

第3章 Electric Fields around Conductors (導体の電場)

3.1 Conductors and Insulators (導体と絶縁体)

電気の伝えやすさに応じて物質を導体、絶縁体 (不良導体、誘電体)、半導体の3種に大別できる。

後で見るように物質に外部から電場がかけられたとき、実験的に Ohm の法則が成立することが知られている。この法則は電流密度 J と電場 E は比例して

$$J = \sigma E \quad (4.10)$$

なる関係式が成立するというものである。係数 σ を伝導率という。 σ が大きければ大きいほど電気を伝えやすい。次の図は各種の物質について σ の値の温度変化を両対数でプロットしたグラフである。

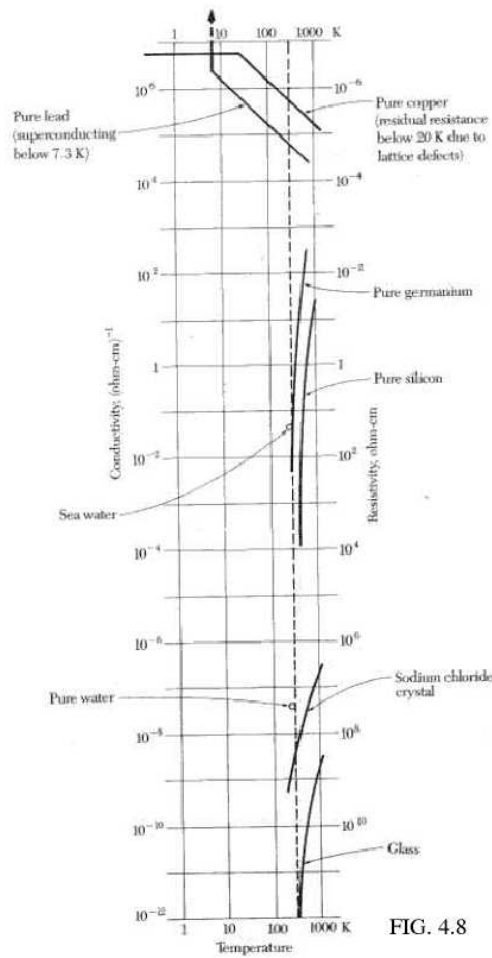


FIG. 4.8

常温では純銅 (Cu) が純粋な硅素 (Si) やゲルマニウム (Ge)(この 2 つの物質は半導体である) に比べてずっと伝導率が高いことがわかる。NaCl 結晶、ガラスなどは絶縁体 (誘電体、insulator) であることがわかる。

誘電体は電子が各原子核に強く束縛されているか原子核間にはさまれていて、よほど強い電場をかけない限り、電子をきりはなせない。外部からそれほど強くない電場がかけられたときは、原子あるいは分子中の正負の電荷が分離し、電気双極子モーメントが発生する。その結果、外部電場により内部にも誘導電場が発生する。誘電率は真空より大きくなってしまふ。

金属だけでなく電解質溶液や電離気体 (plasma) も導体 (conductor) である。これらの物質内には自由に動ける電子やイオンが存在しているので、もし内部に静電場が存在すれば、すぐにこれらの荷電粒子が動いて内部の電場を打ち消してしまう。したがって導体内部では静電場は存在しない。外部から電場がかけられても、分極はおこらず、その誘電率は真空と同じであって、電子が外部電場によって動きだし電荷の移動が起こるので電流が流れだすことになる。電流に関しては、このすぐ次の章で考えることにする。

半導体 (semiconductor) は低温では絶縁体、高温では導体のように振舞う非常に利用価値の高い物質である。

3.2 Conductors in the Electrostatic Field (導体の内外の電場と電位)

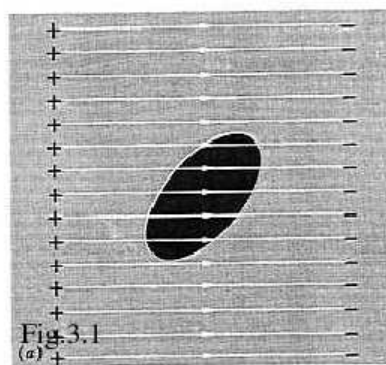
均質で等方的な導体物質の内部で定常的電場はゼロである。よってそのような導体内部は等電位になっている。

導体の外部の電場はゼロではない。導体表面はこの電場の等電位面である。

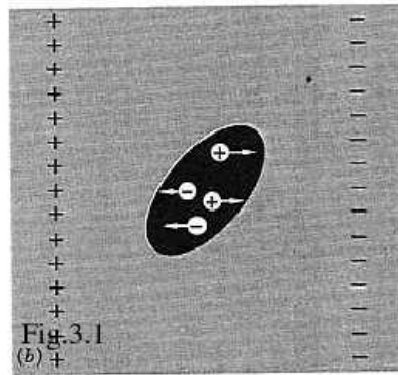
絶縁物質をなんらかの方法で導体に変えてみる。例えば気体に X 線を照射するとか、ガラスを熱するとかの方法がある。

下図のように電場内に帯電していない絶縁体をおいたとする。

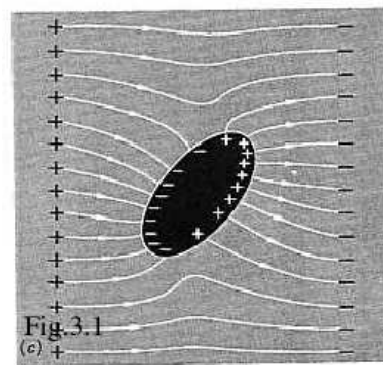
内部に誘導される電場が弱いときは、物体内外の電場は等しい。



次に物体内を動くことのできる電荷を物体に作り、物体を導体化したとする。次図のように正電荷は電場の方向に、負電荷は電場とは逆方向に動かされる。



動かされた電荷は導体表面まで移動するので、導体表面に電荷がたまる。その結果、あらたに電場が発生し、重ね合わされた電場を図示すると次のようになる。内部の電場が完全に相殺されまで電荷の移動が続くから電荷は導体表面上に分布して最終的に内部電場がゼロとなるのである。



前章では、あたえられた電荷分布の作る電場を解くことを考えたが、この章で考える導体の問題は電場を求めるとき、導体内の電場がゼロとなるように電荷分布も同時に解くことが必要になることが、この模式でわかる。

上の最後の図のような外部から電場がかけられたとき、内部の電場をゼロにするように導体表面に電荷が現われる現象を静電誘導という。

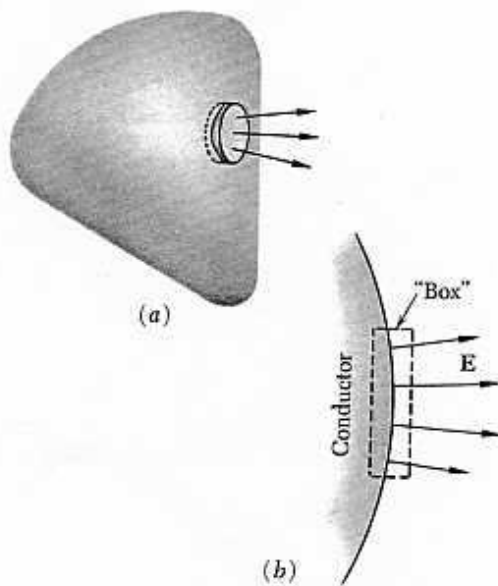
導体表面の電荷分布と電場

導体表面ではどこでも電場は表面と直交している。

FIGURE 3.3 で示したように導体表面の微小領域 da を包みこむ平らな箱の表面を Gauss の法則を適用する面とする。

FIGURE 3.3

(a) Gauss' law relates the electric field strength at the surface of a conductor to the density of surface charge (Eq. 2). (b) Cross section through surface of conductor and box.



da の外向き単位法線を \mathbf{n} とすれば

$$\mathbf{E} = \begin{cases} E_n \mathbf{n} & (\text{すぐ外}) \\ 0 & (\text{導体内}) \end{cases} \quad (1)$$

であり、導体表面上の電荷面密度を σ とすると Gauss の法則より

$$\epsilon_0 E_n da = \sigma da \quad (2)$$

である。

よって

$$E_n = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad \text{あるいは} \quad \sigma = \epsilon_0 E_n \quad (3)$$

となっている。

N 個の導体からなる系での境界条件は以下の3つようになる。ここで、無限遠にまで導体が伸びていないとする。FIGURE 3.2 は $N = 3$ の例である。

k 番目 ($k = 1, \dots, N$) の導体について

(1) 導体の表面ではどこでも $\phi = \phi_k$ (定数) なる決まった値の電位になっている。 (3.1)

(2) 導体のすぐ外側での電場 \mathbf{E}_k は導体表面と直交している。 (3.2)

(3) 導体は電荷 Q_k を持つ。 (3.3) ここで

$$Q_k = \oint_{S_k} \sigma_k da = \epsilon_0 \oint_{S_k} \mathbf{E}_k \cdot d\mathbf{a} \quad (3.3)$$

である。

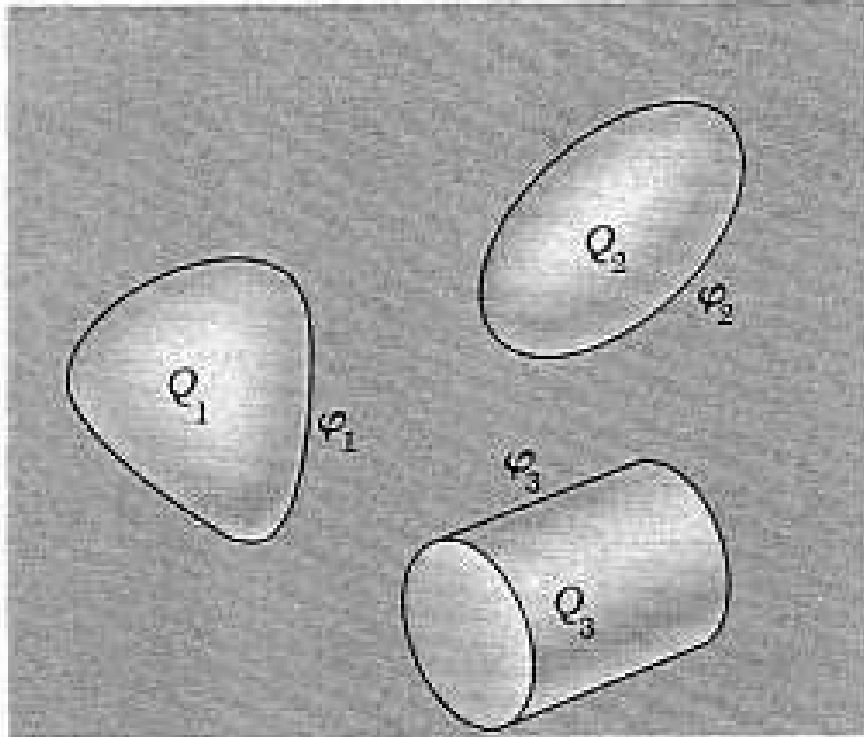


FIGURE 3.2

A system of three conductors. Q_1 is the charge on conductor 1, ϕ_1 is its potential, etc.

3.3 The General Electrostatic Problems; Uniqueness Theorem (一意性の定理)

導体からなる系では電荷は導体表面にのみ存在する。それ以外の領域では Laplace 方程式 $\nabla^2\phi = 0$ が成立している。あたえられた境界条件を満たすこの方程式の解は一意的に決まる。これを一意性の定理という。

導体表面での同じ境界条件を満たす Laplace 方程式の 2 つの解 $\phi = \varphi(\mathbf{r})$ と $\phi = \psi(\mathbf{r})$ がみつかったとする。このとき、 $W(\mathbf{r}) = \varphi(\mathbf{r}) - \psi(\mathbf{r})$ も Laplace 方程式 $\nabla^2 W = 0$ をみたす。ただし、境界条件は各導体表面上で $W = 0$ となっている。

この境界条件を満たす調和関数 W は導体表面上だけではなくすべての領域でゼロである。もしそうでなければ W は領域のどこかで極値をとらなければならないが、既に第 2 章で見たように調和関数は領域内では極値をとることができないことと矛盾するからである。

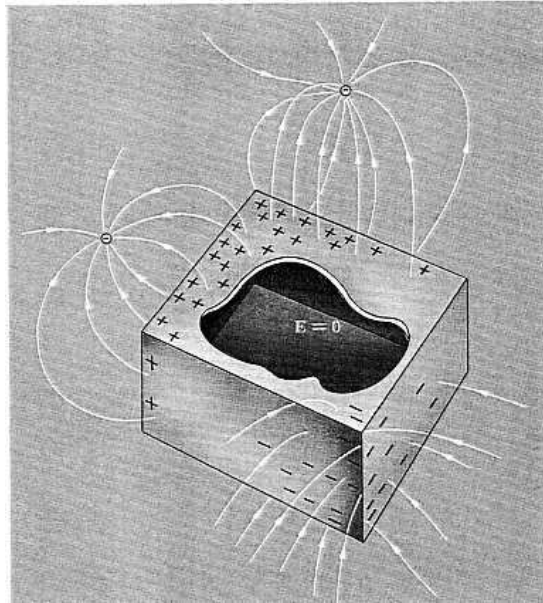
よって

$$W = 0 \quad \text{つまり} \quad \varphi(\mathbf{r}) = \psi(\mathbf{r}) \quad (4)$$

でなければならない。

静電遮蔽

中空の導体がある。その中空領域 V に電荷が存在しなければ V での電場はゼロである。これを静電遮蔽という。



V では Laplace 方程式 $\nabla^2 \phi = 0$ が成立しているが、境界面は導体の表面だから電位は $\phi = \phi_0$ なる定数である。もちろん V において $\phi = \phi_0$ は境界条件をみたす Laplace 方程式の解である。しかも一意性の定理より、その他に解はない。よって

$$\mathbf{E} = -\nabla \phi_0 = 0 \quad (5)$$

となっているので、静電遮蔽がなりたつ。

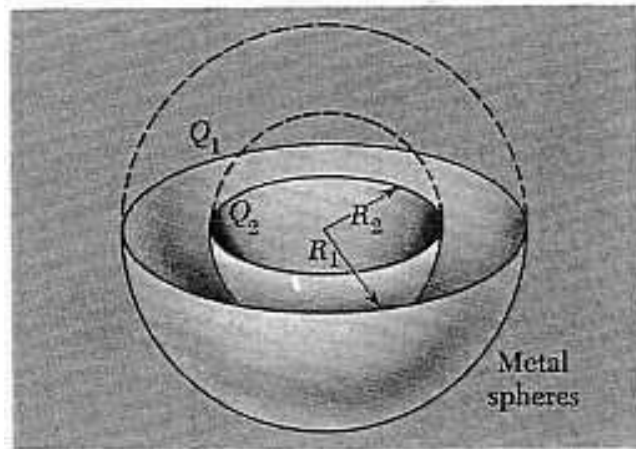
完全な静電遮蔽を実現するためには、完全に導体で覆ってしまわなければならないが、導体壁に少々穴があいていても、あるいは金網であっても穴の近辺以外の電場は非常に弱くなるので実用上の目的に供することができる。

3.4 Some Simple Systems of Conductors (簡単な例)

(1) FIGURE 3.7 のように半径 R_1 と R_2 の同心導体球面上に電荷 Q_1 と Q_2 がそれぞれあたえられた系を考える。無限遠を基準としたとき、導体 1 の電位 ϕ_1 が

FIGURE 3.7

With given charges Q_1 and Q_2 on the spherical shells, the potential of the inner shell is given by Eq. 6.



$$\phi_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 + Q_2}{R_1} \quad (6)$$

となるのは、既に見た通りである。

$0 \leq r \leq R_1$ での電位は

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{R_1}^r \frac{-Q^2}{r^2} dr + \phi_1 \quad (7)$$

より、導体 2 の電位が

$$\phi_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q_1}{R_1} + \frac{Q_2}{R_2} \right) \quad (3.6)$$

となっている。

内側の球殻の中側での電位は定数 ϕ_2 に等しく

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q_1}{R_1} + \frac{Q_2}{R_2} \right) \quad (8)$$

である。

これをまとめて

$$\begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix} \quad (9)$$

と書くと、行列 P (電位係数からなる行列) は

$$P = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \begin{pmatrix} \frac{1}{R_1} & \frac{1}{R_1} \\ \frac{1}{R_1} & \frac{1}{R_2} \end{pmatrix} \quad (10)$$

である。
逆にいて

$$\begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} \quad (11)$$

と表すと C (容量係数からなる行列) は

$$C = 4\pi\epsilon_0 \begin{pmatrix} \frac{R_1^2}{R_1 - R_2} & -\frac{R_1 R_2}{R_1 - R_2} \\ -\frac{R_1 R_2}{R_1 - R_2} & \frac{R_1 R_2}{R_1 - R_2} \end{pmatrix} \quad (12)$$

となる。

(2) 鏡像法

導体系の境界条件をみたす Laplace 方程式の解による電場を求めるために、この境界条件を再現する点電荷の系をみつけることができる場合がある。そのような点電荷の系の電場の一部分が求めたい導体の問題の解をあたえることは一意性の定理より保障される。これは William Thomson (Lord Kelvin) によって考え出された電気鏡像法という解法である。

無限導体平面と点電荷の系

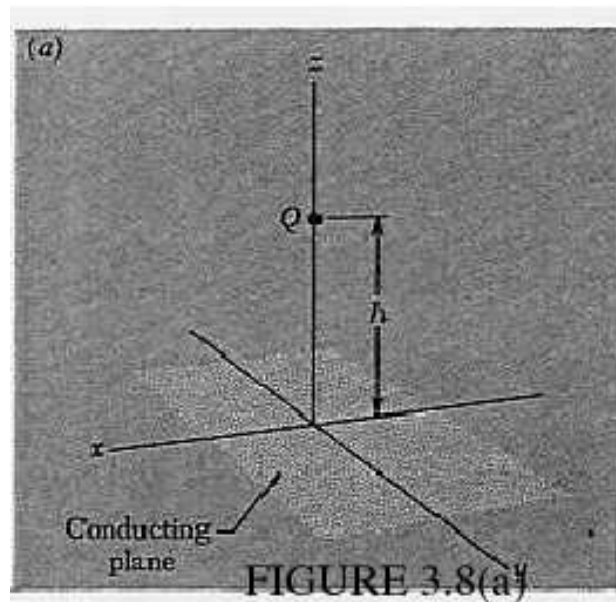


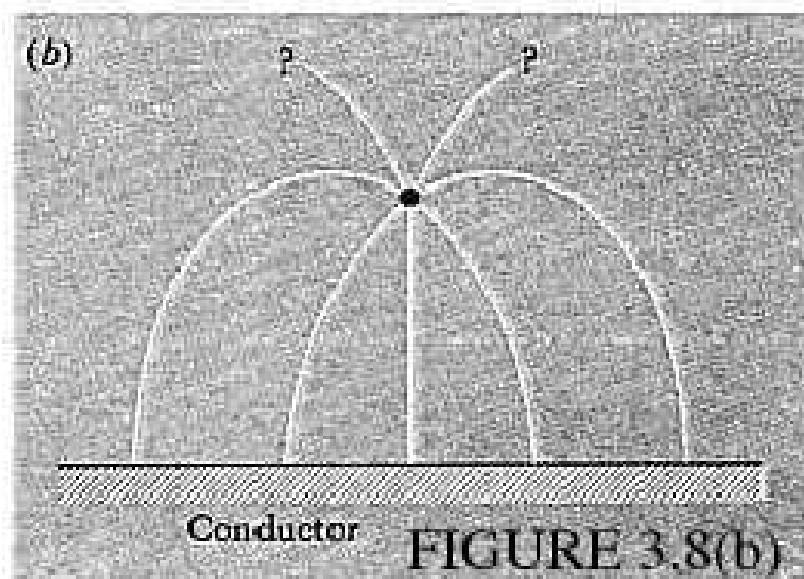
FIGURE 3.8(a) のように電気量 Q の点電荷が無限に広がっている導体平面から h だけ離れたところに存在しているときの電場を求めよう。

点電荷も導体球面の半径をゼロとした極限と考えれば 2 つの帯電導体からなる系としてよい。片方の無限小導体は表面上の総電荷が Q で、もう一方の無限導体面上の電位がゼロ

である。この2つの境界条件をみたす電場がみつければ一意性の定理より他に解はないので、何とか簡単な方法で答えを見つきたい。ここに鏡像法という巧妙な解法がある。これを紹介する。

$(x, y, z) = (0, 0, h)$ の位置に点電荷 Q が存在するとして、導体表面を $x - y$ 平面とするデカルト座標を設定する。原点は Q からおろした垂線と導体平面の交点に設ける。

$z > 0$ の電場を求め、導体表面上に誘導される電荷を明らかにすることが目標である。



点電荷 Q と $z = 0$ 面に関して対称の位置 $(0, 0, -h)$ に点電荷 $-Q$ を想定する。単なる2個の点電荷 Q と $-Q$ が $2h$ の間隔で相対している系の電場は Coulomb 力から簡単にわかる。

$z > 0$ の電位は $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ と置いて

$$\phi(x, y, z) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{1}{\sqrt{r^2 + (h - z)^2}} - \frac{1}{\sqrt{r^2 + (h + z)^2}} \right\} \quad (13)$$

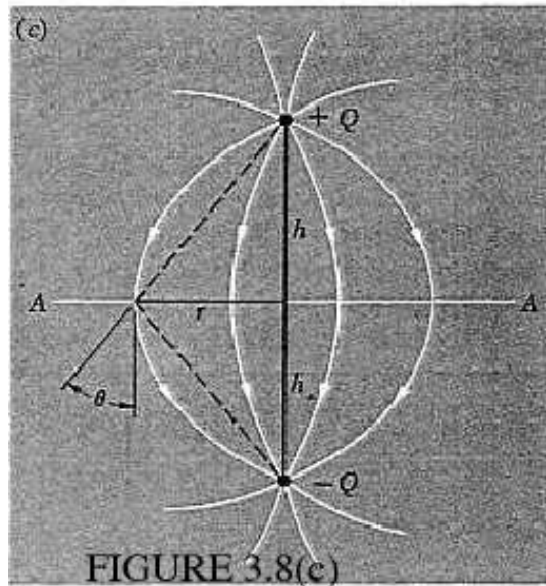
である。

この2つの点電荷の系で作る電場は $z = 0$ 面と直交しており、 Q の近傍の電場は当然 Q なる電荷を有する無限小導体のそれと同一であり、 $z > 0$ の電場は、この一意性の定理から問題にしている2つの帯電導体の作る場と同一である。よって簡単な2個の点電荷の系で電場を計算すれば良い。もちろん $z < 0$ の領域は、全く違っている。

点電荷 Q に対して点電荷 $-Q$ を鏡像電荷という。

2つの点電荷の系の電位から $z = 0$ 面上の電場の z 成分を求めると

$$E_z(x, y, 0) = -\frac{\partial\phi}{\partial z}\Big|_{z=0} = -\frac{Q}{2\pi\epsilon_0} \frac{h}{(r^2 + h^2)^{3/2}} \quad (3.7)$$



となる。これが導体表面上での電場の z 成分をあたえる。もちろん $z = 0$ では $E_x = E_y = 0$ となっているから、確かにこの電場は導体表面と直交している。

導体平面上に誘導される電荷面密度 σ は

$$\sigma = \epsilon_0 E_z(x, y, 0) = -\frac{Q}{2\pi} \frac{h}{(r^2 + h^2)^{3/2}} \quad (3.8)$$

であたえられる。

次図のように導体表面上に誘導される総電気量は原点を中心とする半径 r と $r + dr$ の円環上の微小電荷 dq は

$$dq = \sigma 2\pi r dr = -Q \frac{hr}{(r^2 + h^2)^{3/2}} dr \quad (14)$$

である。

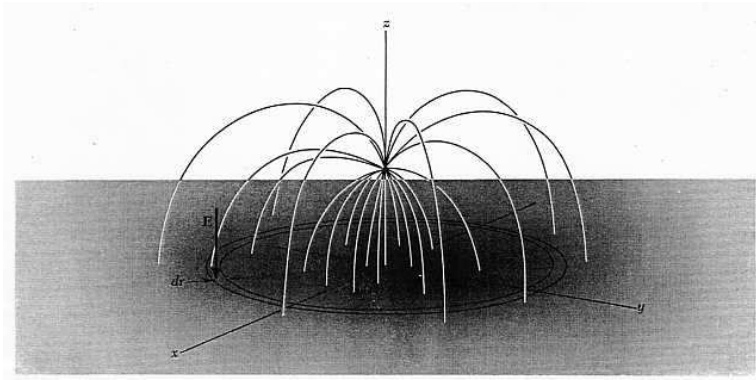
よって、誘導電気量は

$$\int_0^\infty \sigma 2\pi r dr = -\int_0^\infty Q \frac{hr}{(r^2 + h^2)^{3/2}} dr = -Q \quad (3.9)$$

となり、点電荷と反対符号の電気量となる。

もともと電氣的に中性であった導体に負電荷が誘起されたので、残った正電荷は何処にいったか、考えてみよ。

3.5 Capacitance and Capacitors (電気容量とコンデンサー)



Q なる電気量をもつ孤立している導体の表面の電位を ϕ_0 とする (無限遠をゼロ電位の基準とする)。 Q は ϕ_0 に比例する。

その比例係数 C は導体の幾何学的形状に依存する電気容量というパラメーターである。 C の単位は V/C であるが、これを F とする。

半径 a の導体球面の電位と電荷の関係は

$$\phi_0 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a} \quad (15)$$

であったから

$$C = 4\pi\epsilon_0 a \quad (3.12)$$

である。

導体 1 が電荷 Q 、電位 ϕ_1 、そして導体 2 が電荷 $-Q$ 、電位 ϕ_2 と帯電している 2 つの導体の場合、定義より

$$Q = C(\phi_1 - \phi_2) = C \int_1^2 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} \quad (16)$$

である。

最も簡単な例は FIGURE 3.12 の平行平板コンデンサーである。

各面の面積を A 、一方の極板 (陽極) に Q 、他方の極板 (陰極) に $-Q$ の電荷がのっているとし、陽極の電位を ϕ_1 、陰極の電位を ϕ_2 とする。極板間の距離を s とする。

極板の端の乱れをべつにすると、中の方では電場は一樣で大きさが $(\phi_1 - \phi_2)/s$ である。極板の中側の電荷面密度 σ は

$$\sigma = \epsilon_0 E = \epsilon_0 \frac{\phi_1 - \phi_2}{s} \quad (3.13)$$

であるので、極板の端の乱れを無視すると極板上の電荷は

$$Q = A\epsilon_0 \frac{\phi_1 - \phi_2}{s} \quad (3.14)$$

とあたえられる。実際には FIGURE 3.12(b) から想像されるように端には一様であると思っただけより電荷がすこし多く集まるので、上式であたえられるより全電荷はちょっと多くなる。

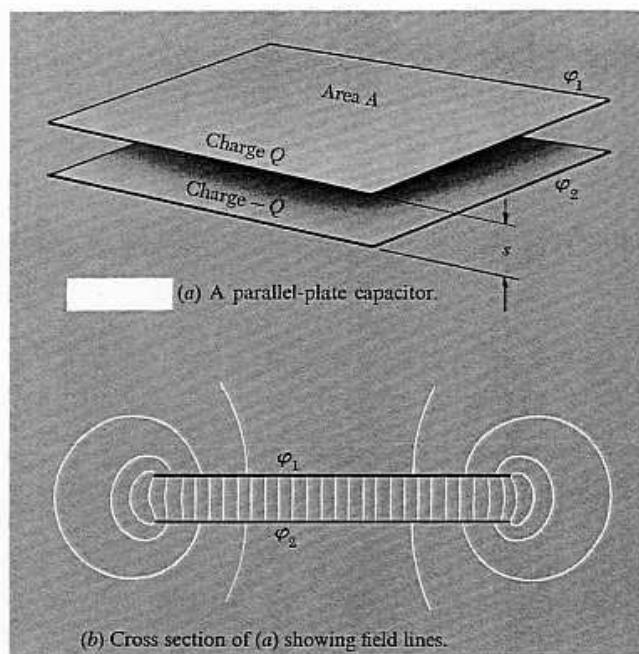


FIGURE 3.12

この効果を見れば、平行平板コンデンサの電気容量は

$$C = \frac{Q}{\phi_1 - \phi_2} = \frac{\epsilon_0 A}{s} \quad (17)$$

となる¹。

任意の導体の対をコンデンサと考えることができる。FIGURE 3.15 のような電位 ϕ_1 、電荷 Q_1 の帯電導体を電位 ϕ_2 の帯電導体ですっぽり覆ってしまった系を考えよう。

この系には3つの電荷がある。

中側の導体の電荷 Q_1 、外側の導体の内側の面上の電荷 $Q_2^{(i)}$ 、その導体の外側の面上の電荷 $Q_2^{(e)}$ の3種類である。

外側の導体の中に閉曲面 S (このファイルでは見えにくいですが断面を破線で示してある) を考

¹誘電率 ϵ の誘電体が極板間に挿入されているときの電気容量の公式は

$$C = \frac{\epsilon A}{s} \quad (18)$$

となることを証明ぬきで書いておこう。

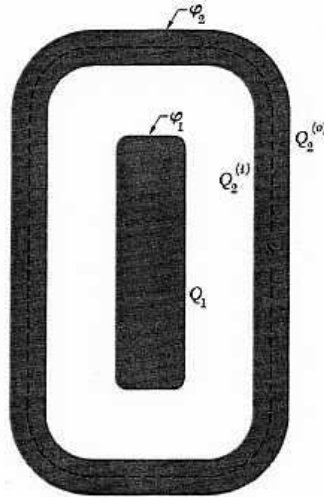


FIGURE 3.15
A capacitor in which one conductor is enclosed by the other.

えて Gauss の法則を適用すると S 内の電荷は $Q_2^{(i)} + Q_1$ であり、 S 上の電場はゼロだから $Q_2^{(i)} = -Q_1$ となっていることがわかる。したがって導体間の電場は Q_1 だけで決まっているので導体間の電位差 $\phi_1 - \phi_2$ は Q_1 で定められる。これをコンデンサーと考えたときの電気容量 C は

$$C = \frac{Q_1}{\phi_1 - \phi_2} \quad (3.17)$$

であり、 $Q_2^{(e)}$ は ϕ_2 をきめてはいるが、 C には関係ない。

ある導体を別の導体で完全におおってしまうと電気容量はその外側にあるものには全く関係なくきまってしまう。

3.6 Potentials and Charges on Several Conductors (複数個の導体系の電荷と電位)

3 個の導体が大きな導体にかこまれている FIGURE 3.16 のような系を考える。

大きな導体の電位を基準とする。導体 1 の電位を ϕ_1 、電荷を Q_1 、導体 2 の電位を ϕ_2 、電荷を Q_2 、導体 3 の電位を ϕ_3 、電荷を Q_3 とする。大きな導体の電荷は $-(Q_1 + Q_2 + Q_3)$ である。

(a) 図のように、導体 2 と 3 を接地し電位をゼロとする。このとき、電場と各導体の電荷は ϕ_1 で決まっていて、比例するはずだから以下のように置く。

State I: $\phi_2 = \phi_3 = 0$

$$Q_1 = c_{11}\phi_1 \quad ; \quad Q_2 = c_{21}\phi_1 \quad ; \quad Q_3 = c_{31}\phi_1 \quad (3.18)$$

同様に (b) 図の導体 3 と 1 を接地し電位をゼロとする。このとき、電場と各導体の電荷は ϕ_2 で決まっていて、比例するはずだから以下のように置く。

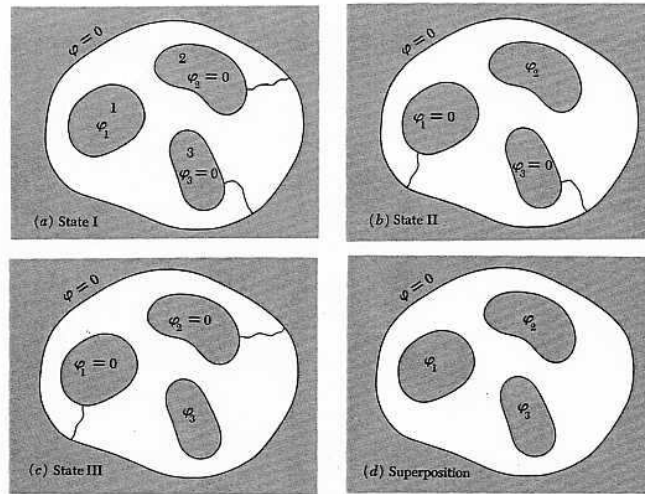


FIGURE 3.16

State II: $\phi_3 = \phi_1 = 0$

$$Q_1 = c_{12}\phi_2 \quad ; \quad Q_2 = c_{22}\phi_2 \quad ; \quad Q_3 = c_{32}\phi_2 \quad (3.19)$$

そして導体 1 と 2 を接地し電位をゼロとする。このとき、電場と各導体の電荷は ϕ_3 で決まっています、比例するはずだから以下のように置く。

State I: $\phi_1 = \phi_2 = 0$

$$Q_1 = c_{13}\phi_3 \quad ; \quad Q_2 = c_{23}\phi_3 \quad ; \quad Q_3 = c_{33}\phi_3 \quad (3.20)$$

図 (d) の一般の状態は I、II、III の重ね合わせで得られるので

$$\begin{aligned} Q_1 &= c_{11}\phi_1 + c_{12}\phi_2 + c_{13}\phi_3 \\ Q_2 &= c_{21}\phi_1 + c_{22}\phi_2 + c_{23}\phi_3 \\ Q_3 &= c_{31}\phi_1 + c_{32}\phi_2 + c_{33}\phi_3 \end{aligned} \quad (3.21)$$

となる。

ただし、相反定理と呼ばれる定理により $c_{12} = c_{21}$ 、 $c_{13} = c_{31}$ 、 $c_{23} = c_{32}$ が成立することがわかっている。

係数 c_{ij} を容量係数という。N 個の導体系への拡張は直截的である。

上式を逆に解いて、各導体上の電位を電荷であらわすこともできる。

$$\begin{aligned} \phi_1 &= p_{11}Q_1 + p_{12}Q_2 + p_{13}Q_3 \\ \phi_2 &= p_{21}Q_1 + p_{22}Q_2 + p_{23}Q_3 \\ \phi_3 &= p_{31}Q_1 + p_{32}Q_2 + p_{33}Q_3 \end{aligned} \quad (3.22)$$

係数 p_{ij} を電位係数という。やはり相反定理 $p_{ij} = p_{ji}$ がなりたつこともわかっている。

3.7 Energy Stored in a Capacitor (コンデンサーに貯えられるエネルギー)

電気容量 C のコンデンサーがあり、極板間の電位差は ϕ_{12} に保たれている。

陽極の電荷が $Q = C\phi_{12}$ で、陰極の電荷は $-Q = -C\phi_{12}$ である。

ここで、電位差 ϕ_{12} を保ったまま、陰極から電荷を dQ だけ陽極に移すのに要する微小仕事は

$$dW = \phi_{12}dQ = \frac{QdQ}{C} \quad (19)$$

である。

初め帯電していないコンデンサーの電氣量を Q_f まで増やすのに必要な仕事は

$$W = \frac{1}{C} \int_0^{Q_f} QdQ = \frac{Q_f^2}{2C} \quad (3.23)$$

である。

最終的に、このコンデンサーには

$$U = \frac{1}{2}C\phi_{12}^2 \quad (3.24)$$

なるエネルギーが貯えられているといえる。

極板面積 A 、極板間距離 s の平行平板コンデンサーの容量は

$$C = \frac{\epsilon_0 A}{s} \quad (20)$$

であった。

極板間の電場の大きさは

$$E = \frac{\phi_{12}}{s} \quad (21)$$

だから、貯えられているエネルギーを書き直すと

$$U = \frac{1}{2} \left(\frac{\epsilon_0 A}{s} \right) (Es)^2 = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} \cdot As = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} [\text{極板間の体積}] \quad (22)$$

となる。これは電場中に貯えられるエネルギー密度が $\epsilon_0 E^2/2$ と一致している。

孤立導体を帯電させたときも、無限遠に電位ゼロの導体を取り囲んだものと考えると同様にエネルギーを考えることができる。

半径 a の孤立導体球では

$$C = 4\pi\epsilon_0 a \quad (23)$$

であった。電位が ϕ 、電荷が Q であれば貯えられるエネルギーは

$$U = \frac{1}{2} 4\pi\epsilon_0 a \phi^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 a} \quad (3.25)$$

である。

コンデンサーの陽極と陰極の間には静電気力が引力として働くので、互いに引き寄せられる。よって極板間距離を一定に保つためには引力に逆らう機械的な外力 F が必要になる。電荷 Q を一定に保ちながら一方の極板を固定し、 F により他方を極板間距離を x から $x + \Delta x$ に増したとき F のなす仕事は $F\Delta x$ である。

エネルギー保存則が成立していれば、この外力 F のする仕事によりコンデンサーに貯えられているエネルギー $U = Q^2/2C$ が増大する。 Q 一定の条件の下でのエネルギーの増分 ΔU は

$$\Delta U = \frac{dU}{dx} \Delta x = \frac{Q^2}{2} \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{C} \right) \Delta x \quad (3.26)$$

であり、これが外力の仕事に等しいから

$$F = \frac{Q^2}{2} \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{C} \right) \quad (3.27)$$

で必要な F が定まる。

補遺

コンデンサーは2つの導体1と2からなる系であるから、電位係数を用いてそれぞれの導体の電位により電荷が表される。

$$\begin{aligned} Q_1 &= c_{11}\phi_1 + c_{12}\phi_2 \\ Q_2 &= c_{21}\phi_1 + c_{22}\phi_2 \end{aligned} \quad (24)$$

各 c_{ij} は導体の幾何学的形状で決まる係数であるので、電位の変化で電荷の変化が書ける。

$$\begin{aligned} dQ_1 &= c_{11}d\phi_1 + c_{12}d\phi_2 \\ dQ_2 &= c_{21}d\phi_1 + c_{22}d\phi_2 \end{aligned} \quad (25)$$

電荷素片 dQ をポテンシャルがゼロの位置からポテンシャル ϕ の導体に運ぶためには ϕdQ のエネルギーを外から与えなければならない。

2つの導体が帯電されてそれぞれ ϕ_{1f} と ϕ_{2f} (f は final の意) の (最終) 電位とする。

どちらの導体も電荷がゼロ、電位もゼロである状態から出発して最終的にこの状態に到達するような2つのやり方をとりあげ、必要な仕事 W を計算しよう。

(a) ϕ_2 はゼロにしたまま ϕ_1 をゼロから徐々に ϕ_{1f} にまであげる。その後 ϕ_1 を ϕ_{1f} に保ったまま ϕ_2 をゼロから ϕ_{2f} にまであげる。

(b) 1と2の役割を入れ替え、まず ϕ_2 をゼロから ϕ_{2f} にまであげてから ϕ_1 をゼロから ϕ_{1f} にまであげる。

(a) の過程では

$$\begin{aligned} W &= \int_{0; \phi_2=0}^{\phi_{1f}} c_{11}\phi_1 d\phi_1 + \int_{0; \phi_1=\phi_{1f}}^{\phi_{2f}} [c_{12}\phi_{1f} d\phi_2 + c_{22}\phi_2 d\phi_2] \\ &= \frac{1}{2} c_{11} \phi_{1f}^2 + \frac{1}{2} c_{22} \phi_{2f}^2 + c_{12} \phi_{1f} \phi_{2f} \end{aligned} \quad (26)$$

(b) の過程では

$$\begin{aligned} W &= \int_{0; \phi_1=0}^{\phi_{2f}} c_{22} \phi_2 d\phi_2 + \int_{0; \phi_2=\phi_{2f}}^{\phi_{1f}} [c_{11} \phi_1 d\phi_1 + c_{21} \phi_{2f} d\phi_1] \\ &= \frac{1}{2} c_{22} \phi_{2f}^2 + \frac{1}{2} c_{11} \phi_{1f}^2 + c_{21} \phi_{2f} \phi_{1f} \end{aligned} \quad (27)$$

この2つの W を比べると、相反定理 $c_{12} = c_{21}$ を得る。

この考察より、コンデンサーのエネルギー U を

$$U = \frac{1}{2} c_{11} \phi_{1f}^2 + \frac{1}{2} c_{22} \phi_{2f}^2 + c_{12} \phi_{1f} \phi_{2f} \quad (28)$$

と書いても良いことがわかる。

一般に N 個の導体の系で i 番目の導体の電位を ϕ_i とすると、容量係数 c_{ij} を用いて

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N c_{ij} \phi_i \phi_j \quad (29)$$

と表すことができる。