

## 第1章 Electrostatics: Charges And Fields (静電場:電荷および場)

### 1-1. Electric Charge(電荷)

m, kg, s を基本とする MKS 単位系に電流の基本単位 A を加えた国際単位系 (SI 系、電気量の単位である C は A·s である) を我が国が採用している。1m は 1 秒間に真空中を光が進む距離の  $1/299792458$  の長さとして定められている。よって基本的物理定数の一つである真空中の光速  $c$  の値は国際単位系では測定値ではなく  $c = 299\,792\,458$  [m/s] と定義されていることになる。

量子力学に現われるプランク定数  $h$  も角運動量の次元を持つ大事な基本定数である。 $\hbar = h/2\pi$  は量子ホール効果の測定により  $1.054\,571\,68(\pm 18) \times 10^{-34}$  [J s] =  $6.582\,119\,15(\pm 36) \times 10^{-22}$  [MeV s] である。

これから勉強する電磁気的基本的定数である電気素量の最新の値は  $e = 1.602\,176\,53(\pm 14) \times 10^{-19}$  [C] である。

物質は quarks(クォーク) と leptons(レプトン) からできているが quarks と leptons の電荷と質量を表にまとめる。

表 1.1 帯電レプトン

粒子の名前	electron(電子, $e^-$ )	muon(ミュー粒子, $\mu^-$ )	tau(タウ粒子, $\tau^-$ )
電荷/電気素量	-1	-1	-1
質量 (Mev/ $c^2$ )	0.51	105.9	1776.9

表 1.2 ニュートリノ series

粒子の名前	$\nu_e$	$\nu_\mu$	$\nu_\tau$
電荷/電気素量	0	0	0
質量	ほぼ 0	ほぼ 0	ほぼ 0

表 1.3 u-quark series

粒子の名前	u	c	t
電荷/電気素量	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$
質量	1.5 から 4 [Mev/ $c^2$ ]	1.15 から 1.35 [Gev/ $c^2$ ]	$174.3 \pm 5.1$ [Gev/ $c^2$ ]

表 1.4 d-quark series

粒子の名前	d	s	b
電荷/電気素量	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$
質量	4 から 8 [Mev/ $c^2$ ]	80 から 130 [Mev/ $c^2$ ]	4.1 から 4.4 [Gev/ $c^2$ ]

粒子には反粒子が伴う。反粒子の電荷は粒子と大きさ等しく反対符号である。質量は相等的しい。electron(電子) の反粒子は positron(陽電子) とよばれ記号では  $e^+$  と書かれ、 $\mu^-$  の反粒子は  $\mu^+$ 、 $\tau^-$  は  $\tau^+$  と書かれる。我々の身の回りでも positron が病院で PET (Positron Emission Tomography) として画像診断に使われている。電子と陽電子はであうと消滅し、光子を発生するので、光子を撮影して人体中の陽電子の様子を画像化して診断し癌などの

病気を発見するのに役立っている。

陽子  $p$  は  $uud$  の結合粒子、中性子  $n$  は  $udd$  の結合粒子であって、湯川の核力により  $p$  と  $n$  が複数個結合し原子核が作られている。そのまわりを  $p$  の個数と同じ数の電子が回りクーロン力によって中性原子を形成している。そして原子がいくつか集まって分子を作っている。我々の身の回りの世界は  $u$ -quark series の中で最も軽い  $u$  と  $d$ -quark series の中で最も軽い  $d$ 、そして最も軽い帯電レプトンである  $e^-$  により作られている。もちろん、これらの粒子には反粒子が必ず対応しているので反陽子、反中性子も存在し、陽電子といっしょになって反原子を作ることがわかっている。これらのいわば反物質による反世界の構成粒子は普通の世界の構成粒子とであうと光子等を発生し消滅してしまう。PETはこの消滅作用を利用しているのである。

核力、電気力ともに電荷の和を変化させることはない。これは表 1.1-1.4 の電荷の値から陽子、中性子の電荷の値が正しく再現することからも想像できる。また  $\beta$  崩壊のような核種が変換する際には弱い相互作用が働くが、この相互作用でも変換の前後で電荷の和は一定に保たれる。中性子は単独に存在していると 885.7[s] の平均寿命で陽子、電子、反電子ニュートリノに崩壊してしまう。しかし反応の前後の電荷はゼロである。一方、質量の和は反応の前後で保存されない。電荷の保存則は電磁気の基本法則である。この法則は古典電磁気であろうと量子電磁気であろうと成立している。

また、表 1.1 から 1.4 をみると、帯電レプトンはいずれも電気素量の -1 倍、その反粒子は +1 倍になっている。また quark は単独では存在せず、必ず 3 個の結合粒子状態、あるいは quark と反 quark の結合状態でしか存在しない。つまり物質の基本電気量は必ず電気素量の整数倍になっていて、これを電荷の量子化とよんでいる。

電荷の保存と量子化は電磁気学の基本原理である。しかし、古典電磁気学は 19 世紀に完成され Planck の量子仮説の提唱以前に作られていたので、もちろん素粒子の存在は知られていなかった時代の産物である。古典電磁気学では物質は無限に細分化できるものとして仮定されている。これから勉強する古典電磁気では電荷の保存則だけに立脚し、電荷の量子化を無視して議論を展開する。原子からみれば荷電粒子が莫大な数存在する我々の身の回りの巨視的物体ではこういう無視も正当化できる。

金属を流れる電流は動いている伝導電子の集団運動であり、電流の大きさはその平均速度に比例する。だからその速度と共に動いている観測者は伝導電子の平均速度はゼロであるとみて、電流は存在しないから磁場は作られず電場しか存在しないと判断するだろう。しかし、静止している別の観測者は磁場が作られていると記述するはずである。両者の記述のどちらが正しいのだろう。どちらも正しいという答は 1905 年 A. Einstein によって確立した特殊相対論 (特殊相対性理論) ではじめて得られた。因に 2005 年は彼の 3 大論文 (特殊相対論、ブラウン運動、光量子仮説と光電効果) が出版されてから 100 年目であることを記念して国連により世界物理年と定められた。

まずこの講義では最初に特殊相対論の必要事項を概観することから始めよう。

電磁気では色々な単位系が用いられるが、本講義では国際単位系を用いる。

この講義でカバーするのは真空中に電荷、電流が存在することにより生成される電磁場と電荷、電流の相互作用を記述する Maxwell の方程式 (積分形、微分形) および真空中を伝

搬する電磁波までに限定する。誘電体、磁性体はコメント程度にしか時間の関係で触れられない。

ここで、この講義の最終目標であるマクスウェルの方程式を書いてみよう。積分形は面積分および線積分で書かれている。

電荷密度を  $\rho$ 、電流密度を  $\mathbf{J}$  と書き、電束密度  $\mathbf{D}$  は電場  $\mathbf{E}$  と分極  $\mathbf{P}$  を用いて  $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} = \epsilon \mathbf{E}$ 、磁場  $\mathbf{H}$  は磁束密度  $\mathbf{B}$  および磁化  $\mathbf{M}$  を用いて  $\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu_0 - \mathbf{M} = \mathbf{B}/\mu$  で定義される。ここで  $\epsilon_0$  は真空の誘電率、 $\epsilon$  は誘電体の誘電率であり、 $\mu_0$  は真空の透磁率、 $\mu$  は磁性体の透磁率である。これらの定義は教科書によって採用する単位系が異なるので係数が違って来ることに注意すること。

$$\begin{aligned} \oint_{S=\partial V} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{a} &= \int_V \rho dv & \oint_{S=\partial V} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} &= 0 \\ \oint_{C=\partial S} \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell} &= -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} & \oint_{C=\partial S} \mathbf{H} \cdot d\boldsymbol{\ell} &= \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a} + \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{a} \end{aligned}$$

微分形で書き下すと

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{D} &= \rho & \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0 \\ \operatorname{curl} \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} & \operatorname{curl} \mathbf{H} &= \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \end{aligned}$$

携帯電話のラヂオ波の放出、伝搬、受信は Maxwell 方程式によりコントロールされている。このようにこの方程式は我々の生活に多いに役立っている。しかしそれにとどまらずもっと巨大なスケールの世界でも、例えば我々の銀河中にある残留磁場により荷電粒子が銀河内を飛来するとき軌道が曲げられることや、そして宇宙のはてにみついている活動銀河核の解析を Maxwell 方程式に基づいて行われているからみてもなりたっていることがわかるのである。またさらに残留磁場の大きさは銀河内の分子のスペクトルを解析するとわかるというように極微の世界でもこの Maxwell 方程式に基づく電磁気学は成立しているのである。このように Maxwell の方程式はミクロからマクロのスケールにわたって成立している物理法則である。

#### 1-4. Coulomb(クーロン)の法則

1786年、Coulombは  $\mathbf{r}_1$ にある  $q_1[\text{C}]$ の電荷と  $\mathbf{r}_2$ にある  $q_2[\text{C}]$ の間には、距離の2乗に反比例し、2つの電荷の積に比例する力が働くことをねじればかりを用いて発見した。力の方向は2つの電荷を結ぶ方向と2つの電荷かが同符号なら平行、異符号なら反平行である。

真空中で  $q_1$ に  $q_2$ がおよぼす力  $\mathbf{F}_1$ は

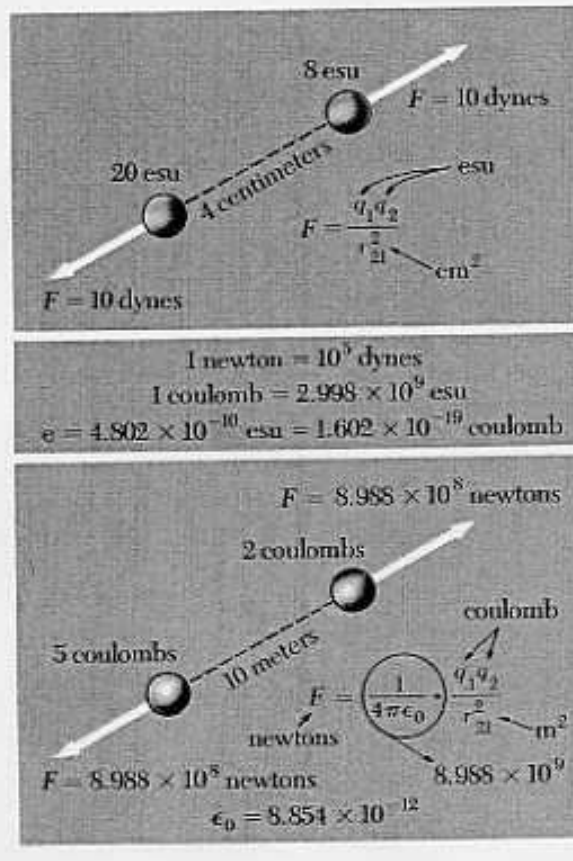
$$\mathbf{F}_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \mathbf{r}_{12} \hat{\mathbf{r}}_{12} \quad (1.1)$$

と書ける<sup>1</sup>。この表式は国際単位系を採用したときの表式であり、単位系が異れば比例係

<sup>1</sup>式番号で (i,j) と書いてあるのは、original textbook の第 i 章の j 番の式を意味し、単に (k) とあるのはこの抄訳を作成したときに講義の都合上つけた式番号で原著に対応しない式番号である。

**FIGURE 1.2**

Coulomb's law expressed in CGS electrostatic units (top) and in SI units (bottom). The constant  $\epsilon_0$  and the factor relating coulombs to esu are connected, as we shall learn later, with the speed of light. We have rounded off the constants in the figure to four-digit accuracy. The precise values are given in Appendix E.



数も異なる。

ここで、 $\mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ 、 $r_{12} = |\mathbf{r}_{12}| = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$ 、 $\hat{\mathbf{r}}_{12} = \mathbf{r}_{12}/r_{12}$  であるとする。

真空の誘電率  $\epsilon_0$  は真空の透磁率を  $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} [\Omega \text{ s/m}]$  により光速  $c$  を用いて  $\epsilon_0 = 1/\mu_0 c^2 = 8.8542 \times 10^{-12} [\text{s}/\Omega\text{m}]$  とあたえられる係数である。1m離れた2つの1[C]の電荷(このように大きな電荷を想定するのは殆んど無意味だが)の間には  $8.988 \times 10^8 [\text{N}]$  の力が働くことになる。

### Principle of Superposition (重ね合わせの原理)

3個の電荷  $q_1, q_2, q_3$  がそれぞれ  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3$  にあるとき、例えば  $q_3$  に働く Coulomb 力  $\mathbf{F}_3$  は、 $q_2$  の存在を考えない  $q_1$  による力と  $q_1$  の存在を考えない  $q_2$  による力の合力であたえられる。これを重ね合わせの原理 (principle of superposition) という。

ここで  $\mathbf{r}_{31} = \mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_{32} = \mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2$  であるとして

$$\mathbf{F}_3 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_3 q_1}{r_{31}^2} \hat{\mathbf{r}}_{31} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_3 q_2}{r_{32}^2} \hat{\mathbf{r}}_{32} \quad (1.2)$$

$N$  個の点電荷  $q_1, q_2, \dots, q_N$  が各々  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N$  にある系で  $q_i$  に働く Coulomb 力  $\mathbf{F}_i$  は  $\mathbf{r}_{ik} = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k$  として

$$\mathbf{F}_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{k=1, k \neq i}^N \frac{q_i q_k}{r_{ik}^2} \hat{\mathbf{r}}_{ik} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{k=1}^N {}' \frac{q_i q_k}{r_{ik}^2} \hat{\mathbf{r}}_{ik} \quad (1)$$

であたえられる。ここで  $i$  番目の点電荷に注目したときのダッシュ付きのシグマ記号を

$$\sum_{k=1}^N {}' = \sum_{k=1, k \neq i}^N$$

と変数  $k$  に関しては  $i$  以外の値しかとらないという和であるという約束をしよう。このダッシュ付きシグマ記号はこれ以降でも用いる。

$N$  個の点電荷の系でも独立に取りだした任意の2個の点電荷同士の Coulomb 力は他の電荷の存在に関係なく (1.1) の力で表され、さらにその力の単純なベクトル和として系内の電荷による電気力が (??) のようにあたえられることは重ね合わせの原理によるものである。この原理の成否は実験的に判定されなければならないが、これまでのところこの原理による結果に反する実験結果はない。

### 1-5. Energy of a System of Charges (点電荷の系が持つ静電エネルギー)

点電荷  $q_1$  が  $\mathbf{r}_1$  に静止して作っている電場内でもう一つの点電荷  $q_2$  を無限遠から  $\mathbf{r}_2$  の位置まで Coulomb 力に抗して配置するのに要する仕事  $W$  は Coulomb 力が保存力であるか

ら  $q_2$  の通る道筋によらず始点 ( $\infty$ ) と終点 ( $\mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ ) で決まり、

$$W = \int_{\infty}^{\mathbf{r}_{12}} \left(-\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\right) \frac{q_1 q_2}{r^3} \mathbf{r} \cdot d\mathbf{s} = \left(-\frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0}\right) \int_{\infty}^{\mathbf{r}_{12}} \frac{dr}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}} \quad (1.3)$$

と計算できる。2つの点電荷  $q_1$  と  $q_2$  が相対距離  $r_{12}$  で配置されている系の静電ポテンシャルエネルギー  $U$  は

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}} \quad (2)$$

であることがわかる。

一般に  $N$  個の点電荷  $q_1, \dots, q_N$  の系で、任意の2組の電荷  $q_j$  と  $q_k$  の距離が  $r_{jk}$  なる配置となっている場合の静電ポテンシャルエネルギー  $U$  は重ね合わせの原理により

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{j=2}^N \sum_{k=1}^{j-1} \frac{q_j q_k}{r_{jk}} = \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \frac{q_j q_k}{r_{jk}} \quad (1.9)$$

#### 1-6. Electrical Energy in a Crystal Lattice (結晶格子の電気エネルギー)

例として、NaClの結晶の静電エネルギーを計算してみよう。食塩の結晶は次図(FIGURE 1.7)のようにイオン結合により  $\text{Na}^+$  イオンと  $\text{Cl}^-$  イオンが交互に間隔  $a = 0.252[\text{nm}]$  で配置され面心立方格子の結晶を作っている。

静電エネルギーは表面のイオンに関するエネルギーと結晶内部のイオンのもつエネルギーの寄与できまる。しかし現実の食塩の結晶は莫大な個数のイオンからできていて、前者と後者の数を比較すると圧倒的に後者の方が多くなる。そこでまず複雑な表面の効果を無視して、近似的に無限に大きな結晶であると考えよう。そして1イオンあたりの静電ポテンシャルエネルギーを評価してみる。

$\text{Na}^+$  と  $\text{Cl}^-$  をあわせて  $N$  個ある部分を取りだして考えると (1.9) 式より、その部分の静電ポテンシャルエネルギーは

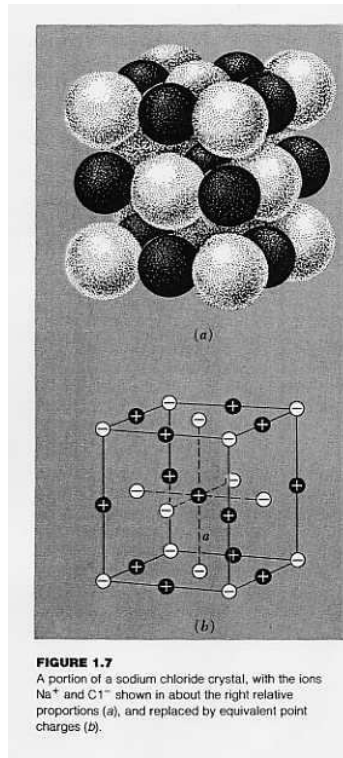
$$U = \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \frac{q_j q_k}{r_{jk}} = \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} N \sum_{k=2}^N \frac{q_1 q_k}{r_{1k}} \quad (1.10)$$

である。2番目の右辺は特定のイオンに注目し、それを1番目とした表式である。

$N \rightarrow \infty$  を考えれば求める1イオンあたりのエネルギーが求まるはずである。しかし  $U/N$  は一様収束ではなく条件収束である。

和の取り方を最近接イオンによるエネルギー(これは当然負になる)、2番目に近いイオンによるエネルギー(これは正)、3番目に近いイオンによるエネルギー(これは負)というように足し方を限定すると

$$\frac{U}{N} \rightarrow \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \left( -\frac{6e^2}{a} + \frac{12e^2}{\sqrt{2}a} - \frac{8e^2}{\sqrt{3}a} + \dots \right) \quad (3)$$



という表式が得られる。この右辺は Madelung 数  $M_3$  を用いて有限の値として得られる。

$$M_3 = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^{i+j+k}}{\sqrt{i^2 + j^2 + k^2}} \approx -1.74756 \quad (4)$$

求める食塩結晶の 1 イオンあたりの静電エネルギーは

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{U}{N} \approx -4.469[\text{eV}] \quad (5)$$

と計算できたことになる。

負の値が得られたので NaCl は結晶として凝集していることがわかるが、もちろんこれは点電荷としてイオンの大きさを無視した古典静電気力による近似値である。結晶格子間隔  $a$  の値は予言できないというような限界のある計算だから本質的な理解ではないが、まずはこんなものであるという静電ポテンシャルエネルギーの一例である。

## 1.7 The Electric Field (電場)

$q_1, \dots, q_N$  がそれぞれ位置  $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N$  にある点電荷の系に  $q_0$  なる試験点電荷を持ちこ

んだとき、 $q_0$ に働く力 $\mathbf{F}_0$ は $q_j$ からみて試験点電荷が $\mathbf{r}_{0j} = \mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_j$ の相対位置にあるとき

$$\mathbf{F}_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{j=1}^N \frac{q_0 q_j}{r_{0j}^2} \hat{\mathbf{r}}_{0j} \quad (1.13)$$

である。

これを用いて試験電荷の位置 $\mathbf{r}_0$ における電場 $\mathbf{E}(\mathbf{r}_0)$ を次のように定義する。

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}_0) = \frac{\mathbf{F}_0}{q_0} \quad (6)$$

$q_1, \dots, q_N$ を電場の sources(源)という。電場の単位は  $[\text{N/C}] = [\text{V/m}]$  である。

具体的に書くと、

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}_0) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{j=1}^N \frac{q_j}{r_{0j}^2} \hat{\mathbf{r}}_{0j} \quad (1.14)$$

である。

電場内に任意の点での接線がそこでの電場の方向を向く電気力線とよばれる曲線を引くことができる。電気力線の密度が電場の強さに比例するとする。電気力線は正電荷から出て負電荷に入る。正電荷を沸き出し口、負電荷を吸い込み口と流体力学の流線と電気力線のアナロジーでよぶことがある。

### 1.8 Charge Disitribution (連続荷電分布の作る電場)

空間内の微小な領域を考える。その領域に含まれる電荷をその領域の体積で割って体積をゼロの極限にして得られる量を電荷密度という。

FIGURE 1.12 のように電荷が分布している拡がった領域  $V$  の空間内の 1 点  $\mathbf{r}' = (x', y', z')$  に 3 辺が  $dx', dy', dz'$  の小さな直方体を考える。

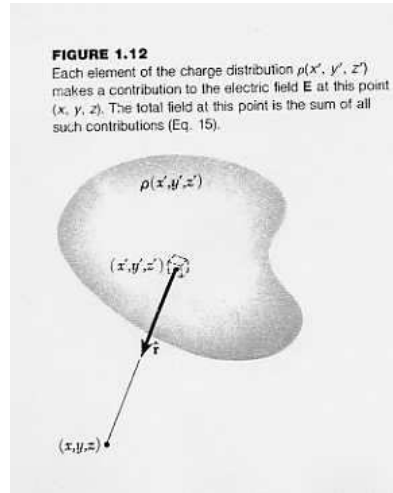
定義より電荷密度  $\rho(\mathbf{r}') = \rho(x', y', z')$  により  $\rho \cdot dx' dy' dz'$  はこの微小直方体に含まれる電荷が定まる。この微小領域に集中する電気量は数学的に微小であるので電気素量の整数倍に限らない。したがって電荷の量子化は考慮されていない。

この微小電荷を点電荷  $dq(\mathbf{r}') = \rho(\mathbf{r}') dx' dy' dz'$  として考えることにより、点  $\mathbf{r}$  での電場  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  が (1.14) の  $q_j$  を  $dq(\mathbf{r}')$  と置き換え、可付番符合  $j$  に関する和を連続積分に変えれば次のようにあたえられることがわかる。

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dx' dy' dz' \quad (1.15)$$

電荷分布領域は 3 次元であっても 2 次元であっても 1 次元であっても良い。





3次元分布のとき  $dv' = dx'dy'dz'$  と書く。電荷密度  $\rho$  は電荷体積密度であり、(1.15) の右辺の積分は3重積分である。こう考えると2次元分布のときは電荷面密度を  $\sigma$  と書き、微小面積を  $da'$  と表せば

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \int_S \frac{\sigma(\mathbf{r}')(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} da' \quad (7)$$

なる面積分で、1次元分布の場合は電荷線密度を  $\lambda$  と書き、微小線素を  $d\ell'$  と書くことにすれば

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_L \frac{\lambda(\mathbf{r}')(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d\ell' \quad (8)$$

なる線積分であたえられる。

## 1.9 Flux (電束)

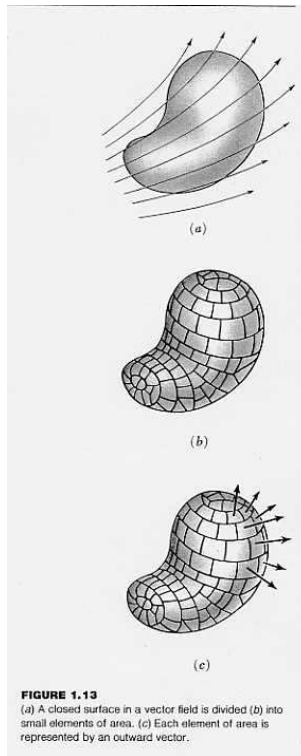
FIGURE 1.13a のように電場内の閉曲面を考える。この閉曲面は仮想的に考えた曲面、あるいは実体的な曲面であってもよい。これを 1.13b のように微小な面積素片 (真直な微小な長方形) の集まりで覆われているものと近似する。

1枚1枚の面積素片に番号をつけよう。 $j$  番目の面積素片の微小な面積を  $a_j$  とする。そして  $j$  番目の面積素片上に閉領域の内から外へ向く大きさ  $a_j$  のベクトル  $\mathbf{a}_j$  を想定する。この素片は十分小さいので、その素片上では電場はどこでも同じであるとしてよい。これを  $\mathbf{E}_j$  と書く。

定義から内積  $\mathbf{E}_j \cdot \mathbf{a}_j$  はこの素片を内から外へ通り抜ける電気力線の数に比例する。この通り抜ける電気力線の束を電束と名付ける。

比例定数を  $\epsilon_0$  と選べば、この  $j$  番目の面積素片を通り抜ける電束  $\Phi_j$  は

$$\Phi_j = \epsilon_0 \mathbf{E}_j \cdot \mathbf{a}_j \quad (9)$$



となる。

FIGURE 1.13c のように全部の面積素片上での電束の和をとると全電束  $\Phi$  の近似値が求まる。

$$\Phi \approx \sum_j \epsilon_0 \mathbf{E}_j \cdot \mathbf{a}_j \quad (1.16)$$

微小面積素片を無限に小さくして、無限個の素片で滑らかな閉曲面を覆うものとするると全電束  $\Phi$  が求められる。

$$\Phi = \oint_{\text{全表面}} \epsilon_0 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} \quad (1.17)$$

である。ここで積分は面積分、つまり2重積分であり、特に閉曲面上の積分であることを強調するために  $\oint$  記号を使ったが、大袈裟だと思ふ人は普通の  $\int$  で表してもよい。

デカルト座標で微小面積要素ベクトルを書くと

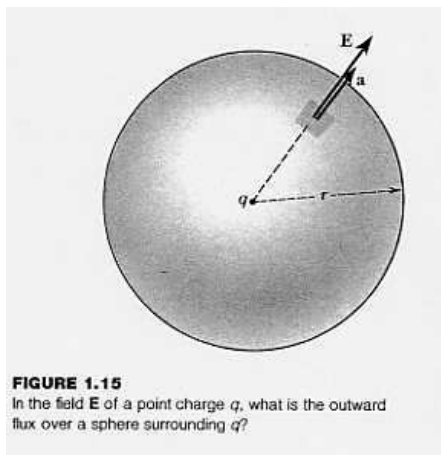
$$d\mathbf{a} = (dydz, dzdx, dxdy) \quad (10)$$

である。

上述の定義での電束の単位は電荷の単位 [C] である。

## 1.10 Gauss's Law (ガウスの法則)

簡単な例として、FIGURE 1.15に示した中心に正の点電荷  $q$  が存在する半径  $r$  の球面を考える。



**FIGURE 1.15**  
In the field  $\mathbf{E}$  of a point charge  $q$ , what is the outward flux over a sphere surrounding  $q$ ?

この球面上での電場の大きさ  $E$  は

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \quad (11)$$

で、電場の向きは外向き単位法線ベクトル  $\mathbf{n}$  と同じ向きである (負の点電荷が中心にあるときは  $\mathbf{n}$  と逆向きである)。

よって (1.17) であたえられる  $\Phi$  は  $\oint_{\text{球面}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} =$  球の表面積に注意すると

$$\Phi = \oint_{\text{球面}} \epsilon_0 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \frac{q}{4\pi r^2} \oint_{\text{球面}} da = \frac{q}{4\pi r^2} 4\pi r^2 = q \quad (1.18)$$

となる。

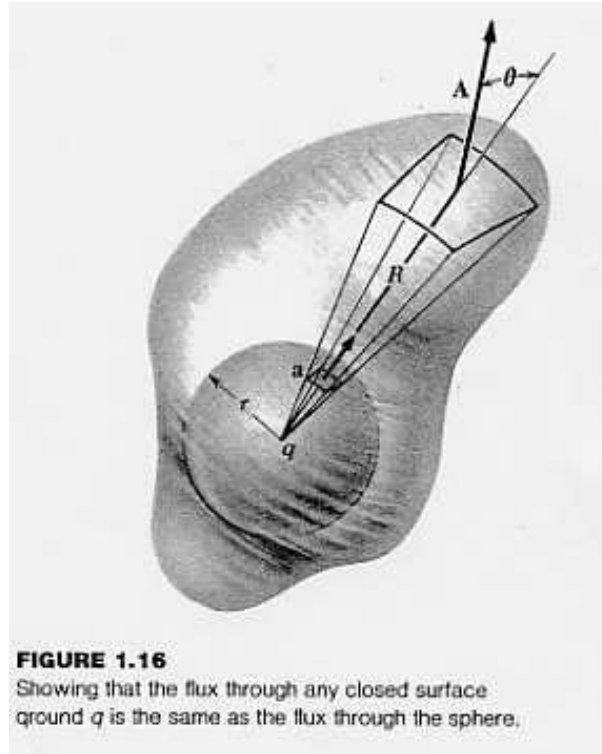
この結果が球の半径には無関係であるのは Coulomb 力が距離の 2 乗に反比例し、球面の表面積が中心からの距離の 2 乗に比例することで半径が打ち消しあったためである。もし力が距離の 2 乗に反比例しなければ結果は球の半径に依存することになる。

この球面を含む閉曲面上で外に出てくる全電束を求めてもやはり  $\Phi = q$  となることがわかる。

FIGURE 1.16 を見よう。

錐体の頂点を中心とする半径 1 の球面を描いたとき、錐体が球面上を切り取る面積を立体角という。これは扇形の頂点を中心とする半径 1 の円を描いたとき、扇形が円を切り取る弧長でラディアン (rad) を単位とする角度が定義されたのと同様の定義である。因に立体角の単位はステラディアン (str) である。全立体角が  $4\pi$  [str] であるのは自明であろう。

FIGURE 1.16 に描かれた頂点での微小立体角  $d\Omega$  の錐体が半径  $r$  の球面上に切り取る微小面積  $a$  は  $a = r^2 d\Omega$  である。この錐体が半径  $R$  の球面を切り取る面積は当然  $R^2 d\Omega$  であ



**FIGURE 1.16**  
Showing that the flux through any closed surface  
around  $q$  is the same as the flux through the sphere.

る。図中の球面を中に含む閉曲面を切り取る微小面積  $A$  (本当は  $dA$  と書くべき) は球面の単位法線と閉曲面の単位法線のなす角を  $\theta$  とすると  $A \cos \theta = R^2 d\Omega$  となる。閉曲面上での電場を  $\mathbf{E}_{(R)}$  と図中の距離  $R$  で象徴的に表すと

$$\begin{aligned}
 \Phi &= \oint_{\text{閉曲面}} \epsilon_0 \mathbf{E}_{(R)} \cdot d\mathbf{A} \\
 &= \oint_{\text{閉曲面}} \epsilon_0 E_{(R)} dA \cos \theta \\
 &= \oint_{\text{半径 } R \text{ の球面}} \frac{q}{4\pi R^2} R^2 d\Omega \\
 &= q
 \end{aligned} \tag{12}$$

となるので、どんな閉曲面であっても中に電荷  $q$  を含んでいれば、閉曲面を内から外へ貫いて出る電束の総和は  $q$  に等しいことが示された。

電荷が内部に含まれていなければ  $\Phi = 0$  となるのも想像がつくだろう。実際閉曲面の外側に  $q$  なる電荷があっても閉曲面の内から外へ貫いて出てくる電気力線の総数はゼロとなるのは容易に示せる。

$q_1, \dots, q_N$  なる sources がある場合も重ね合わせの原理によりそれぞれの作る電場を  $\mathbf{E}_1, \dots, \mathbf{E}_N$

と書くと全電場  $\mathbf{E}$  は重ね合わせにより

$$\mathbf{E} = \sum_{i=1}^N \mathbf{E}_i \quad (13)$$

だから、内部に  $q_1, \dots, q_N$  を含む閉曲面  $S$  を考えると  $S$  を通って出てくる全電束  $\Phi$  について

$$\Phi = \oint_S \epsilon_0 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \sum_{i=1}^N \oint_S \epsilon_0 \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{a} = \sum_{i=1}^N q_i \quad (1.20)$$

が成立する。

まとめると

任意の閉曲面  $S$  の内から外に通る電束の総和は、 $S$  が内部に包みこんだ電荷の総和に等しい。

$$\begin{aligned} \oint_S \epsilon_0 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} &= \sum_{i=1}^N q_i \quad (\text{点電荷の系}) \\ &= \int_V \rho dv \quad (\text{連続分布の場合; } V \text{ の表面は } S \text{ に含まれる}) \end{aligned} \quad (1.21)$$

これを Gauss の法則 (積分形) という。

### 1-11 Field of a Spherical Charge Distribution(球対称荷電分布の作る電場)

球対称分布の電荷分布を記述するには極座標表示が適している。

まず、3次元極座標  $(r, \theta, \phi)$  とデカルト座標  $(x, y, z)$  との対応を

$$\begin{aligned} x &= r \sin \theta \cos \phi \\ y &= r \sin \theta \sin \phi \\ z &= r \cos \theta \end{aligned} \quad (14)$$

とつける。逆にとくと

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \theta &= \arctan \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} \\ \phi &= \arctan \frac{y}{x} \end{aligned} \quad (15)$$

である。

ここで  $-\infty < x, y, z < \infty$  は  $0 \leq r < \infty$ ,  $0 \leq \theta \leq \pi$ ,  $0 \leq \phi < 2\pi$  でカバーされる。

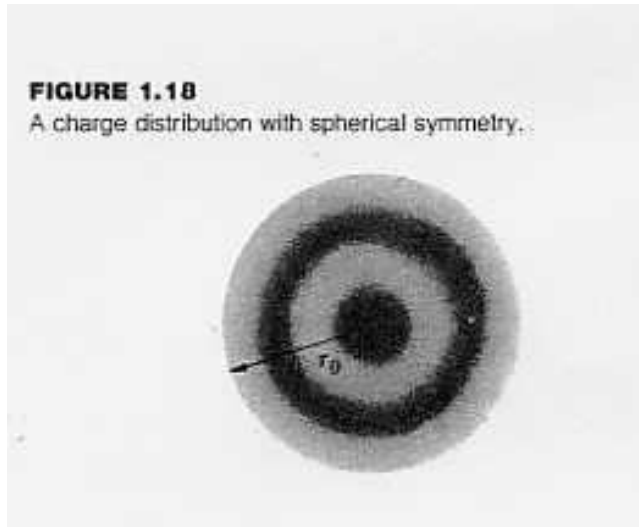


FIGURE 1.18 のような電荷密度が球対称分布である場合は密度関数  $\rho$  は球の中心 (これを原点とする) からの距離だけに依存し、角度  $\theta, \phi$  には依存せず  $\rho = \rho(r)$  である。

この例では  $r \geq r_0$  では  $\rho = 0$  であるとしている。

球の中心から半径  $r_1$  の球面  $S_1$  上の電場を求めよう。

球対称性から電場の方向は  $S_1$  の外向きあるいは内向き法線方向方向である。そして電場の大きさは  $S_1$  上ではいたるところ等しい。今、電場は外向き法線方向としよう。この大きさを  $E_1$  とする。面  $S_1$  上を通過して出てくる全電束は  $4\pi r_1^2 \epsilon_0 E_1$  である。 $S_1$  の中に含まれる電気量  $Q_1$  は  $Q_1 = \int_0^{r_1} \rho(r) 4\pi r^2 dr$  である。Gauss の法則により

$$4\pi r_1^2 \epsilon_0 E_1 = Q_1 = \int_0^{r_1} \rho(r) 4\pi r^2 dr \quad (16)$$

である。

よって

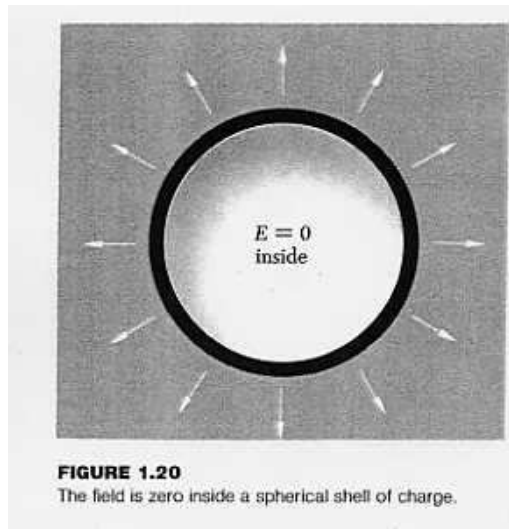
$$\begin{aligned} E_1 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\int_0^{r_1} \rho(r) 4\pi r^2 dr}{r_1^2} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1}{r_1^2} \end{aligned} \quad (1.23)$$

となる。

$S_1$  上の各点の電場は  $S_1$  内の電気量  $Q_1$  を持つ点電荷が球の中心存在している電場と全く同じであり、 $S_1$  の外にある電荷は  $E_1$  には寄与しない。

球殻上に電荷が分布しているとき、球殻内には電場が存在しないこともわかる (FIGURE 1.20)。さらに一様な電荷密度を有する帯電球の外部の電場は中心に全電荷が点電荷として集まったときにできる電場と同じで、球の内部の電場は中心からの距離に比例することもわかる。

1-12 Field of a Line Charge (線状分布電荷の作る電場；一様帯電円柱の作る電場)



無限に長い半径  $a$  の円柱が一定の電荷密度  $\rho$  で帯電しているとする。円柱の外部の電場を求めてみよう。中心軸から  $r$  だけ離れた場所での電場は Gauss の法則を長さ  $L$ 、上下面が半径  $r$  の円である直円柱面上に適用して求めることができる。電場の方向は上下面に平行で、側面の法線方向と平行である。

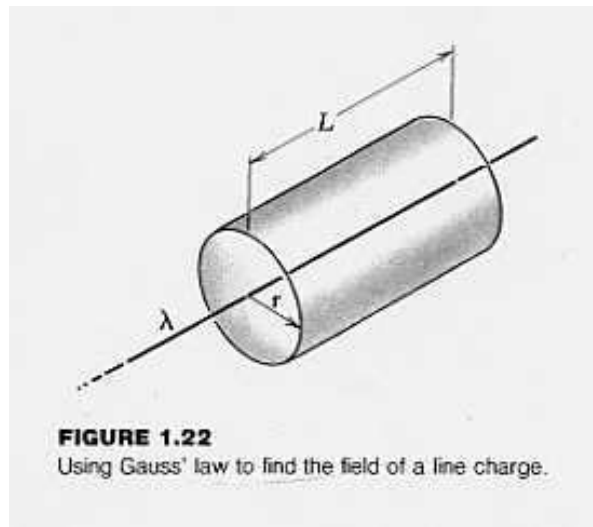


FIGURE 1.22 では  $r \ll a$  として、帯電円柱を細い線で表している。このときの線密度  $\lambda$  は

$$\lambda = \rho \pi a^2 \quad (17)$$

であたえられる。いずれにしても直円柱面の内から外へ貫いて出ている電束の総数  $\Phi$  は、

側面上の電場の大きさを  $E_r$  と書くとき、側面積が  $2\pi rL$  だから

$$\Phi = 2\pi rL\epsilon_0 E_r \quad (18)$$

である。これと等しくなるべき直円柱内の電荷は

$$\rho\pi a^2 L = \lambda L \quad (19)$$

であるので、Gauss の法則から求める  $E_r$  は

$$\begin{aligned} E_r &= \frac{1}{2\epsilon_0} \frac{\rho a^2}{r} \\ &= \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \end{aligned} \quad (1.26)$$

と表され、無限に長い帯電円柱の作る外部の電場は距離に反比例し、その太さは大きさに関係しない。

一様帯電円柱の内部の電場  $E_r$  も Gauss の法則を適用する直円柱の半径  $r$  が  $a$  より小さいものを考えれば同様にして

$$2\pi rL\epsilon_0 E_r = \rho\pi r^2 L \quad (20)$$

より

$$E_r = \frac{\rho}{2\epsilon_0} r \quad (21)$$

と求まる。軸からの距離に電場は比例して増大する。

### 1.13 Field of an Infinite Flat Sheet of Charge (一様帯電平面の作る電場)

FIGURE 1.23 のように一様な電荷面密度  $\sigma$  [C/m<sup>2</sup>] を持つ無限平面がある。平面に関して対称な 2 点 P と P' を考えると、各々の電場  $\mathbf{E}_P$  と  $\mathbf{E}_{P'}$  は反対向きで、大きさが等しい。Gauss の法則を図中の平面と直交する直円柱に適用する。直円柱の上下面の面積を  $A$  とすると直円柱上の全電束  $\Phi$  は  $\Phi = 2A\epsilon_0 E_P$ 、その中に含まれる電気量は  $A\sigma$  であるから

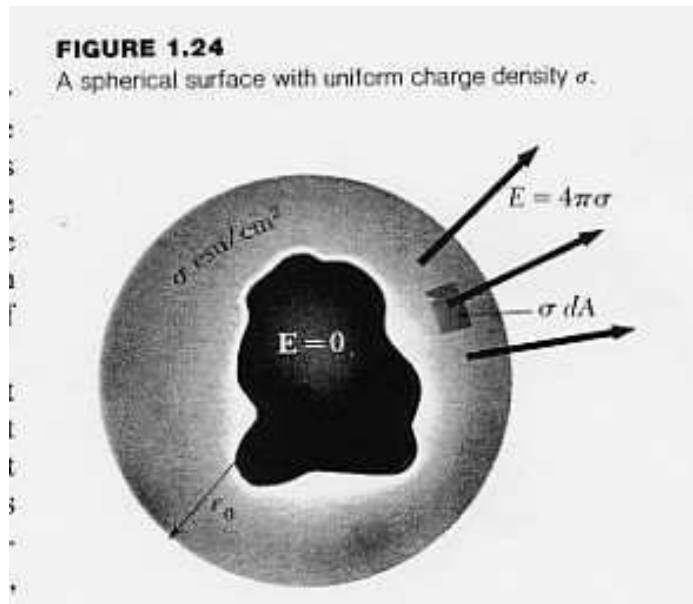
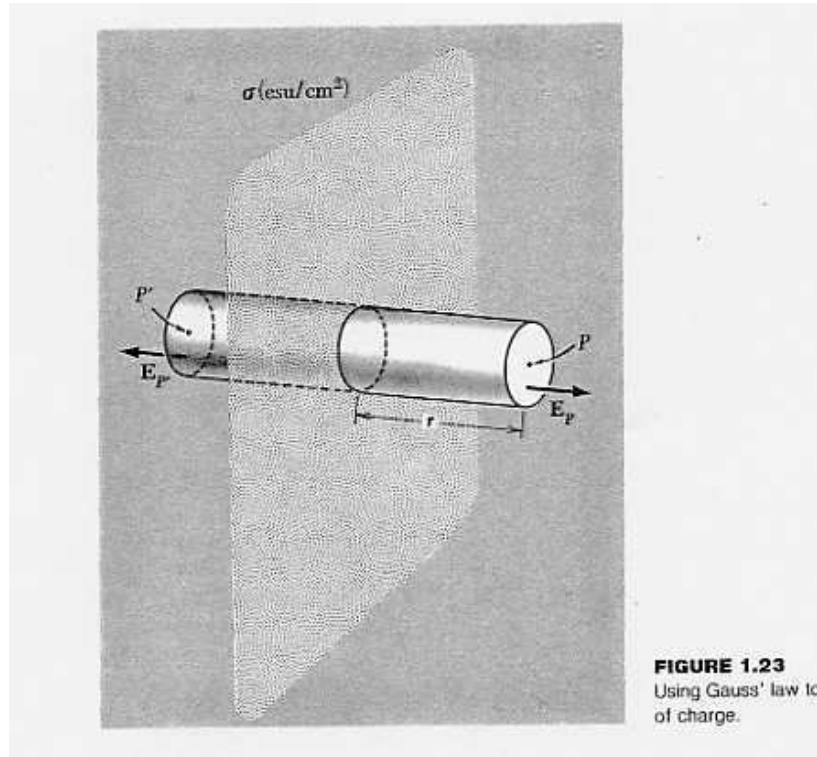
$$E_P = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \quad (1.28)$$

ということがわかる。

一様に帯電した無限平面の両側の電場は平面からの距離に関係なく、大きさ一定で向きは平面に直交している。このことは有限の広さの真直な帯電面であっても、端の効果を検討にいれなければならない面の端に近い領域以外では近似的になりたっている。

### 1.15 Energy Associated with the Electric Field (電場に伴うエネルギー)





真空中の点  $\mathbf{r}$  に電場  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  が存在するとき、その点にはエネルギー密度  $\epsilon_0[\mathbf{E}(\mathbf{r})]^2/2$  が伴うことを例で確かめる。

FIGURE 1.24 のように半径  $r_0$  の球殻面上に正の電荷面密度  $\sigma$  が一様に分布しているとす。球殻の内側では電場は存在しない。球殻の中心から  $r$  だけ離れた外側の点では  $E = \sigma r_0^2 / \epsilon_0 r^2$  であることは (??) よりすぐわかる。よって球殻のすぐ外側での電場の大きさ  $E_0$  は  $E_0 = \sigma \epsilon_0$  である (FIGURE 1.24 は cgs 単位系で書いてある)。

球殻面上に微小面積要素  $dA$  を考える。この要素上の電荷によって作られる電場  $\mathbf{E}'_0$  と球殻上の  $dA$  以外のところにある電荷によって作られる電場  $\mathbf{E}''_0$  を重ね合わせて得られる電場が

$$\begin{aligned} \text{球殻内では} & \quad 0 \\ \text{球殻のすぐ外側では} & \quad E_0 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \end{aligned} \quad (22)$$

である。

$dA$  にのっている微小電荷が作る電場  $\mathbf{E}'_0$  は  $dA$  のすぐ内側とすぐ外側では反対向きで大きさが  $\sigma/2\epsilon_0$  と Gauss の法則からわかるので (??) の電場からこれを引くと

$$\mathbf{E}''_0 = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \mathbf{n} = \mathbf{E} \quad (23)$$

となっていることがわかる。ここで  $\mathbf{n}$  は球殻面の外向き単位法線である。

$dA$  以外の電荷が  $dA$  のところに作る電場は球殻のすぐ内側と外側で大きさ等しく、同一方向を向いているので、これを  $\mathbf{E}$  と書いた。

$dA$  にのっている微小電荷  $\sigma dA$  に働く力は

$$\sigma dA \cdot \frac{\sigma}{2\epsilon_0} = \frac{\epsilon_0}{2} E^2 dA \quad (24)$$

であることがわかる。この力は電場  $\mathbf{E}$  の向きに働くから、球殻の外向き法線方向に働いている。この力に抗して  $r_0 + dr$  から  $r_0$  まで  $\sigma dA$  を半径方向に動かすには仕事  $dW$  を行わなければならない。ここで

$$dW = \sigma \cdot \frac{\sigma}{2\epsilon_0} dA dr = \frac{\epsilon_0}{2} E^2 dA dr \quad (25)$$

である。

以上は球殻の一つの微小面積要素にある電荷について考えた。この球殻全体ではは  $r_0$  の半径の方が  $r_0 + dr$  より全体でエネルギーが高くなっていることになる。これを  $dU$  と書くと

$$dU = \frac{\epsilon_0}{2} E^2 dr \oint_{\text{球殻面}} dA = \frac{\epsilon_0}{2} E^2 4\pi r_0^2 dr = \frac{\epsilon_0}{2} E^2 4\pi r_0^2 dv \quad (1.37)$$

となる。ここで  $dv = 4\pi r_0^2 dr$  とおいた。これより

$$\text{エネルギー密度} = \frac{dU}{dv} = \frac{\epsilon_0}{2} E^2 \quad (26)$$

が確かになりたっていることがわかる。

一般に電場には

$$U = \frac{\epsilon_0}{2} \int_{\text{全空間}} E^2 dv \quad (1.38)$$

のエネルギーが伴っている。