

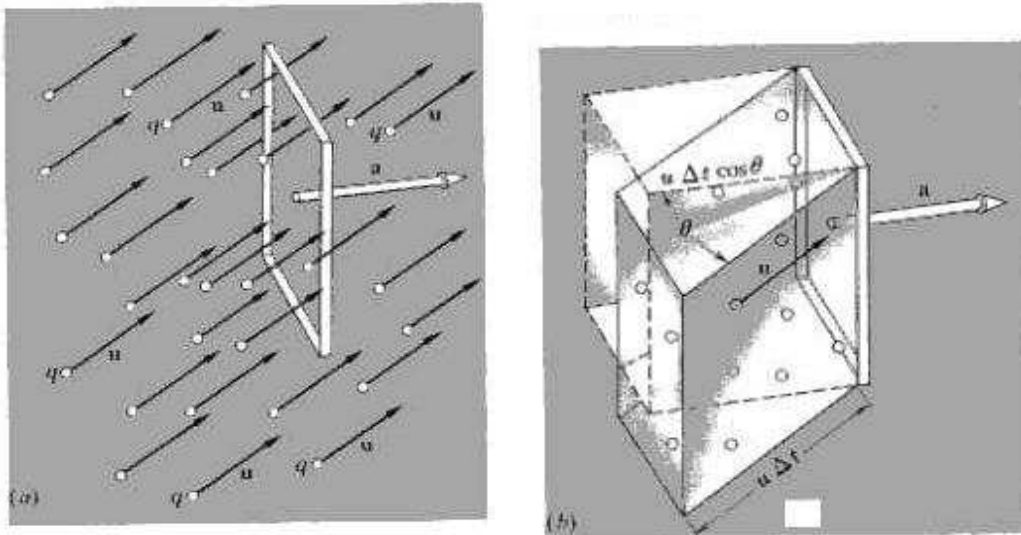
## 第4章 Electric Currents (電流)

### 4.1 Electric Current and Current Density (電流および電流密度)

電荷が動くと電流ができる。電流の単位は A である。C=A·s である。  
 電流を規定するためには個々の電荷ではなくあらゆる電荷の正味の輸送を考えなければならない。例えば、ホースを通る水 1g あたりおよそ  $3 \times 10^{23}$  個の電子が動くが、電子と共に同数の陽子も動くので電流はゼロアンペアである。  
 必ずしも電流は導線中を流れるとは限らず 3次元空間を動きまわる荷電粒子によるものもあるので、電流密度を定義して出発すると都合がよい。FIGURE 4.1(a) 図には、平均個

**FIGURE 4.1**

(a) A swarm of charged particles all moving with the same velocity  $u$ . The frame has area  $a$ . The particles which will pass through the frame in the next  $\Delta t$  sec are those now contained in the oblique prism (b). The prism has base area  $a$  and altitude  $u \Delta t \cos \theta$ , hence its volume is  $au \Delta t \cos \theta$  or  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{u} \Delta t$ .



数が単位体積あたり  $n$  個の  $q$  なる電荷をもつ速度  $\mathbf{u}$  の荷電粒子と、面積  $a$  の枠が描かれている。この枠と直交する向きに大きさ  $a$  のベクトル  $\mathbf{a}$  を設定する。  
 この枠を微小時間  $\Delta t$  にどれだけの粒子が通過するか考える。  
 時刻  $t$  での様子を上図に描いてあるとする。その後の時間間隔  $\Delta t$  の間にこの枠を通過する粒子は (b) 図のプリズム状領域内に存在している。  
 この領域の体積は  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{u} \Delta t$  であるから、この領域にある粒子数は  $n \mathbf{a} \cdot \mathbf{u} \Delta t$  である。  
 この枠を通過する電荷の平均的割合が電流  $I_a$  である。よって

$$I_a = \frac{q(n \mathbf{a} \cdot \mathbf{u} \Delta t)}{\Delta t} = n \mathbf{a} \cdot \mathbf{u} \quad (4.1)$$

となる。

各種の荷電粒子が混在している系では、 $k$  番目の種類の粒子が電荷  $q_k$  をもち、速度が  $\mathbf{u}_k$  であるとし、単位体積あたり  $n_k$  個の数密度であるとする。電流は

$$I_a = \mathbf{a} \cdot \sum_k n_k q_k \mathbf{u}_k \quad (4.2)$$

となる。

電流密度 (ベクトル) は  $\mathbf{J}$  [A/m<sup>2</sup>] を次式で定義される。

$$\mathbf{J} = \sum_k n_k q_k \mathbf{u}_k \quad (4.3)$$

#### 4.2 Steady Currents and Charge Conservation (定常電流と電荷の保存則)

任意の面  $S$  を通過する電流  $I$  は、電流密度の面積分であたえられる。

$$I = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a} \quad (4.6)$$

電流密度  $\mathbf{J}$  がいたるところ時間的に一定なら定常電流の系を作っている。

$S$  が閉曲面であるとしよう。その  $S$  によってかこまれる領域を  $V$  とする。 $V$  の時刻  $t$  のときの電荷を  $Q$ 、時刻  $t + \Delta t$  のときの電荷を  $Q + \Delta Q$  と表すと、微小時間  $\Delta t$  の間に  $V$  からその表面  $S$  を通って流れ出る電気量は  $-\Delta Q$  だから

$$\oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a} \Delta t = -\Delta Q \quad (1)$$

流れ出る電流を  $I$  と書き、電荷密度を  $\rho$  と書くと

$$I = \oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a} = -\frac{dQ}{dt} = -\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dv \quad (2)$$

となる。

Gauss の定理より

$$\oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a} = \int_V \operatorname{div} \mathbf{J} dv \quad (3)$$

だから

$$\operatorname{div} \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (4.9)$$

が成立する。

これは電荷の保存則を電流密度と電荷密度を用いて書き表した表式である。

時間的に電荷分布が変わらなければ、電流密度は

$$\text{div } \mathbf{J} = 0 \quad (4.7)$$

を満たさなければならない。定常電流の系では、いつでも任意の領域  $V$  に入り込んだ電気量と同じだけ電気量が出て行かなければならないことを意味している。

#### 4.3 Electrical Conductivity And Ohm's Law (電気伝導率とオームの法則)

電場  $\mathbf{E}$  により正電荷は電場の方向に、負電荷は逆方向に動かされる。その結果  $\mathbf{E}$  の方向に電流が生ずる。

物質中では多くの場合、電流密度は電場に比例する<sup>1</sup>。これが Ohm の法則である。

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \quad (4.10)$$

比例定数  $\sigma$  [A/(V·m)] を Conductivity(電気伝導率)という。電気伝導率の逆数を Resistivity(抵抗率)  $\rho = 1/\sigma$  [ $\Omega \cdot \text{m}$ ] とよぶ。

導体の電気伝導率は大きい、絶縁体では非常に小さい。その値は温度によって変わるのが普通である (FIGURE 4.8 参照)。

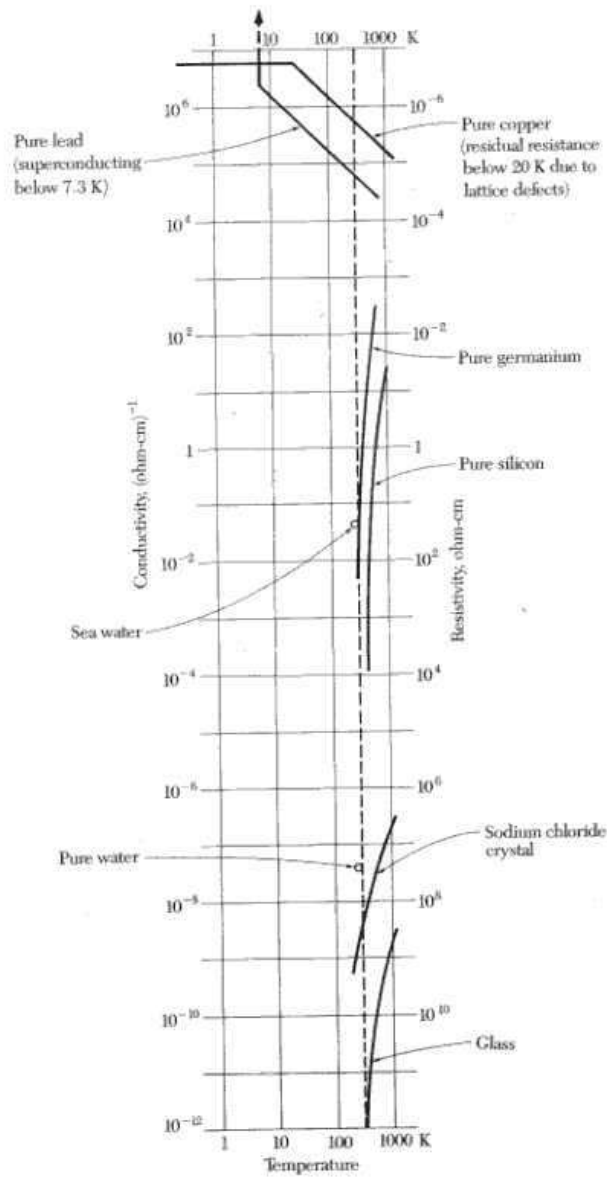
**TABLE 4.1**

Resistivity and its reciprocal, conductivity, for a few materials

Material	Resistivity $\rho$	Conductivity $\sigma$
Pure copper, 273 K	$1.56 \times 10^{-9} \text{ ohm-cm}$ $1.73 \times 10^{-10} \text{ sec}$	$6.4 \times 10^8 \text{ (ohm-cm)}^{-1}$ $5.8 \times 10^{17} \text{ sec}^{-1}$
Pure copper, 373 K	$2.24 \times 10^{-8} \text{ ohm-cm}$ $2.47 \times 10^{-10} \text{ sec}$	$4.5 \times 10^8 \text{ (ohm-cm)}^{-1}$ $4.0 \times 10^{17} \text{ sec}^{-1}$
Pure germanium, 273 K	200 ohm-cm $2.2 \times 10^{-10} \text{ sec}$	$0.005 \text{ (ohm-cm)}^{-1}$ $4.5 \times 10^9 \text{ sec}^{-1}$
Pure germanium, 500 K	0.12 ohm-cm $1.3 \times 10^{-10} \text{ sec}$	$8.3 \text{ (ohm-cm)}^{-1}$ $7.7 \times 10^{10} \text{ sec}^{-1}$
Pure water, 291 K	$2.5 \times 10^7 \text{ ohm-cm}$ $2.8 \times 10^{-8} \text{ sec}$	$4.0 \times 10^{-8} \text{ (ohm-cm)}^{-1}$ $3.6 \times 10^4 \text{ sec}^{-1}$
Seawater (varies with salinity)	25 ohm-cm $2.8 \times 10^{-11} \text{ sec}$	$0.04 \text{ (ohm-cm)}^{-1}$ $3.6 \times 10^{10} \text{ sec}^{-1}$

Note: 1 ohm-meter = 100 ohm-cm =  $1.11 \times 10^{-10} \text{ sec}$ .

<sup>1</sup>黒鉛の単結晶とか、いくつかの物質でできた薄膜を層状に積み重ねた材質では電流密度の方向と電場の方向は一致しない。



Ohm の法則は実験から導かれた経験則である。  
 両端の電位差が  $V$  なる長さ  $L$ 、断面積  $A$  の導体中を電流が流れているとき

$$R = \frac{V}{I} = \frac{LE}{AJ} = \frac{L}{\sigma A} = \frac{\rho L}{A} \quad (4.14)$$

を示すことは簡単である。ただし、電流密度は導体内部で一定かつ一様であるとせよ。また、導体は十分長く、絶縁物質で覆われているとする。

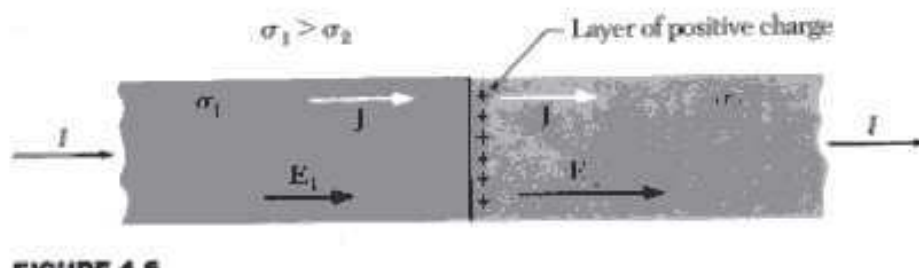
伝導率  $\sigma$  が一様な領域では、定常電流の条件に Ohm の法則を代入して

$$\operatorname{div} \mathbf{J} = \sigma \operatorname{div} \mathbf{E} = 0 \quad (4)$$

を得るから、この領域での電荷密度はゼロである。

逆に、 $\sigma$  が非一様で、場所によって変われば、Gauss の法則より電流が流れると電気伝導率の非一様な領域には電荷が現われなければならないことがわかる。

FIGURE 4.6 に示したのはこの一例であり、電気伝導率の異なる導体を接合し、電流  $I$  を流し続けると、その接合面に電荷が現われる。



#### 4.7 Circuit and Circuit Elements (回路と回路素子)

JIS の回路素子記号は 1996 年の IEC(国際電気標準会議) の決定に従い 1997 年から変更されている。簡単な素子についての新旧対称例を下の図に掲げる。

抵抗を無視できる導線で素子をつないでできる電流の通る路を回路網という。

回路網については

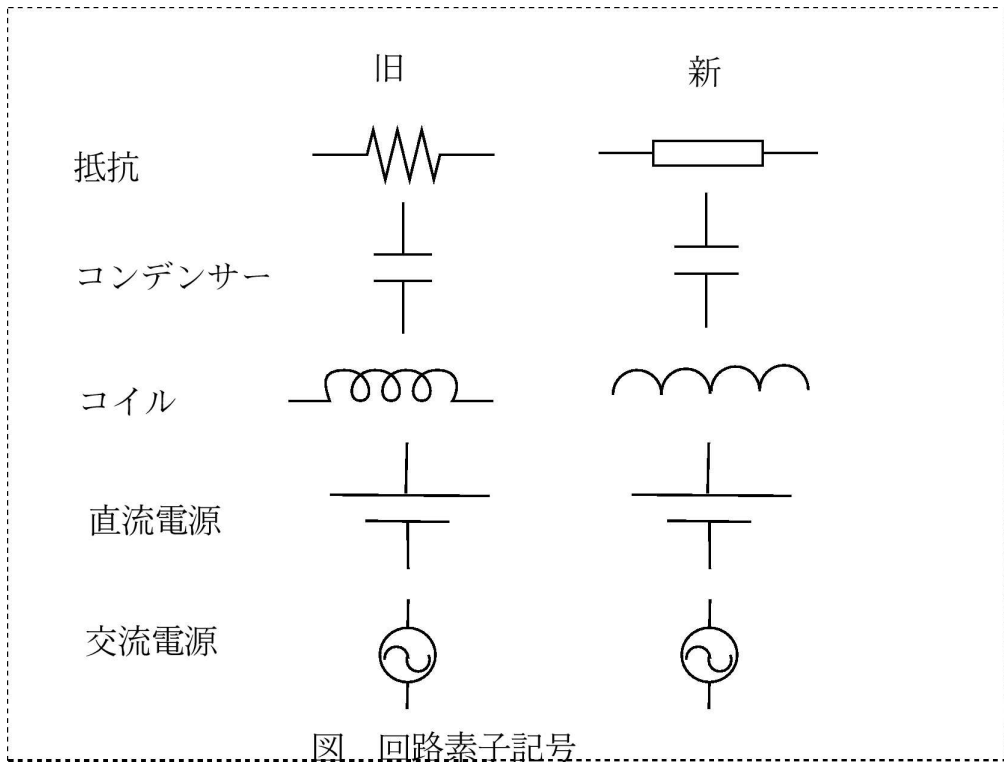
1. Ohm の法則: 回路素子を通る電流は素子の電圧を抵抗で割ったものに等しい。
2. 電荷の保存則: 回路の結節点に入る電流が 3 つ以上のとき、総和はゼロである。
3. 閉回路  $C$  について、電源を含まない場合は

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = 0 \quad (5)$$

が成立しなければならない。

電源を含む場合、回路を一周したとき抵抗による電圧降下は回路に含まれる起電力に等しい。

上記の 1、2、3 を合わせて Kirchhoff の法則という。



#### 4.8 Energy Dissipation in Current Flow (電流のエネルギー損失)

導体中の荷電粒子を平均速度  $\mathbf{u}$  で動かし続けるには、素子の中の原子や分子との非弾性衝突<sup>2</sup>により失われるエネルギーを外部からの仕事により補わなければならない。この仕事の仕事率は、外部から加えられた電場  $\mathbf{E}$  が荷電粒子の電荷を  $q$  とすると単位体積あたり

$$nq\mathbf{E} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} \quad (6)$$

である。

導体中ではこれだけのエネルギー損失がおこり、Joule 熱となって導体から逃げて行く。

$I[\text{A}]$  の電流が  $R[\Omega]$  の抵抗を流れるとき、 $V = RI[\text{V}]$  の電位差の中を毎秒  $I[\text{C}]$  の電荷が通って行くので、1秒間になされなければならない仕事  $P[\text{W}]$  は

$$P = I^2 R \quad (4.24)$$

である。これが必要な仕事率であり、発生する Joule 熱をあたえる表式である。

このエネルギー損失を電源が回路に供給しなければ電流は流れ続けない。

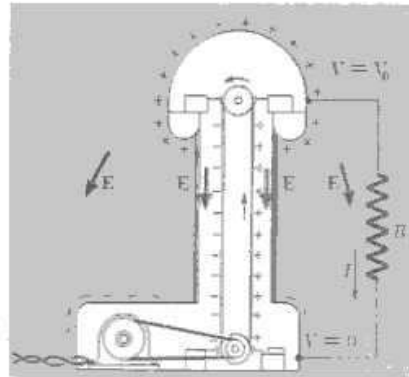
電源のことを Electromotive Force(起電力; emf) といい、記号  $\mathcal{E}$  であらわす。単位は電位差と同じで  $\text{V}$  である。

<sup>2</sup>金属導体では、金属結晶格子内の不純物や格子欠陥との衝突による。

#### 4.9 Electromotive Force and the Voltaic Cell (起電力とボルタ電池)

emf の一例として FIGURE 4.19 で Van de Graaf electrostatic generator(ヴァンデグラーフ起電機)をしめす。

**FIGURE 4.19**  
In the Van de Graaff generator, charge carriers are mechanically transported in a direction opposite that in which the electric field would move them.



定常的にこの装置が働いていれば電流が電場の方向に流れて外部の抵抗で  $I^2 R$  の割合でエネルギーが消費される。装置の内部では荷電粒子が絶縁体のベルトにしっかり附着し電場とは反対向きに上まで持ちあげられて、端子のブラシでの強電場によりベルトからはぎ取られる。このベルトを動かす仕事はモーター、エンジン、あるいは人力などから供給される。こうしてこの装置は emf(起電力)として作動する。

このように直流回路の emf 内では、電場が動かそうとする方向とは反対向きに荷電粒子が動かされる。

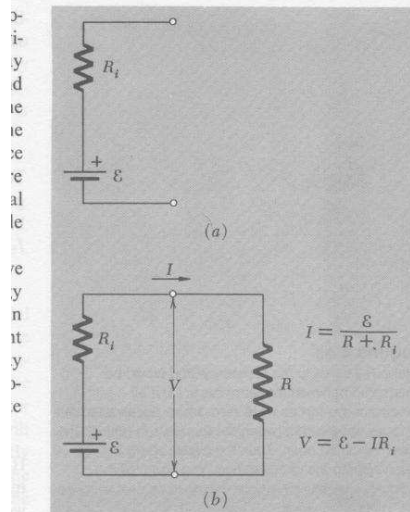
1800年に Volta は塩水で湿らせたボール紙を挟んだ亜鉛板と銀板で簡単な電池を始めて作った。化学反応から得られるエネルギーを利用する電池でも、内部では荷電粒子は電場の向きと逆に電荷が陰極から陽極へ運ばれている。

電源と抵抗  $R$  を接続すると電源の電圧  $V$  は emf  $\mathcal{E}$  より少し下がる。この閉回路には電流  $I$  が流れ、

$$I = \frac{V}{R} \quad (7)$$

となる。 $\mathcal{E}$  と  $V$  の差は電池が電源の場合は、電池内の電解質の抵抗(内部抵抗)によって生じる。電解質中にも電流が電場とは逆方向に流れる。

内部抵抗を  $R_i$  と書くと、この閉回路の系は FIGURE 4.21 の等価回路として表すことができる。



**FIGURE 4.21**  
 (a) The equivalent circuit for a voltaic cell is simply a resistance  $R_i$  in series with an electromotive force  $\epsilon$  of fixed value. (b) Calculation of the current in a circuit containing a voltaic cell.

#### 4.10 Networks with Voltage Sources (電源を含んだ回路網)

次の FIGURE 4.22 は電源を 2 つ含んだ閉回路である。Kirchhoff の法則を使うと、各電流の値は

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \frac{\mathcal{E}_1 R_2 + \mathcal{E}_1 R_3 + \mathcal{E}_2 R_3}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3} \\
 I_2 &= \frac{\mathcal{E}_2 R_1 + \mathcal{E}_2 R_3 + \mathcal{E}_1 R_3}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3} \\
 I_3 &= \frac{\mathcal{E}_1 R_2 - \mathcal{E}_2 R_1}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3}
 \end{aligned} \tag{4.26}$$

が得られる。

この回路が FIGURE 4.23(a) のような 2 本の導線を結節点 A と B で外部と結ばれてもっと大きな回路網に含まれる部分的回路網であるとき、内部回路網を (b) のように 2 本の導線が端子である一個の電源 (起電力  $\mathcal{E}_{eq}$ 、内部抵抗  $R_{eq}$ ) に置き換えて考えてよいという鳳-テブナンの定理がある。

この定理によると、どんなに複雑な回路であってもその内部の 2 端子回路網を以下の  $R_{eq}$  なる内部抵抗を持つ起電力  $\mathcal{E}_{eq}$  一つに置き換えてよい。

$\mathcal{E}_{eq}$  は 2 端子を短絡したときの端子間電圧である。



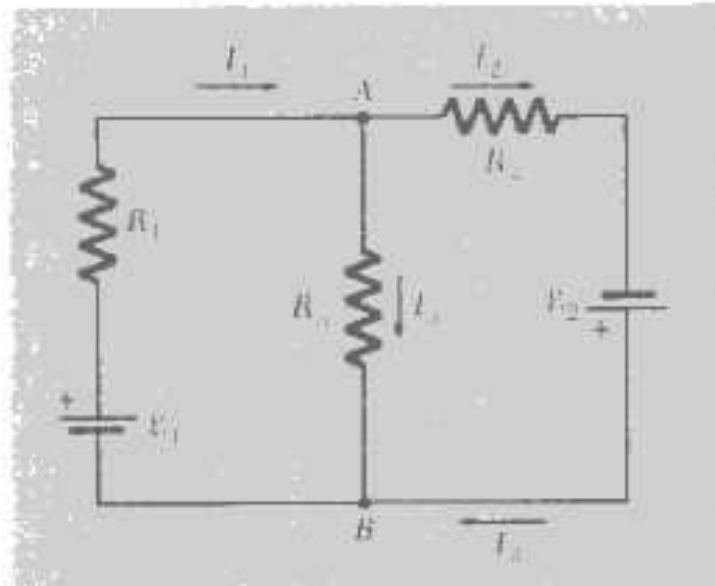


FIGURE 4.22

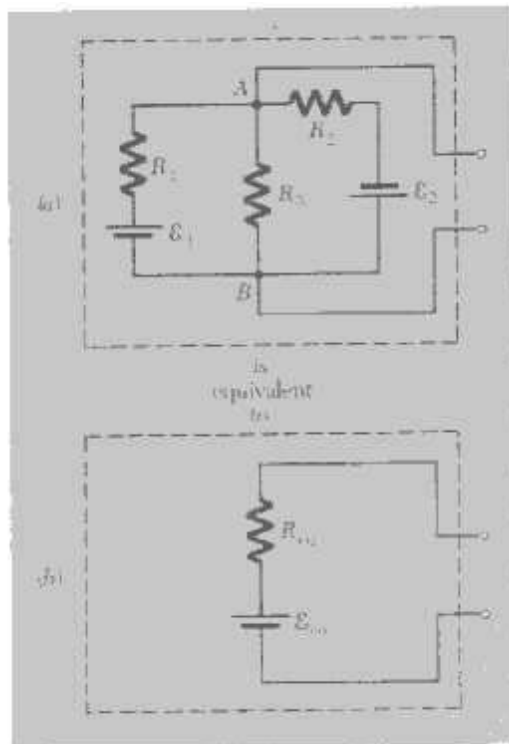


FIGURE 4.23

$R_{eq}$  は考えている内部回路網に含まれる起電力をすべてゼロにしたとき得られる 2 端子間の抵抗である。

FIGURE 4.23 の例では

$$\mathcal{E}_{eq} = I_3 R_3 = \frac{\mathcal{E}_1 R_2 - \mathcal{E}_2 R_1}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3} R_3 \quad (8)$$

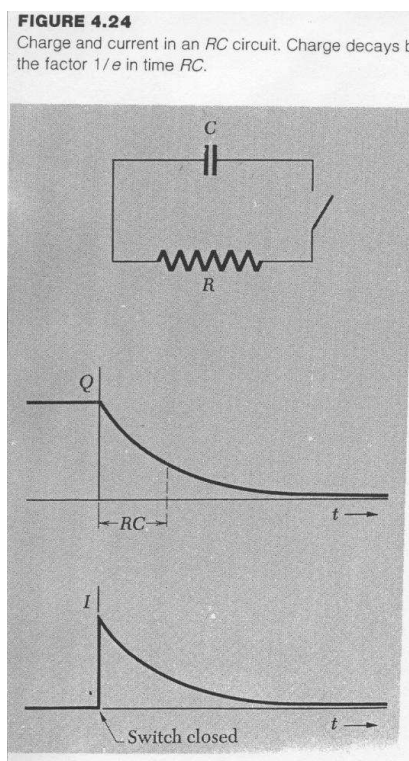
および

$$R_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}} = \frac{R_1 R_2 R_3}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3} \quad (9)$$

に等しい。

#### 4.11 Variable Currents in Capacitors and Resistors (RC 回路の電流の時間変化)

FIGURE 4.24 の回路を RC 回路という。この回路の電気容量  $C$  のコンデンサーを  $V_0$  の電位まで充電した後、抵抗  $R$  に接続しスイッチをとじて放電させるとする。



ある瞬間のコンデンサーの電荷を  $Q$ 、その両極板間の電位差を  $V$  と書く。陽極側から電

流が出るときを電流  $I$  の正の向きとする。  $Q$ 、  $V$ 、  $I$  はいずれも時間の関数であるが

$$\begin{aligned} Q &= CV \\ I &= \frac{V}{R} \\ -\frac{dQ}{dt} &= I \end{aligned} \quad (4.28)$$

が成立する。

よって  $Q$  の時間変化をきめる方程式

$$\frac{dQ}{dt} = -\frac{Q}{RC} \quad (4.29)$$

が得られる。

この方程式の一般解は

$$Q = (\text{任意定数}) \cdot e^{-t/RC} \quad (4.32)$$

となる。

$t = 0$  では  $V = V_0$  としたので、コンデンサーの初期の電荷は  $CV_0$  となる。これより任意定数を定めれば、スイッチをとじてから  $t$  秒後の電荷は

$$Q = CV_0 e^{-t/RC} \quad (4.33)$$

となることがわかる。

電流も

$$I = -\frac{dQ}{dt} = \frac{V_0}{R} e^{-t/RC} \quad (4.35)$$

と得られる。

$RC$  なる積はこの回路に現われる定数の積であるが、時間の次元を持つので時定数とよばれる。系の物理量の時間変化の割合いを定める定数である。