

第5章 The Fields of Moving Charges (動いている電荷が作る場)

5.1 From Oersted to Einstein (エールステッドからアインシュタインへ)

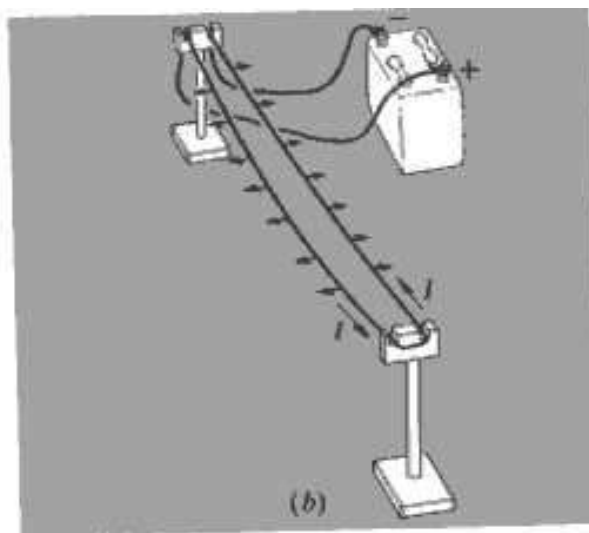
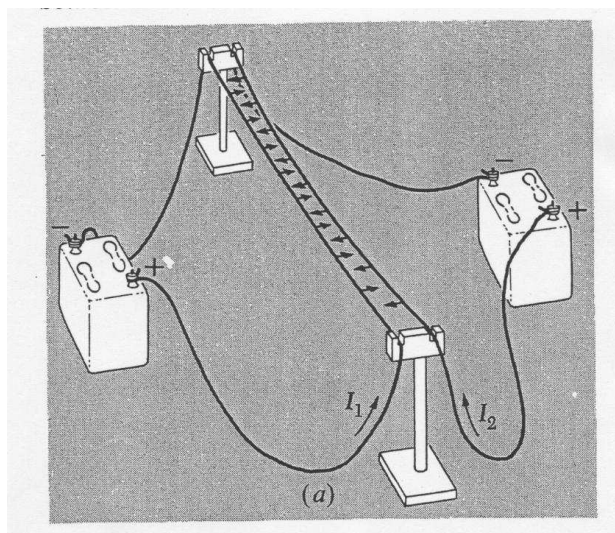
コペンハーゲン大学で 1819 年から 1820 年にかけての冬学期に Hans Christian Oersted が静電気、電源から出る電流、磁石について講義を行っていた。彼は演示実験の準備として磁針の向きと直角の向きに電流を流してみたが何事もおこらなかった。講義の後に今度は磁針と平行に電流を流してみたところ磁針が大きく振れ、さらに電流の向きを逆にしたところ磁針は反対向きに振れた。

これを聞いた研究者達は興奮し、大いに触発されて続々と実験が行われ Ampère、Faraday 等により電流の磁気作用についてほぼ完全かつ正確な記述をあたえられてしまった。Faraday の電磁誘導の発見は Oersted の実験から 12 年も経っていない。その後 Maxwell により古典電磁気の数学的整備が行われ 1888 年には Hertz が電磁波を実証して古典電磁気が確証されることになる。

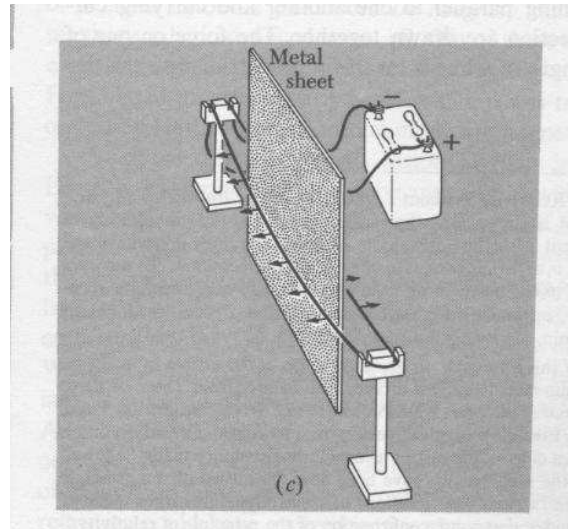
Einstein は Lorentz の動いている電荷による電気力学の研究を受け継ぎ 1905 年に The Electrodynamics of Moving Bodies (動いている物体の電気力学) なる論文で相対論を提示した。Maxwell の電磁気学がたまたま相対論的不変であったからということであり、どんな完全な物理の理論でも相対論的に不変でなければならない。したがって相対論は電磁気や光の理論の一分野ではない。

この章では歴史とは逆に特殊相対論に依拠して静電気の系を別の慣性系から見たときどう記述されるかを考えることにする。

5.2 Magnetic Forces (磁氣的力)

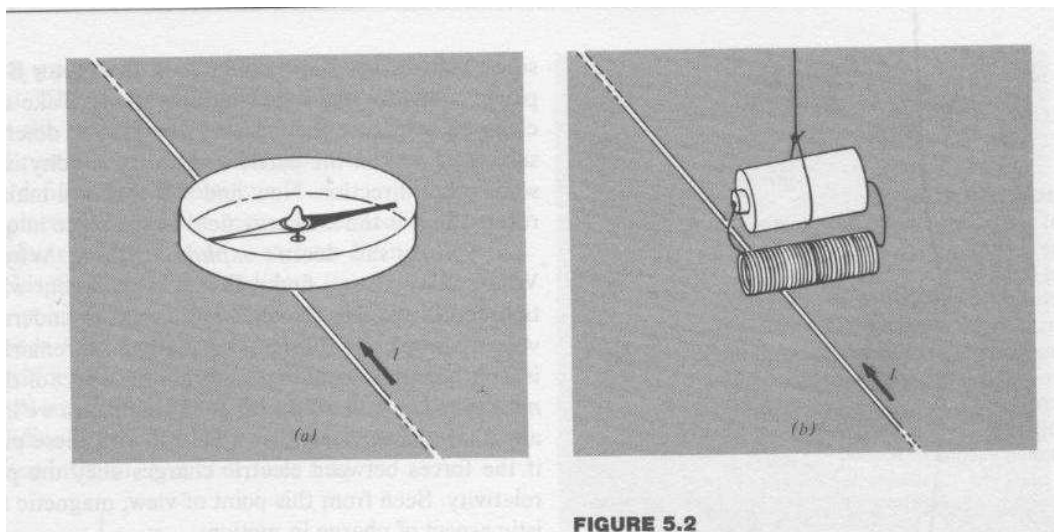


2本の同一方向に流れる平行電流の間には引力が働き、単位長さあたりの大きさは導線間の距離に反比例する (FIGURE 5.1(a))。向きが反対の場合は斥力となる (FIGURE 5.1(b))。この力は導線内の電荷の運動によるもので、導線の上に金属板を置いても変わらない (FIGURE 5.1(c))。

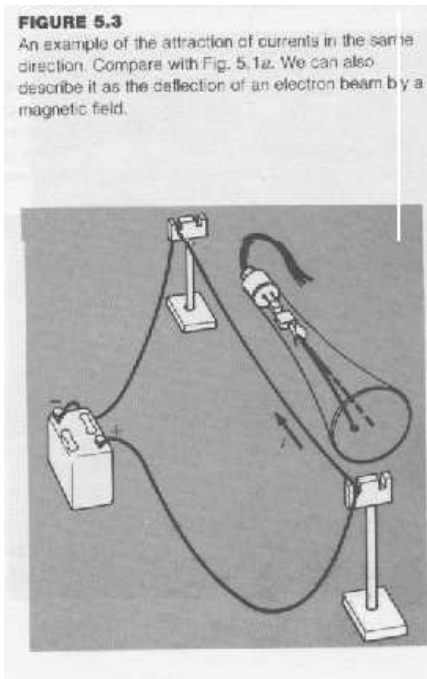


動いている電荷に働くこのような電場起因以外の新しい力を磁氣的力という。

Oersted の方位磁針の実験 (FIGURE 5.2a) も磁針中の磁化された鉄を原子のスケールで見ると動いている電荷による電流として考えられることが現在ではわかっている。実際コイルにつけて電流を流すと下に流れる電流により方位磁針と同じように動く (FIGURE 5.2b)。



陰極管内で直進している電子も外部に電流があるとその軌道が曲げられてしまう。



導線中であろうとなかろうと動く電荷には動く方向とは直交する磁氣的な力が働く。この力は電流の作る磁場を介して動く電荷に作用する。

電荷 q の粒子が速度 \boldsymbol{v} で動いているとき、働く力は

$$\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{E} + q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B} \quad (5.1)$$

である。

ここで \boldsymbol{B} はこの力の右辺で定義される磁場の磁束密度である。

荷電粒子が静止しているとき働く力を測定し電場 \boldsymbol{E} を定める。次に \boldsymbol{v} をいろいろ変えて力を測れば磁束密度 \boldsymbol{B} を知ることができる。こうして力を測定すれば空間の各点での電磁場を求めることができる。

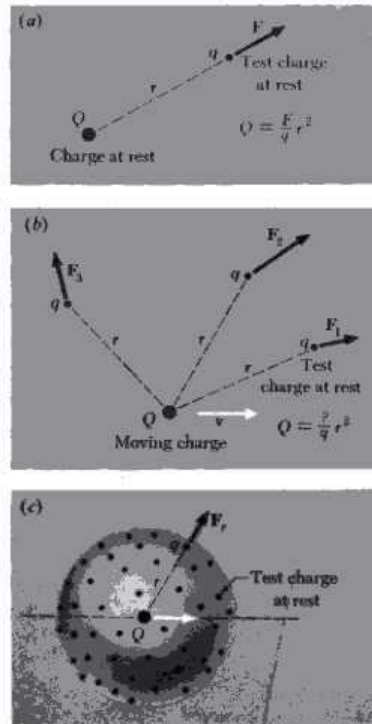
5.3 Measurement of Charges in Motion (動いている電荷の測定)

静止している電荷の電気量 Q は Coulomb の法則により試験電荷に働く力から測定できる (FIGURE 5.4(a))。しかし、動いている電荷の場合は距離だけでなく速度も考慮しなければならないので簡単には決まらなさそうである (FIGURE 5.4(b))。そこで電気量 Q を求めるために FIGURE 5.4(c) のように、球面上に均等に微小試験電荷を分布させよう。球

面の中心を電荷 Q が通ったとき、試験電荷に働く力の半経方向成分を測り、この平均で Q を求めるとしよう。

FIGURE 5.4

(a) The magnitude of a charge at rest is determined by the forces on a test charge at rest and Coulomb's law. (b) In the case of a moving charge, the force, for all we know now, may depend on the position of the test charge. If so, we can't use procedure (a). (c) At the instant Q passes through the center of the spherical array of test charges, measure the radial force component on each, and use the average value of F_r to determine Q . This is equivalent to measuring the surface integral of \mathbf{E} .



試験電荷は静止しているとするから、単位電荷あたりの力が電場をあたえる。こう考えると Coulomb の法則より Gauss の法則の方が動いている電荷の電気量を決めるためにはふさわしい。

ある領域内の電気量は、その領域を取り囲む閉曲面 S 上の電場 \mathbf{E} の面積分を用いて定義される。このとき、電場は S 上 (Q が動いているからある瞬間の時刻 t で設定される) の全ての点で観測者により測定される値を用いる。 S が動かない定常的な面とすると、時刻 t での領域内の電荷 Q は

$$Q = \epsilon_0 \oint_{S(t)} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} \quad (5.3)$$

で定められる。

Q が静止していれば Gauss の法則により S の大きさ及び形状によらない。さらに、動いている Q に対して Gauss の法則を実験的事実として受け入れよう。このようにして Gauss

の法則を用いて電荷を定義することができる。

FIGURE 5.5 のようにそれぞれ 2つの陽子と 2つの電子がすべて同一の速さで動いているとき、ある瞬間に 2つの閉曲面 S_1 と S_2 上の電場の面積分の値は等しくなり、中での電気量の総和¹を定めることができる。

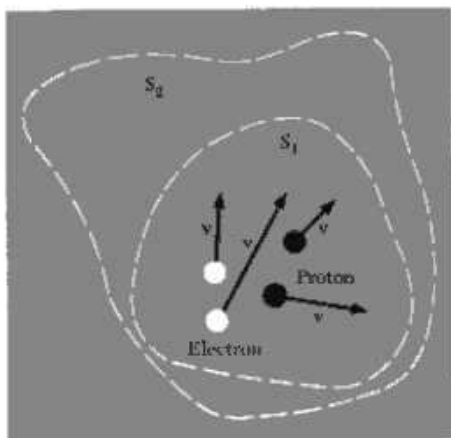
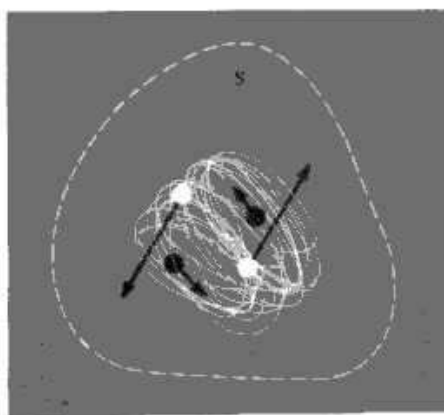


FIGURE 5.5
Gauss' law remains valid for the field of moving charges. The flux of \mathbf{E} through S_2 is equal to the flux of \mathbf{E} through S_1 , evaluated at the same instant of time.

FIGURE 5.6
Does the flux of \mathbf{E} through S depend on the state of motion of the charged particles? Is the surface integral of \mathbf{E} over S the same as in Fig. 5.5? Here the particles are bound together as a hydrogen molecule.



もし FIGURE 5.6 のように水素分子のように陽子と電子が異なる速度を持っている場合の系の電気量の総和はゼロのままだろうか。

5.4 Invariance of Charge (電荷の不変性)

我々は慣れてしまっているので系の全電荷の値は内部の荷電粒子が動いていても一定不変であるという実験の証拠が基本的なことを考えないことが多い。以下に実験で確かめられた事実を述べる。

H_2 分子と He 原子はどちらも陽子 2 個と電子 2 個が構成粒子に含まれている。 H_2 分子内では陽子同士は 0.07nm 離れてゆっくり回転している。 He 原子内では陽子は 2 つとも 2 つの中性子としっかり束縛され原子核を作っている。その運動エネルギーは 1MeV 程度である。運動状態が電気量に影響するなら、 H_2 分子と He 原子ともに核と電子の電荷の総和がいつも厳密にゼロになることが先験的にはわからない。

Purcell が第 1 章でも cite している King Physical Review Letters Vol.5, pp562-565(1960) に次の実験結果が報告されている。

大量の H_2 分子をタンクに閉じ込めておく。タンクには外部とつなぐパイプがあり、分子

¹この例ではゼロである。

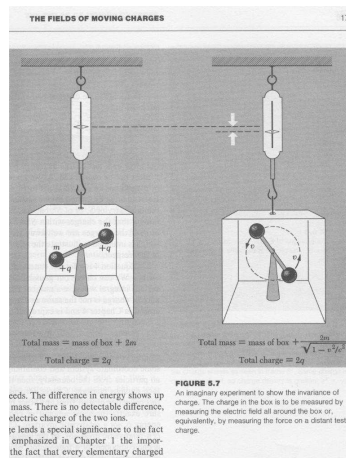
が外部に出て行くが、電荷をもっていれば電流として測ることができる。調べたところ水素分子は 10^{-19} の精度で電氣的に中性だとわかった。同じことを He 原子で行ったが、やはりこの精度で中性であると結論された。

H_2 分子は2つの陽子と2つの電子から構成されていて、電子の軌道上の速さはほぼ $c/100$ である。He 原子は2つの陽子と2つの中性子、2つの電子からなっていて、陽子はそれぞれ $10^6 eV$ という陽子の静止質量に比べると小さい運動エネルギーで動き、電子は H_2 分子の電子の約2倍の速さで動いている。

パイプ内で働く電場 \mathbf{E} による力は $(2q_{e^-} + 2q_p)\mathbf{E} = 0$ である。したがって電子と陽子の電荷 q_{e^-} と q_p は、速さによらず

$$q_{e^-} = -q_p = -e \quad (1)$$

となることが 10^{-19} の精度で成立しているという結論を得た。



質量は動いていれば速度によって変わることを FIGURE 5.7 の思考実験で説明しよう。右側の図では質量と電荷をもつ2つの粒子が棒にささえられ速さ v で回転しているとす。右図と左図を比べると右図の全質量の方が左図の全質量より大きいことが重さをバネ秤ではかるか、加速するのに要する力を測るかすれば調べられる。一方、全電荷の値は右図と左図で等しい。

これと同等の実験が D_2^+ イオンと He^+ イオンを質量分析器にかけて行われて質量差があるということが示されている。しかし両イオンの電荷には差が認められなかった。

ここで述べた電荷の不変性から、第1章で述べた電荷の量子化という事実が静止粒子のみならず動いている粒子についても成立することがわかる。

電場の閉曲面 S 上の面積分の値は閉曲面内の荷電粒子の数と種類には依るが、粒子の運動状態には依存しない。相対論の要請からある慣性系 F でなりたつこの実験事実は他の慣性系 F' でも成立しなければならない。

系 F において時刻 t で設定した閉曲面 S により取り囲まれている荷電物体を系 F' の時刻

t' で取り囲む閉曲面を S' (FIGURE 5.8) とすると

$$\oint_{S(t)} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \oint_{S'(t')} \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{a}' \quad (5.4)$$

が成立しなければならない。

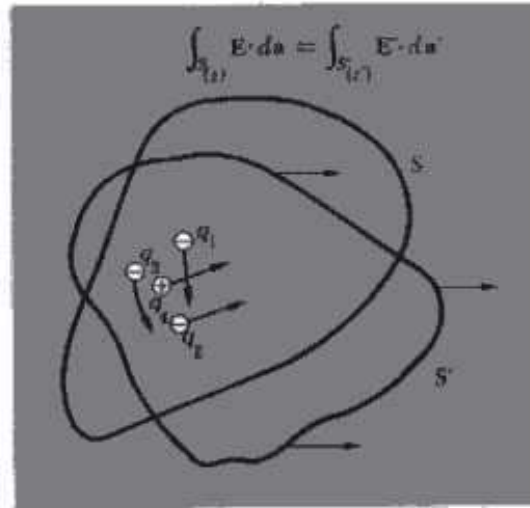


FIGURE 5.8
The surface integral of \mathbf{E} over S is equal to the integral of \mathbf{E}' over S' . The charge is the same in all frames of reference.

上式は形式的に電荷の相対論的不変性を表現している。

電荷の保存則とその不変性は違う内容を持っている。電荷の保存則は第4章で論じたが、式で述べると

$$\text{div } \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (4.9)$$

であった。

ある座標系で内部に帯電物体を取りこむような閉曲面を固定したとき、面上に荷電粒子がなければ面内の全電荷の値が一定であることを電荷の保存則は意味している。

一方、電荷の不変性は別の慣性系でこの作業を行っても全電荷の値が同じになるということ述べているのである。

5.5 Electric Field Measured in Different Frames of Reference (異なる系からみた電場)

ある慣性系 F での観測者が任意の時刻および場所で電場 \mathbf{E} を測って、その値を知ったと

したとき、別の慣性系 F' での観測者はどのような電場 E' を測ることができるだろうか。この問に対する答えを簡単な系で Gauss の法則を用いて知ることができる。

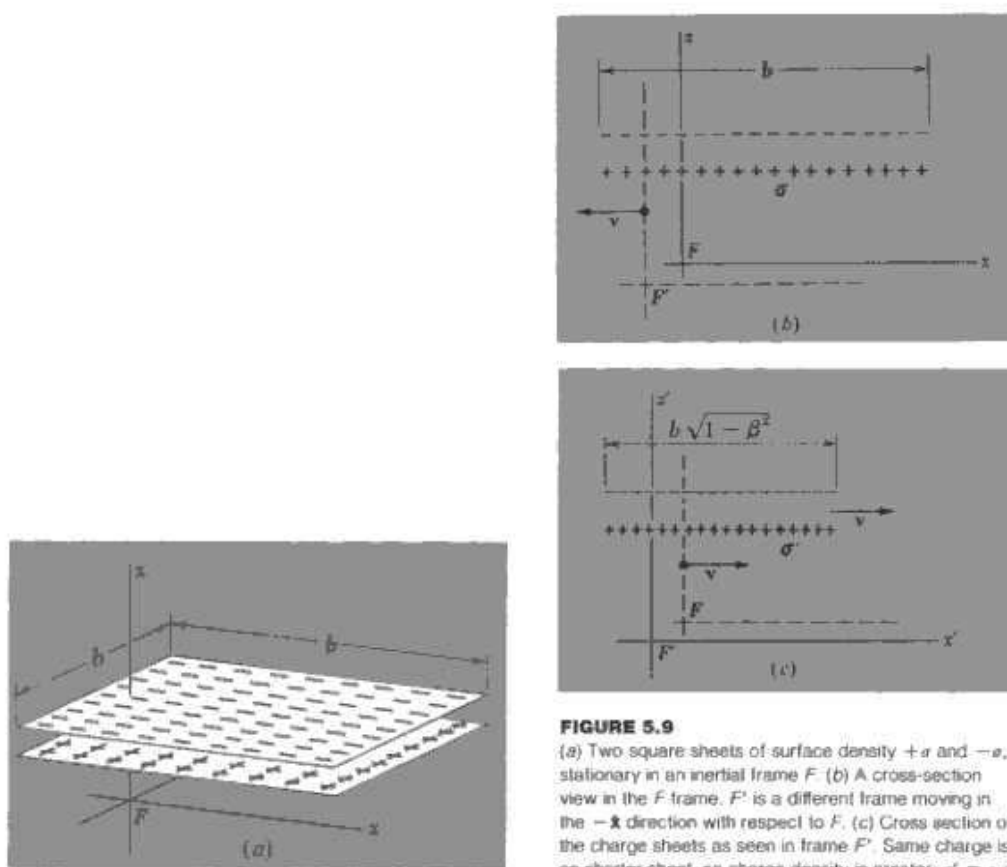


FIGURE 5.9 (a) Two square sheets of surface density $+\sigma$ and $-\sigma$, stationary in an inertial frame F . (b) A cross-section view in the F frame. F' is a different frame moving in the $-x$ direction with respect to F . (c) Cross section of the charge sheets as seen in frame F' . Same charge is on shorter sheet, so charge density is greater: $\sigma' = \gamma\sigma$.

FIGURE 5.9a には系 F においてそれぞれ一様な面密度 σ と $-\sigma$ の静止した 2 枚の帯電板が図示されている。板は共に xy 面に平行で一辺が b の正方形で、極板間距離は b に比べて充分小さいとするので極板にはさまれた領域にのみ存在する電場は一定一様であるとしてよい。

静止系 F で止まっているこの平行平板コンデンサーの系の電場を観測すれば極板間の電場の大きさは σ/ϵ_0 である。

F' 系は F からみて負の x 方向に v なる速さで動いているとする。この F' での観測者にとって極板は正方形にはみえず x' 方向の辺の長さは $b\sqrt{1-\beta^2}$ に縮んでいる。もちろん極板上の電荷は系 F でみたのと変わらないので、系 F' での極板の電荷面密度は $\gamma\sigma = \sigma/\sqrt{1-\beta^2}$ と系 F での密度より大きくなっている。

系 F' で Gauss の法則を用いる (Gauss 面は FIGURE 5.10(c) 中にあるような直方体の表面にとる)。

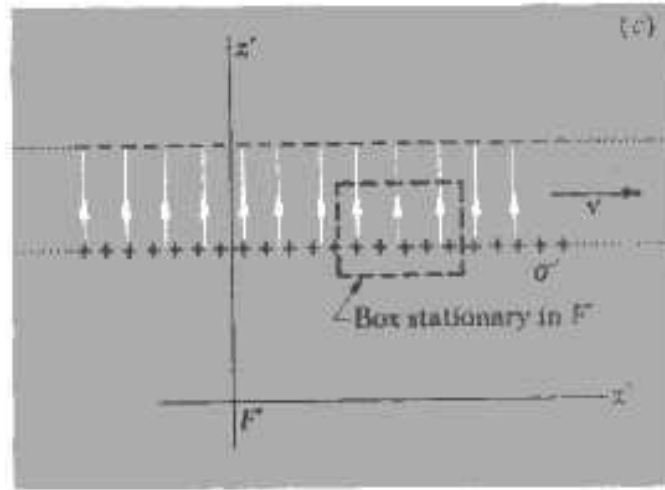


FIG. 5.10(c)

$$E'_z = \frac{\sigma'}{\epsilon_0} = \frac{\sigma}{\epsilon_0 \sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{E_z}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \gamma E_z \quad (5.5)$$

さらに、FIGURE 5.11 のように平行平面極板が系 F の x 軸とは垂直に静止している場合を考える。

系 F では電場の x 成分が $E_x = \sigma/\epsilon_0$ となるが、系 F' でも正方形の 2 つの辺はそのまま b であり、極板間距離が収縮する。しかし、極板間距離と電場は関係ないので

$$E'_x = \frac{\sigma'}{\epsilon_0} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = E_x \quad (5.6)$$

となることがわかる。

以上は、簡単な電荷分布により作られる電場の変換性を考えたが、電場のこの変換性

$$\begin{aligned} E'_x &= E_x \\ E'_y &= \gamma E_y \\ E'_z &= \gamma E_z \end{aligned} \quad (5.7)$$

は電荷分布によらず成立する。

x 方向を \mathbf{v} と平行だから \parallel 方向、直交する y 、 z 方向をまとめて \perp 方向とすると

$$\begin{aligned} E'_{\parallel} &= E_{\parallel} \\ \mathbf{E}'_{\perp} &= \gamma \mathbf{E}_{\perp} \end{aligned} \quad (2)$$

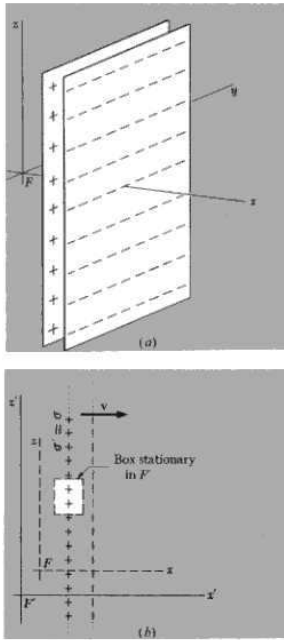


FIGURE 5.11
The electric field in another frame of reference (relative velocity parallel to field direction). (a) in reference frame F . (b) Cross-sectional view in reference frame F' .

となる。

5.8 Force on A Moving Charge (動いている電荷に働く力)

静止している sources の作る場 (例えばオッシロスコープの電極板の間とか原子核の作るクーロン場) の中を動いている電荷 (例えばオッシロスコープ内の電子とか原子核のそばを通る α 粒子) に働く力について考察しよう。

場の sources の静止している系を”LAB FRAME”(実験室系 F) と名付けよう。ここで、問題にするのは LAB FRAME で静電場の中を速度 v で動いている電荷 q の粒子に働く力である。つまり、この系での粒子の運動量の時間変化率 dp/dt を知りたい。

粒子と共に動く座標系を”PARTICLE FRAME”(粒子系 F') と名付ける。この系では粒子は静止しているので電荷 q (これはどの系でも不変である。) に働く力は $q\mathbf{E}'$ である。ここで \mathbf{E}' は PARTICLE FRAME での電場を表す。

\mathbf{E} と \mathbf{E}' の変換則は 5.5 でみた通りである。LAB FRAME での電場 \mathbf{E} がわかれば PARTICLE FRAME での電場 \mathbf{E}' がわかるので運動量の時間変化率が書き下せる。この変化率を LAB FRAME に戻せば、ここでの問題が解けたことになる。

以下では F' と F の相対速度に平行な成分を添字 \parallel 、直交する成分を添字 \perp で表すことにする。

Lorentz 変換から、運動量の時間変化率つまり力の変換則は

$$\begin{aligned}\frac{dp_{\parallel}}{dt} &= \frac{dp'_{\parallel}}{dt'} \\ \frac{dp_{\perp}}{dt} &= \frac{1}{\gamma} \frac{dp'_{\perp}}{dt'}\end{aligned}\tag{5.14}$$

であることは知っている。PARTICLE FRAME は力の \perp 成分がどの系より大きいという点で特別な系であることがわかる。

電場の変換則は

$$\begin{aligned}E'_{\parallel} &= E_{\parallel} \\ E'_{\perp} &= E_{\perp}\end{aligned}\tag{3}$$

であり、力の変換則から結局

$$\frac{dp_{\parallel}}{dt} = \frac{dp'_{\parallel}}{dt'} = qE'_{\parallel} = qE_{\parallel}\tag{5.145,5.16}$$

$$\frac{dp_{\perp}}{dt} = \frac{1}{\gamma} \frac{dp'_{\perp}}{dt'} = q \frac{1}{\gamma} E'_{\perp} = qE_{\perp}\tag{5.17}$$

粒子は PARTICLE FRAME でも電場から力を受けて加速されるのでだんだん速度が増す。しかし、ここでは瞬間的な加速だけを問題にしているので粒子の速度の無限小変化だけを考えれば良いから力の変換則を導出したときの条件を厳密にみたしている。

LAB FRAME では動いている荷電粒子に働く電場による力は速度に関係なく $q\mathbf{E}$ であることがわかった。これは電荷の不変性の結論である。次の図にここでの議論をもう一度示した。

5.9 Interaction between A Moving Charge and Other Moving Charges

(動いている電荷間の相互作用)

動いている電荷には速度に依存する力が働くことがわかっている。これは磁場にもなる力であるが、磁場の sources は電流、つまり動いている別の電荷である。

Oersted の実験では電流が磁石に影響をおよぼした。しかし、当時は磁石の本性が全然わかっていなかった。Ampère 等が電流同士の相互作用を明らかにし、2つの平行電流間には引力が働くことを示した。Ampère は磁性体は周回する永久電流を内包しているという仮説を唱えた。これが本当なら Oersted の実験は導線中の電流と磁針内の微小永久電流との相互作用で解釈できる。

Ampère は定常電流の相互作用および磁気物質は永久電流の系と等しいということについて完璧でエレガントな数学的表式をあたえたが、彼の鉄の磁性についての推測が完全に確

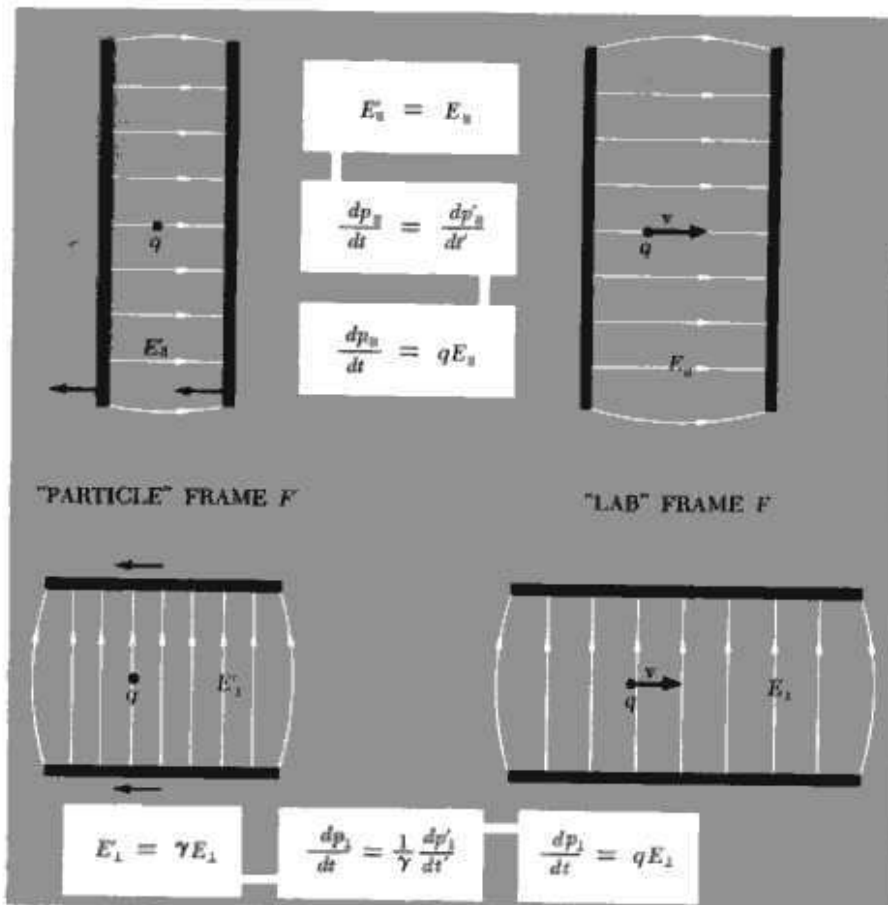


FIGURE 5.19

立されるまで約1世紀待たなければならなかった。

電荷の単純な輸送だけではない複雑な電流による磁気現象が生ずるか否かは Ampère の時代にはわからなかった。Maxwell の理論によれば帯電物体の運動によっても磁気効果を生ずるが、実験的証拠は Rowland によりずっと後に得られた²。

電流の磁氣的相互作用は Coulomb の法則から必然的に導かれる命題である。相対論の要請が正しく、電荷が不変であり、Coulomb の法則が成立すれば以下の簡単な系(下図 FIGURE 5.20 上から (a),(b),(c)) で示すように磁氣的効果が必然的に起きるのである。

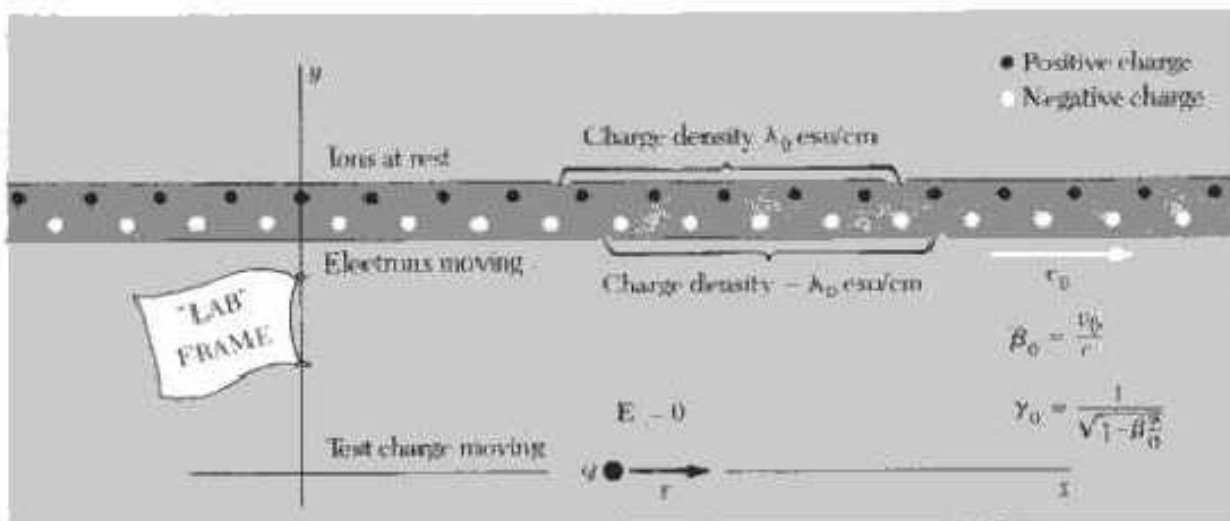


Fig.5.20(a)

(a) の LAB FRAME では x 方向に1列に無限にたまって静止している正電荷 (黒丸で表す。陽子と同一電荷) がある。これをイオンということにする。実際にイオンは銅線の固定要素を構成しているのは銅イオンを表しているとしても良い。この図には電子である1列の負電荷 (白丸) が示されている。この電子全てが速さ v_0 で右向きに動いている。実際の導線では電子とイオンは混在しているが (a) 図では区別して描いている。

イオンの線密度を λ_0 と書く。電子とイオンの線密度の大きさは同じである。このとき導線の部分を考えると電子とイオンの数が同じだから、正味の電気量はゼロであり、Gauss の法則から導線の外には電場は存在しない。したがって導線の傍に静止している試験電荷 q は全く力を感じない。

試験電荷が静止しておらず、LAB FRAME で x 方向に速さ v で動いているとする。この LAB FRAME から (b) 図のように q と共に動く TEST CHARGE FRAME へ変換

²1878

しよう。

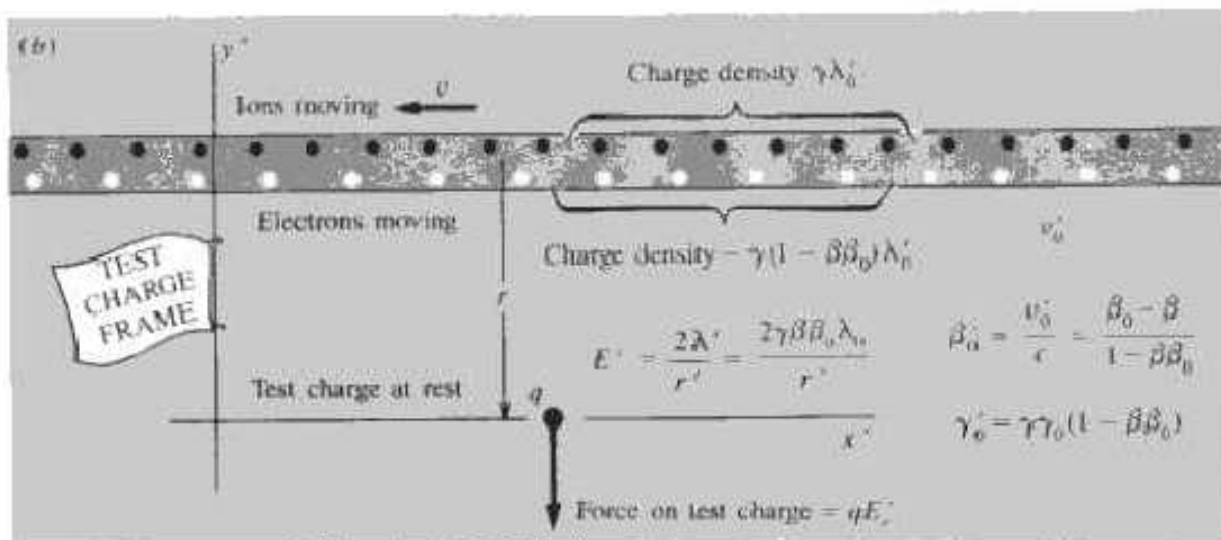


Fig.5.20(b)

この系では試験電荷は静止しているが、正イオンの間隔が縮まり、電子間隔が広くなるという理由から導線が帯電することになる。

何故なら正イオン同士の間隔は LAB FRAME より $1/\gamma = \sqrt{1 - v^2/c^2}$ だけ Lorentz 収縮するので、イオンの電荷線密度は $\gamma\lambda_0$ となる。

電子の線密度の計算は LAB FRAME でも電子は速さ v_0 で動いているからもう少し複雑になる。

LAB FRAME での線密度 $-\lambda_0$ を電子の静止系に変換すると $-\lambda_0/\gamma_0 = -\lambda_0\sqrt{1 - v_0^2/c^2}$ となる。

TEST CHARGE FRAME での電子の速さ v_0' を計算しておこう。相対論的速度の合成則より $\beta_0' = v_0'/c$, $\beta = v/c$ で表すと

$$\beta_0' = \frac{\beta_0 - \beta}{1 - \beta\beta_0} \quad (5.18)$$

が得られる。よって対応する γ 因子を計算すると

$$\gamma_0' = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta_0'^2}} = \gamma\gamma_0(1 - \beta\beta_0) \quad (5.19)$$

と書き下せることがわかる。

これが TEST CHARGE FRAME で電子の電荷線密度を求めた場合、電子の静止系での線密度の値 $-\lambda_0/\gamma_0$ にかけるべき因子であって、TEST CHARGE FRAME では $\gamma_0'(-\lambda_0/\gamma_0) = -\lambda_0\gamma(1 - \beta\beta_0)$ という値が得られる。

よって、TEST CHARGE FRAME での導線の電荷線密度 λ' は

$$\lambda' = \gamma\lambda_0 - -\lambda_0\gamma(1 - \beta\beta_0) = \gamma\beta\beta_0\lambda_0 \quad (5.20)$$

と求めることができる。

この値は正であることから、導線がこの系では正に帯電していることになる。Gauss の法則により、電荷線密度のわかっている直線荷電分布の作る電場では動径方向の成分 E_r' が現われ

$$E_r' = \frac{\lambda'}{2\pi\epsilon_0 r'} = \frac{\gamma\beta\beta_0\lambda_0}{2\pi\epsilon_0 r'} \quad (5.21)$$

となっている。TEST CHARGE FRAME で導線から r' だけ離れた静止している試験電荷の場所には $-y'$ 方向の電場が現われるので、試験電荷に働く力は

$$F_y' = qE_y' = -\frac{q\gamma\beta\beta_0\lambda_0}{2\pi\epsilon_0 r'} \quad (5.22)$$

である。

FIGURE 5.20(c) の LAB FRAME に戻って考えよう。

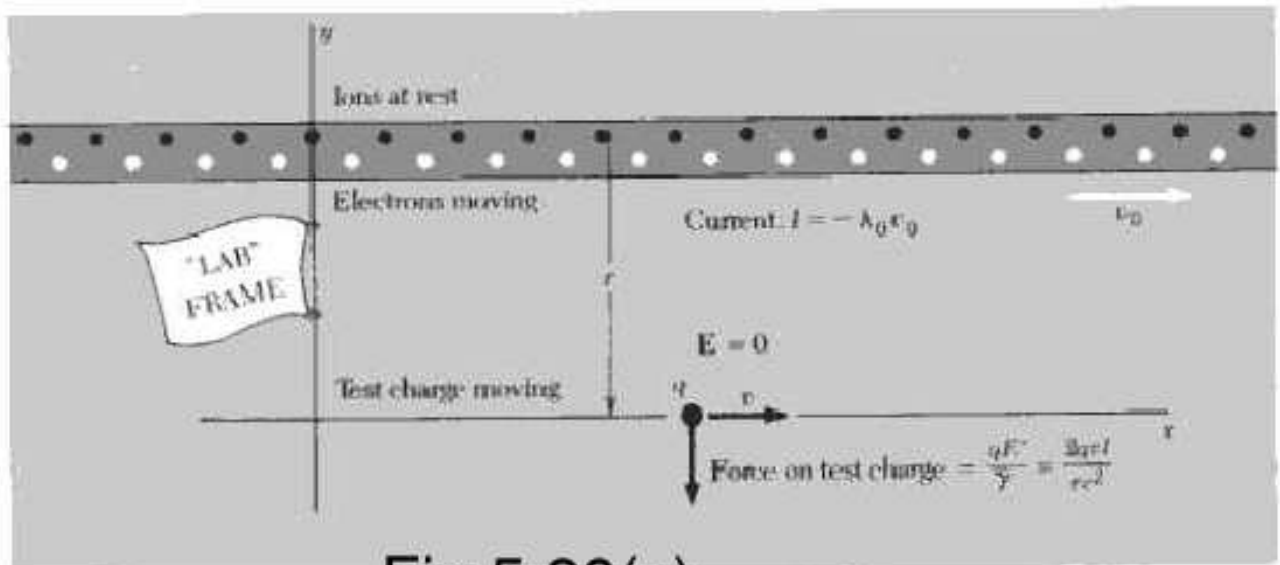


Fig.5.20(c)

試験電荷 q に働く力を調べてみる。

TEST CHARGE FRAME で qE_y' の力は LAB FRAME では $1/\gamma$ 倍だけ小さくなり、 $r = r'$ だから LAB FRAME で測った動いている試験電荷に働く力は

$$F_y = \frac{F_y'}{\gamma} = -\frac{q\beta\beta_0\lambda_0}{2\pi\epsilon_0 r'} \quad (5.23)$$

と書ける。

$-\lambda_0 v_0 = -\lambda_0 \beta_0 c$ は導線中を流れる電流を I とすると $-I$ に等しい。よって結果は

$$F_y = -\frac{I}{2\pi\epsilon_0 r c^2} q v_x = -\frac{\mu_0 I}{2\pi r} q v_x \quad (5.24)$$

となることがわかる。

ここで真空の誘電率は $\epsilon_0 = 1/(c^2\mu_0)$ と真空中の光速と透磁率 μ_0 を用いて定義されていることを用いた。

これ以下の Purcell の教科書の記述は省略することにする。

ただし、次章の冒頭で説明する Lorentz 力は

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q\mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (4)$$

である。

ここで考えた I なる電流が $-x$ 方向に流れているとき、電流から $-y$ 方向に r だけ離れたところを v なる速さで x 方向に動いている試験電荷 q に働く力が

$$F_y = -\frac{\mu_0 I}{2\pi r} q v_x \quad (5)$$

であることを Lorentz 力と比較すると、この電流が試験電荷のところに作る磁束密度 \mathbf{B} は

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \hat{\mathbf{z}} \quad (6)$$

となることがわかる。

これは Ampère の法則あるいは Biot-Savart の公式から得られる結果と同一である。