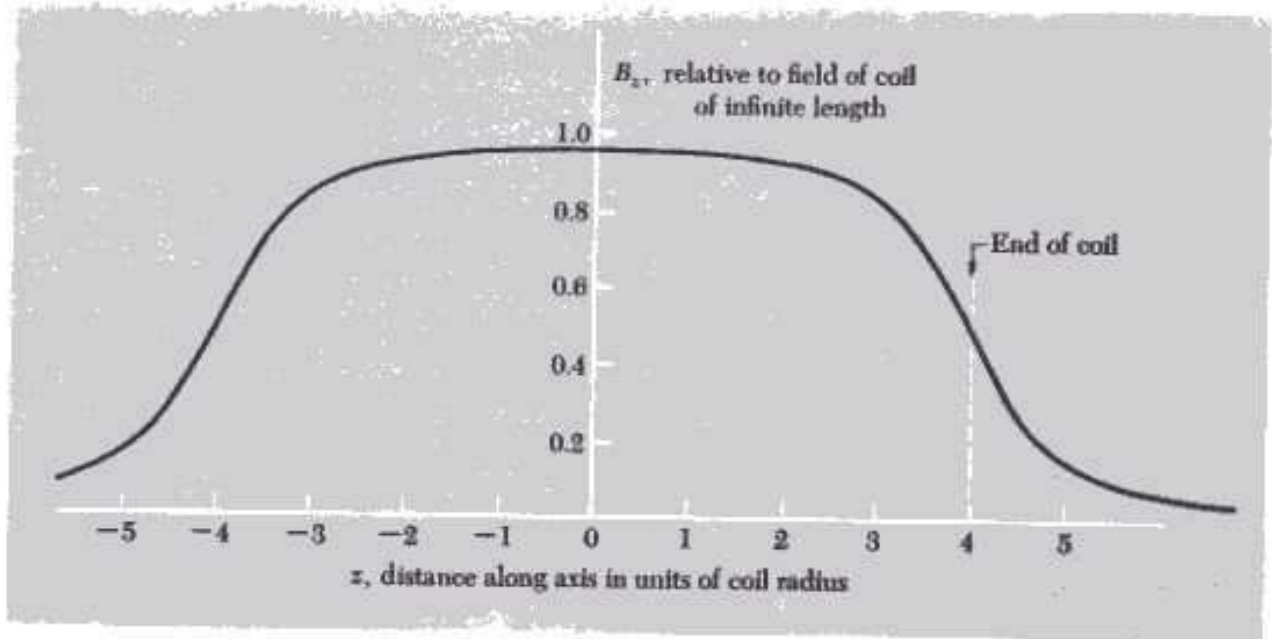
である。

上端の角 θ_1 と下端の角 θ_2 まで θ で積分すると

$$B_z = \frac{\mu_0 In}{2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sin \theta d\theta = \frac{\mu_0 In}{2} (\cos \theta_1 - \cos \theta_2) \quad (6.44)$$

となる。

この式を用いて FIGURE 6.17 に長さが直径の 4 倍 ($L = 8b$) のときのコイルの軸上の磁束密度のグラフを示した。



縦軸はこの B_z と同一巻数で同一電流の無限に長いコイルの B_z との比である。無限に長いコイルでは $\theta_1 = 0$ かつ $\theta_2 = \pi$ であるから

$$B_z = \mu_0 I n \quad (\text{無限に長いコイル}) \quad (6.45)$$

である。

この 4 対 1 の比のコイルの中心ではほぼ無限に長いコイルの B_z に等しく、端に近づくまでかなりの間一定のままである。

FIGURE 6.18 は 4 対 1 の比のコイルの中側と近辺の外側の磁力線を示している。巻き線を通り抜ける磁力線が何本かあることに注意せよ。電流の円柱面は磁束密度の不連続面である。導線近辺を子細に検討すれば折れ曲がりのような不連続性はなく、複雑な形状になっているはずである。

長いソレノイドを薄くて幅の広い導体を FIGURE 6.19 のように一卷して作ることができる。

この例では FIGURE 6.18 の計算で nl を単位長さあたりの板電流で置き換えれば正確に答えが求まる。板を貫くときの磁力線の変化は FIGURE 6.19 中に示したように板の厚みを考えればその中で起こることになる。

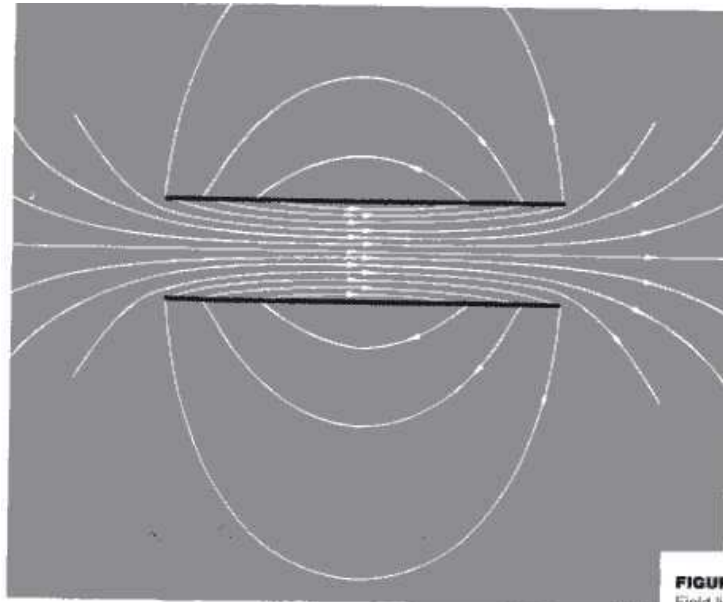


FIGURE 6.18
Field lines in and around

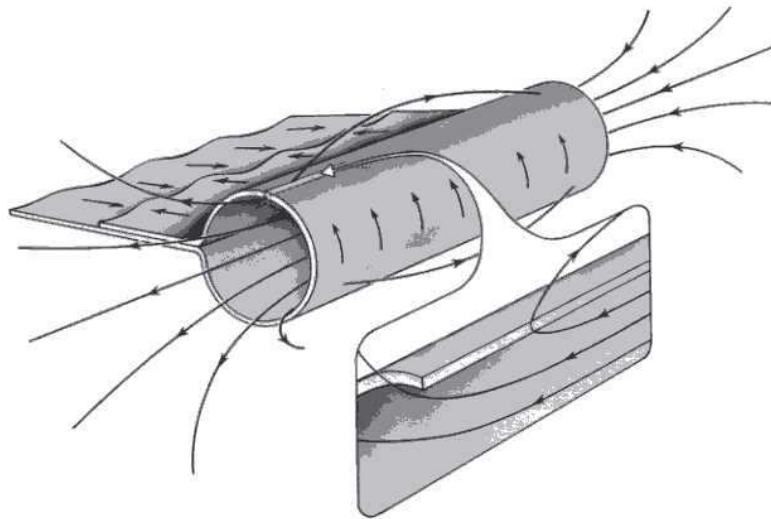


FIGURE 6.19

The cylindrical shell of current is a surface of discontinuity

FIGURE 6.16のソレノイドの磁場を求めたとき、ソレノイドを円環電流の積み重なったものとして扱い、その一端から他端へぬける縦方向の成分を存在するにもかかわらず無視していた。この成分の効果について考えてみる。

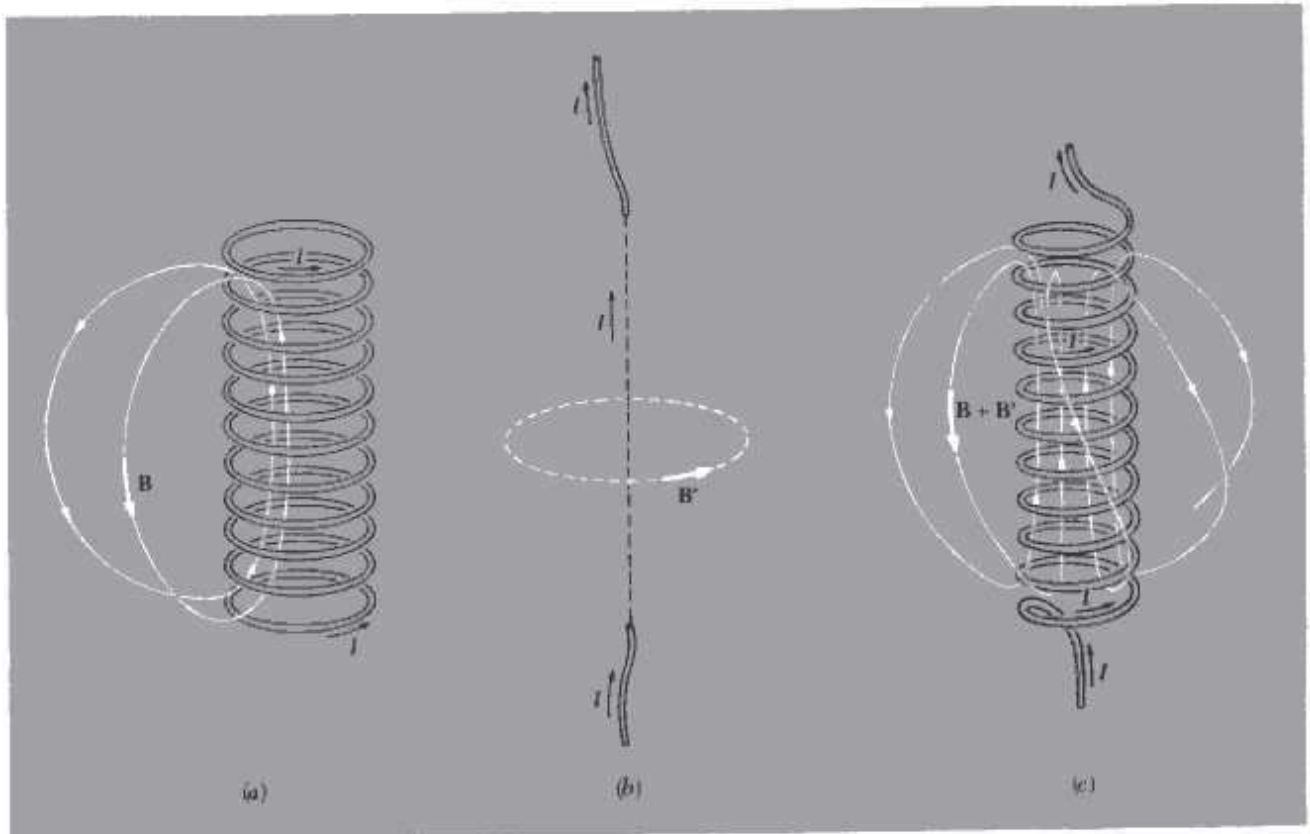


FIGURE 6.20

ソレノイドの外側の磁場に関する限り FIGURE 6.20の螺旋状のコイルは (a) 図の積み重なった円輪電流の作る場と (b) 図の一つの軸からなる導体を流れる電流の作る磁場の重ね合わせに等しい。後者の磁束密度 B' を前者の磁束密度 B に加えるとコイルの外側の磁束密度が得られる。結果はねじれた螺旋状の磁力線となる。(c) 図にそれを示した。ソレノイドの内側の磁場について言うと、縦方向の電流は円柱面上を流れる。一様な中空円筒電流分布による磁場では円筒の内部にはゼロなる磁束密度しかあたえない。よって、前に求めた内側の場が変わることはない。

螺旋状磁力線を内→外→内へと追跡していくと閉じていないことがわかる。一般的には磁力線は必ずしも閉じないのである。コイルから遠方に電流を流す導線をさらに中心軸上に沿って再びおろしてコイルの底とつないだとき、磁場がどう変わるか考えてみよ。

6.6 Change in B at A Current Sheet (電流面での B の変化)

一枚の導体板を曲げて電流を流すソレノイドの例を FIGURE 6.19 で考えた。ここでは最も単純な一枚の導体平面を考えよう。

厚さが一様な銅板に同一方向かつ一様な電流密度で電流が流れているとする。 xz 面上に銅板があり、 x 方向に電流が流れているとする。無限に広がっていて端のない銅板を考えているので絵を描くことができない。FIGURE 6.21 はその一部を示している。これが全平面に広がっていると想像せよ。

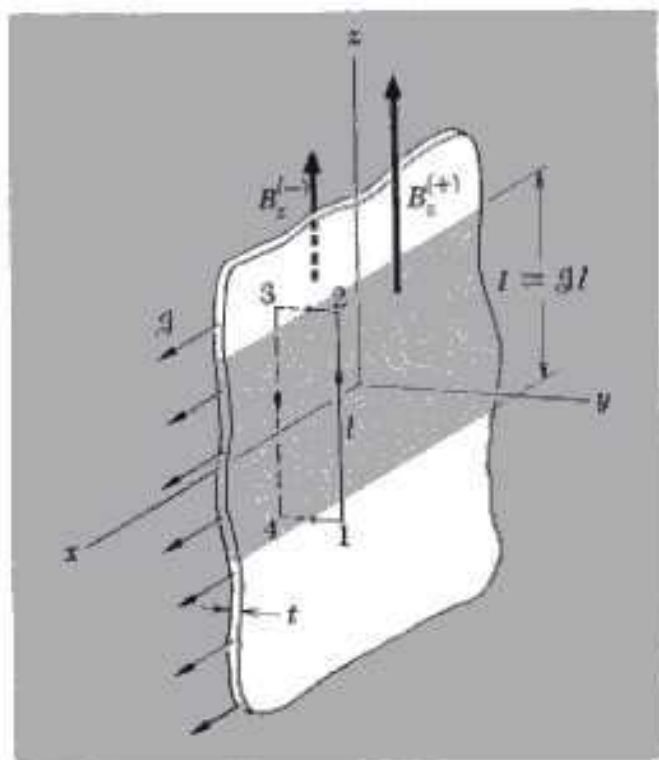


FIGURE 6.21

At a sheet of surface current there must be a change in the parallel component of \mathbf{B} from one side to the other.

厚みは結果には重要ではないが一応 t と置いておこう。金属内の電流密度を J と書くと z 方向の単位長さあたり Jt の帯状電流が流れていることになる。これを表面電流密度とよび、電流密度 J と区別して記号 \mathcal{J} で表そう。 \mathcal{J} の単位は $C/s \cdot m$ である。銅板内部で起こっていることを問わない限り \mathcal{J} が役に立つ。以下でみるように面の片側から反対側への磁束密度の変化を決めるのが \mathcal{J} である。

FIGURE 6.21 の磁束密度は面電流によるもの以外の sources から z 方向の磁束密度があってもよい。図には面電流による寄与も含んだ全磁束密度 \mathbf{B} が平面の前面と後面で表されている。

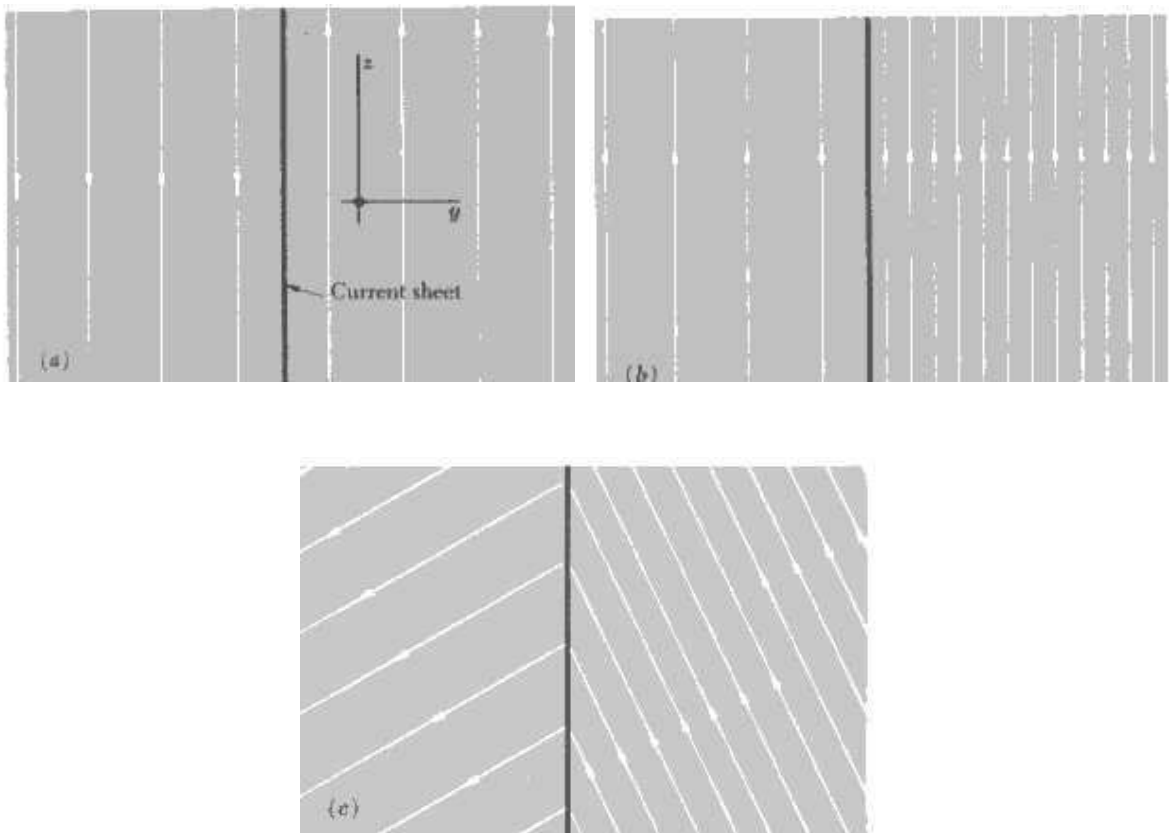
FIGURE 6.21 の長方形 12341 の辺に沿う \mathbf{B} の線積分を考えよう。前面と後面に長い辺が、面を貫いて短い辺がある。 B_z^+ で前面の直前の磁束密度の z 成分を、 B_z^- で後面の直ぐ後の磁束密度の z 成分を表す。充分長い長方形の周回線積分は $l(B_z^+ - B_z^-)$ となる (たとえ短辺に平行な磁束密度成分が面電流以外の sources から作られたとしても銅板は充分薄いとしているため、短辺の寄与は長い辺の寄与に比べて無視できる)。

この長方形により取り囲まれる電流は $l\mathcal{J}$ である。よって $l(B_z^+ - B_z^-) = \mu_0 l\mathcal{J}$ 、つまり

$$B_z^+ - B_z^- = \mu_0 \mathcal{J} \quad (6.46)$$

を得る。

面電流密度 \mathcal{J} の電流は \mathcal{J} とは直交する面に平行な \mathbf{B} の成分に飛びを引き起こす。ちょうど面上荷電分布が電場の飛びを生じたことを思いださせる。その場合は \mathbf{E} の直交成分不連続性を持ち、飛びの大きさは電荷面密度であたえられた。



もしも銅板に流れる面電流だけが磁場の source であれば磁束密度は面に関して対称になる。 $B_z^+ = \mu_0 \mathcal{J}/2$ で $B_z^- = -\mu_0 \mathcal{J}/2$ である。FIGURE 6.22(a) にこれが描かれている。別の source が作る磁束密度に面電流の寄与が重ね合わされた図が FIGURE 6.22(b) と (c)

に描かれている。どの場合も B_z 成分は面の両側で $\mu_0 J$ だけ変わる。 B_y は変わらない。

FIGURE 6.23
The magnetic field between plane-parallel current sheets.

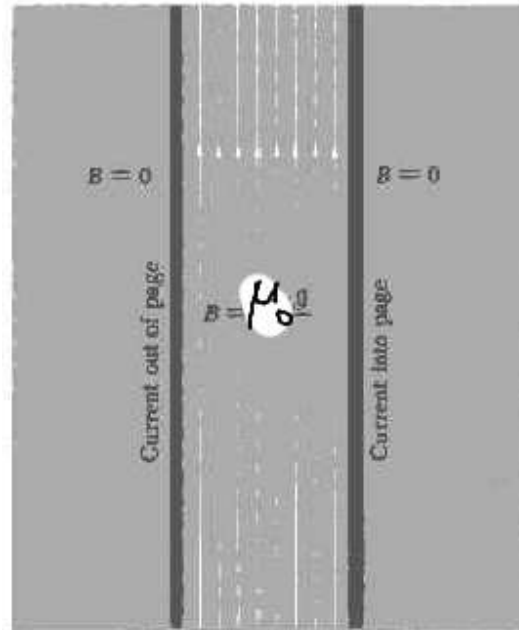
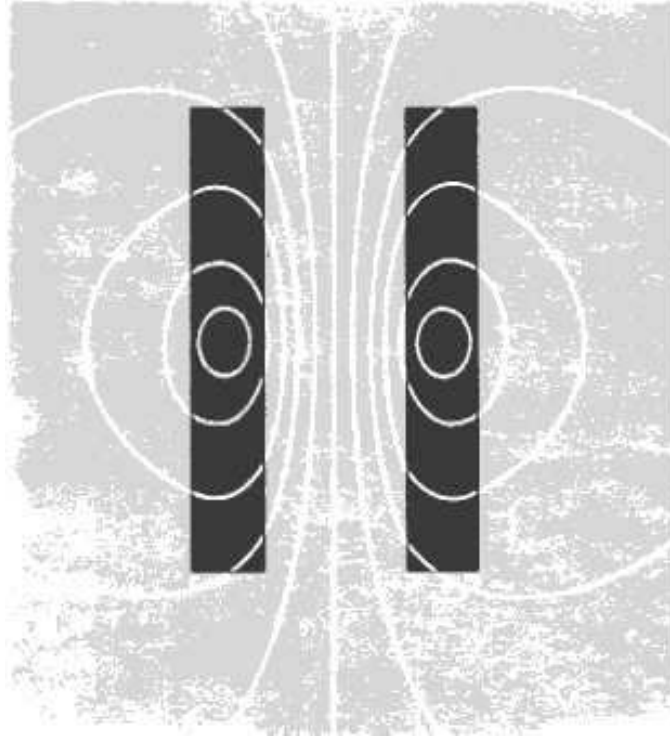


FIGURE 6.23に断面が示されている2枚の導体平面に大きさが等しく向きが反対の様な表面電流が流れている他には sources がない系を考えよう。電流の向きは紙面と直交し、左の面上では手前向きに、右の面上では奥に向かってしているとする。平面間領域の磁束密度は $\mu_0 J$ であり、外側の領域には磁場は存在しない。

これと似た状況が FIGURE 6.24に描かれた大きさに比べて小さな間隔で向き合う2つの平行なリボン状あるいは厚板スラブの装置に電流が流れるとき生ずる。発電所にある強電流の流れるブス・バーはこの形をしている。

B の変化は FIGURE 6.19で関連的に述べたが、平面板の内部でおきる。 J が同じなら、板の厚みが薄ければ薄いほど変化が急激で唐突的に発生する。このことと面上の電荷により生ずる E の直交成分の不連続性は似ている。面上に一辺が 1m の正方形の部分を考えよう。この部分の電流は J に等しく、電流経路の長さは 1m である。電流が面を形成する薄い板の内部では一様に流れていると仮定すれば、この電流に力をおよぼす磁束密度の平均は $(B_z^+ + B_z^-)/2$ である。



故に、この正方形の部分の電流に働く力は

$$1\text{m}^2\text{の部分に働く力} = \frac{1}{2}(B_z^+ + B_z^-)\mathcal{J} \quad (6.47)$$

となる。

$B_z^+ - B_z^- = \mu_0\mathcal{J}$ であったから、板面に働く単位面積あたりの力は次のようになる。

$$\begin{aligned} 1\text{m}^2\text{の部分に働く力} &= \frac{B_z^+ + B_z^-}{2} \frac{B_z^+ - B_z^-}{2} \\ &= \frac{1}{2\mu_0} [(B_z^+)^2 - (B_z^-)^2] \end{aligned} \quad (6.48)$$

この力は静水圧により現われる応力のように面とは直交し、面積に比例する。符号を確かめるには FIGURE 6.23 のような特別な場合に現われる力の方向がわかればよい。このときの力は、各導体面の外向きに働く。磁束密度の大きい領域はあたかも高圧力領域のようでもある。電流が反対方向に流れている2つの導体 (FIGURE 6.24) も互いに斥けあうのはこの例であると思倣せる。

6.7 How The Fields Transform (電磁場の変換性)

表面電荷が存在する板面が自身に平行に動くとき、表面電流が発生する。一様電荷面密度が σ のこの面が速さ v で動いているとき面電流密度は $\mathcal{J} = \sigma v$ である。

この簡単な系はある慣性系から別の慣性系へ移ったとき、電磁場がどう変化するかを見るのに役に立つ。

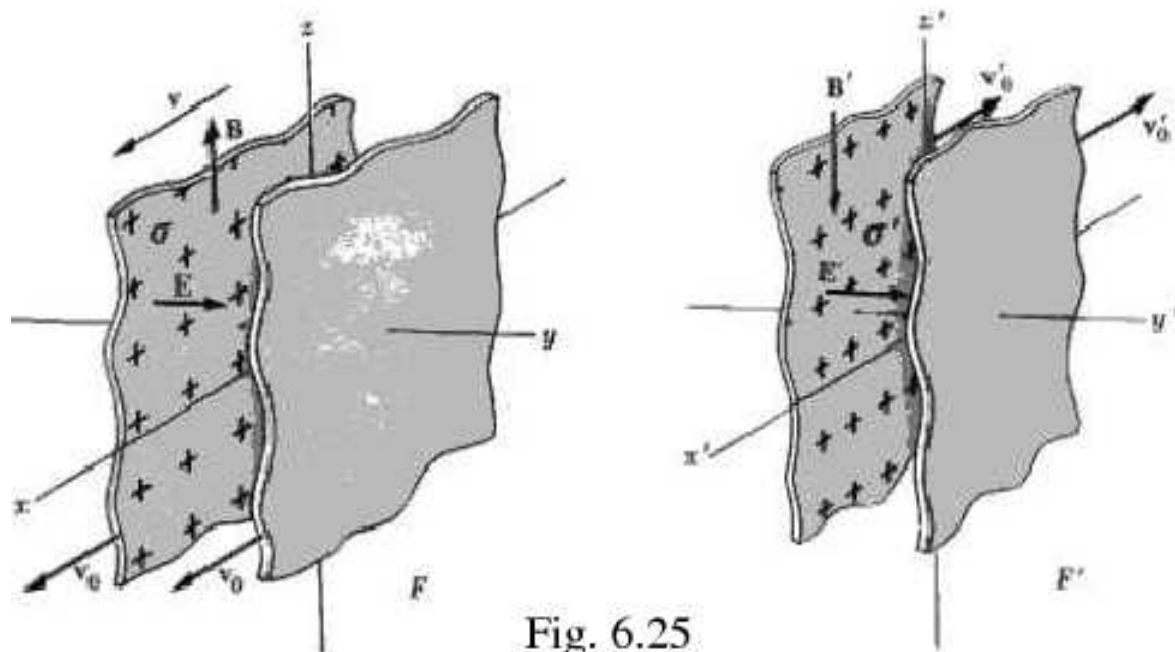


Fig. 6.25

FIGURE 6.25 のような xz 平面に平行な 2 枚の表面電荷を持つ極板を考える。これも無限に広がった面であるが、その一部だけを図示した。

慣性系 F での座標を x, y, z と表し、片方の面の電荷面密度を σ 、他方の面の面密度を $-\sigma$ とする。

σ は系 F で静止している観測者が測定したときの面積を用いた単位面積当たりの電荷を表す。(電荷自身の静止系ではない。そのときは $1/\gamma$ 倍だけ小さくなる。)

系 F での一様な電場 \mathbf{E} は y の正方向を向いていて、Gauss の法則からこの大きさは

$$E_y = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad (6.49)$$

であることが示される。

系 F では 2 枚の面はどちらも x の正方向に速さ v_0 で動いているから 2 枚とも電流面となっている。

一方の面電流密度は $\mathcal{J}_x = \sigma v_0$ で、他方はこのマイナス倍である。

配置は FIGURE 6.23 になっているので 2 枚の電流面間には

$$B_z = \mu_0 \mathcal{J}_x = \mu_0 \sigma v_0 \quad (6.50)$$

なる磁束密度が存在する。

慣性系 F' は F から見て x の正方向に速さ v で動いているとする。
系 F' の観測者はどんな場を測定するだろうか。
この質問は系 F' では sources がどのように見えるかということを考えるだけでわかる。

F' での荷電面の x' 方向の速度成分を v'_0 と書くことにすると、速度の合成則より

$$v'_0 = \frac{v_0 - v}{1 - v_0 v / c^2} = c \frac{\beta_0 - \beta}{1 - \beta_0 \beta} \quad (6.51)$$

この系 F' では動いている直線状電荷の例 (5.9 節) で見たように電荷密度の Lorentz 収縮が起こっている。その例と同様にして考えると系 F から電荷の静止系に移った際の電荷面密度は $\sigma \sqrt{1 - v_0^2 / c^2} = \sigma / \gamma_0$ となるので、系 F' での電荷面密度 σ' は

$$\sigma' = \sigma \frac{\gamma_0'}{\gamma_0} \quad (6.52)$$

となる。ここで $\gamma_0' = 1 / \sqrt{1 - v_0'^2 / c^2}$ である。
前の速度の合成則の結果を用いて γ_0' を $\beta_0, \beta \gamma$ で表すことができ、その結果は

$$\sigma' = \sigma \gamma (1 - \beta_0 \beta) \quad (6.53)$$

となる。

系 F' の面電流密度 \mathcal{J}' は電荷面密度と電荷の速さの積である。

$$\mathcal{J}' = \sigma' v'_0 = \sigma \gamma (1 - \beta_0 \beta) c \frac{\beta_0 - \beta}{1 - \beta_0 \beta} = \sigma \gamma (v_0 - v) \quad (6.54)$$

こうして電荷面密度 σ' と面電流密度 \mathcal{J}' がどう見えるかわかったので系 F' での電磁場が求められる。相対論の要請で物理法則は全ての慣性系で同じでなければならず、表面電荷密度と電場の関係および面電流密度と磁束密度の関係より

$$E_y' = \frac{\sigma'}{\epsilon_0} = \gamma \left[\frac{\sigma}{\epsilon_0} - \frac{\sigma v_0}{\epsilon_0 c} \left(\frac{v}{c} \right) \right] \quad (6.55)$$

$$B_z' = \mu_0 \mathcal{J}' = \gamma [\mu_0 \sigma v_0 - \mu_0 \sigma v] \quad (6.56)$$

が得られる。これを系 F での電磁場を用いて書き直すと

$$\begin{aligned} E_y' &= \gamma \left(E_y - \frac{\beta B_z}{\epsilon_0 \mu_0 c} \right) &= \gamma \left(E_y - \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \beta B_z \right) \\ B_z' &= \gamma (B_z - \epsilon_0 \mu_0 c \beta E_y) &= \gamma (B_z - \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} \beta E_y) \end{aligned} \quad (6.57)$$

と表される。

電流面のサンドイッチ系が xz 面ではなく xy 面に平行に向いていれば E_z' を E_z と B_y, B_y' を B_y と E_z に結びつける関係式を得る。当然上式と同型になるが、実際に導出してみると \mathbf{B} の方向に対する規則より符号が違ってくることがわかる。

つぎに運動方向の電磁場の成分がどう変換するか調べる。5.5節で \mathbf{E} の縦成分が2つの系で同じ大きさであることを調べた。 \mathbf{B} の縦成分についても同じことが次のようにしていえる。

FIGURE 6.25 での \mathbf{B} の縦成分である B_x 成分がここでは系 F での x 軸のまわりに作られたソレノイド中にできているとしよう。

ソレノイドの中の磁束密度は導線の電流 I (つまり1秒あたりの電荷) と軸方向の単位長さあたりの巻き数 n にしかよらなかった。系 F' では Lorentz 収縮によりソレノイドの単位長さあたりの巻き数は大きくなるが、電流は系 F' の観測者が測定すると小さくなる。なぜなら系 F での観測者が測定する電流は導線上のある1点を単位時間に通過する電子の数を数えたものであるが、系 F' での観測者からみると遅れて動いている時計を使っていたからである。

時間の遅れは長さの縮みを積 nI の中で打ち消してしまう。よって $B_x' = B_x$ である。

第5章での議論を思い出そう。電磁場の変換性は局所的性質である。ある1つの慣性系のある時空点での \mathbf{E} と \mathbf{B} の値によって、その同じ時空点で他の任意の慣性系で観測される場の成分を一意的に決めてしまう。だからここで特に簡単な source (一对の平行な一様な帯電面) を使って導出した場の変換性の結果でも一般性を失わない。その起源や source の配置がどうあれ電磁場の全成分に対する変換性の一般的法則を得ることができたことになる。

以下に電磁場の変換の一覧表を掲げる。プライム (') 付きの量はすべて系 F' で測定されるものである。系 F' は系 F からみて速さ v で x の正方向に動いているものとする。プライムなしの量は系 F で測定されるものである。 β は v/c を、 γ は $1/\sqrt{1-\beta^2}$ を表すのはこれまで通りである。

$$\begin{aligned} \frac{E_x'}{c} &= \frac{E_x}{c} & \frac{E_y'}{c} &= \gamma\left(\frac{E_y}{c} - \beta B_z\right) & \frac{E_z'}{c} &= \gamma\left(\frac{E_z}{c} + \beta B_y\right) \\ B_x' &= B_x & B_y' &= \gamma\left(B_y + \beta \frac{E_z}{c}\right) & B_z' &= \gamma\left(B_z - \beta \frac{E_y}{c}\right) \end{aligned} \quad (6.58)$$

この変換則は \mathbf{E}/c と \mathbf{B} に関して対称である。 y と z の入れ換えに対しても対称である。磁気は動いている電荷による電場から相対論による変換を行って得られるいわば”2次的”効果であった。自然界でみられる磁気現象は確かにまったく電気現象とは異なる。にもかかわらず電磁場の sources 同様、電磁場自身も \mathbf{E} と \mathbf{B} は互いに対称的に関連しているということが変換性からわかる。

電場と磁場は確かにある実体の成分となっている。電磁場の6つの成分が E_x/c 、 E_y/c 、 E_z/c 、 B_x 、 B_y 、 B_z であるとも考えることもできる。

異なる慣性系で同一の場をみるのはちょうどあるベクトルを回転で結ばれる相異なる座標系でみるのと同じであり、そのときはある系でのベクトルの成分は他の系でのベクトルの各成分の線型結合で表された。しかし、電磁場の場合は数学的にはベクトルではなく、テンソルとよばれる別の物として変換する。

(6.58) 式がある慣性系から別の慣性系に移ったときのテンソルの成分の変換式をあたえて

いる。しかしこれ以上テンソルについてこれ以上話を進めない。ここで電場と磁束密度を別の vector 場とする旧い方法に戻って進めよう。

(6.58) 式の変換を役に立つエレガントな方法で表すことができる。系 F から見た系 F' の速度を βc としよう。系 F および系 F' の vector 場を β の方向に関して平行成分 (\parallel) と直交成分 (\perp) に分解することができる。

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \mathbf{E}_{\parallel} + \mathbf{E}_{\perp} & \mathbf{E}' &= \mathbf{E}'_{\parallel} + \mathbf{E}'_{\perp} \\ \mathbf{B} &= \mathbf{B}_{\parallel} + \mathbf{B}_{\perp} & \mathbf{B}' &= \mathbf{B}'_{\parallel} + \mathbf{B}'_{\perp} \end{aligned} \quad (6.59)$$

故に、これらの成分の変換則は以下のように書き下せる。

$$\begin{aligned} \mathbf{E}'_{\parallel} &= \mathbf{E}_{\parallel} & \mathbf{E}'_{\perp} &= \gamma(\mathbf{E}_{\perp} + c\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{B}_{\perp}) \\ \mathbf{B}'_{\parallel} &= \mathbf{B}_{\parallel} & \mathbf{B}'_{\perp} &= \gamma(\mathbf{B}_{\perp} - \frac{1}{c}\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{E}_{\perp}) \end{aligned} \quad (6.60)$$

上式を導いた特別な例では $\boldsymbol{\beta}$ が $-\beta\hat{x}$ 、 \mathbf{E}_{\perp} が $(\sigma/\epsilon_0)\hat{y}$ そして \mathbf{B}_{\perp} が $\mu_0\sigma v_0\hat{z}$ であった。電場と磁束密度の間の変換の対称性はこの一般的な形式の方がよりはっきりしている⁸。

(6.60) 式のパラメーターは当然期待されるように無次元量 β だけである。 \mathbf{B} を磁場とよばれる vector 場 $\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu_0$ を用いても (??) 式の対称性は回復しない。

電場と磁束密度の間には次に考える特別な場合に成立する大切な関係がある。 $\mathbf{B} = 0$ である系 F を考える。この系に対し速度 βc で動いている系 F' では (6.60) 式により

$$\begin{aligned} \mathbf{E}'_{\parallel} &= \mathbf{E}_{\parallel} & \mathbf{E}'_{\perp} &= \gamma\mathbf{E}_{\perp} \\ \mathbf{B}'_{\parallel} &= 0 & \mathbf{B}'_{\perp} &= -\frac{\gamma}{c}\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{E}_{\perp} = -\gamma\mathbf{v} \times \mathbf{E}_{\perp}/c^2 \end{aligned} \quad (6.61)$$

定義より $\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{E}_{\parallel} = 0$ だから \mathbf{E}' と \mathbf{B}' の間の関係を書き直すと

$$\mathbf{B}' = -\frac{\boldsymbol{\beta}}{c} \times \mathbf{E}' = -\frac{\mathbf{v} \times \mathbf{E}'}{c^2} \quad (6.62)$$

となる。

これは $\mathbf{B} = 0$ の系に対して速度 βc で動いている任意の系で成立する電場と磁束密度の関係である。

同様に (6.60) 式から $\mathbf{E} = 0$ になる系が存在するなら、どんな系でも

$$\mathbf{E}' = c\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{B}' = \mathbf{v} \times \mathbf{B}' \quad (6.63)$$

βc は $\mathbf{E} = 0$ である系 F における系 F' の速度である。

⁸YC 注:

cgs 単位系では \mathbf{E} と \mathbf{B} の対称性は明白であるが、SI 単位系では \mathbf{E}/c と \mathbf{B} との間の対称性として現われる。

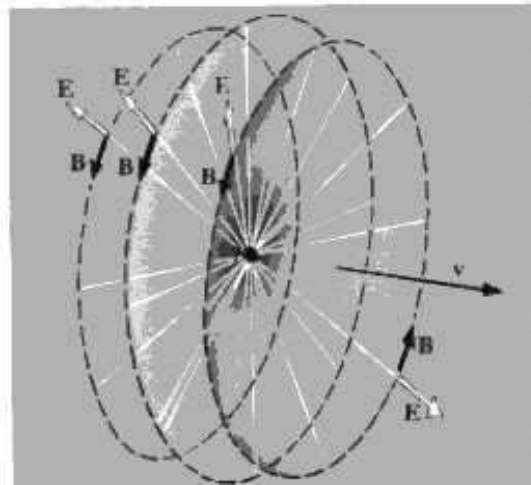
式 (6.62) と (6.63) は同じ慣性系で測られる量 \mathbf{E}' と \mathbf{B}' しか含んでいないので条件さえ満たせば空間的に変化する場には応用できる。例えば第5章で考えた一定の速度で動く点電荷の問題をとりあげよう。

この点電荷の静止系 F では磁束密度は存在しない。(6.62) 式によれば、この電荷が速さ v で動いている系 F' (LAB 系) では電場と運動方向の両方に直交する磁束密度が存在しなければならない。電場 \mathbf{E}' は

$$E' = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r'^2} \frac{1 - \beta^2}{(1 - \beta^2 \sin^2 \theta')^{3/2}}$$

であって、方向は考えている時刻での点電荷からみた動径方向向きであった⁹。これより磁力線を大雑把に FIGURE 6.26 に示すが、運動方向を取り囲む円周を描いている。

FIGURE 6.26
The electric and magnetic fields, at one instant of time, of a charge in uniform motion.



電荷の速度が増し、 $\gamma \gg 1$ のときには電気力線の”スポーク”はたたみこまれて薄いディスク状になってしまう。磁力線も同じように薄いディスクに集まる。 \mathbf{B} の大きさはこのとき $\beta \neq 1$ 、 $\mathbf{B}' = -\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{E}'/c$ だからほぼ電場 \mathbf{E} の大きさの $1/c$ 倍である。磁束密度の大きさを [T] で表すと同一の場所および同時刻での [V/m] で表した電場の $1/c$ [s/m] 倍したものにほぼ等しくなる。

これまでの2つの章では Coulomb の法則からの路を延々と歩いて来た。そして各段階で、相対論の要求と電荷の不変性を矛盾しないように追求するのに終始するだけであっ

⁹YC 注:

第5章の pdf では省略した部分の記述に記載されている。ここで点電荷から距離 r' で、進行方向から角 θ' をなす点での電場の大きさを書いている。

た。結局のところ、磁束密度と電場との間の奇妙な対称的關係はこれらの一般的原理のもたらす必然的帰結であることがわかって来た。こういう説明の仕方は電磁気学の歴史を追うものではないことをもう一度確認してもらいたい。

(6.58) 式に暗黙の内に込められている電場と磁場との相互作用のある側面が Michael Faraday の実験により電流が瞬間的に変わる場合に明らかにされた。このことを第7章で記述しよう。それは Einstein が 1905 年の歴史的論文で (6.58) 式を初めて書き下す 75 年も前のことであった。