PROBLEMS IN ELECTRICITY AND MAGNETISM 2nd edition

CHAPTER NINE

9.1 自由空間の電場が $E_0 = 6 \times 10^4\,\mathrm{V/m}$ として $\boldsymbol{E} = E_0(\hat{\boldsymbol{x}} + \hat{\boldsymbol{y}})\sin(2\pi/\lambda)(z + ct)$ であるとき、静磁場を含まない磁場の磁束密度はどうなっているか。 $(\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = -\nabla \times \boldsymbol{E}$ を成分表示して時間積分すれば $\boldsymbol{B} = \frac{E_0}{c}(\hat{\boldsymbol{x}} - \hat{\boldsymbol{y}})\sin(2\pi/\lambda)(z + ct) = 6.7 \times 10^{-5}\sin(2\pi/\lambda)(z + ct)\,\mathrm{T})$

9.2 太陽のパワー密度は地球の表面でおよそ $1\mathrm{kW/m^2}$ である。rms(平均 2 乗平方根) 磁場強度はいくらか。 $(S = 1000\mathrm{W/m^2} = \frac{1}{\mu_0}\overline{B^2}c$ より $B_{rms} = \sqrt{\overline{B^2}} = 0.021$ ガウス)

9.3 外力が働いていない領域で陽子一個が原点に静止していたところ、Eq.22(訳注: 教科書 Eq.17,18,19,22には誤植があり波数 $k = 2\pi/\lambda$ が抜け落ちている。正しい Eq.22は SI単位系に直すと $k = 1\,\mathrm{feet}^{-1} = 1/0.3048\,\mathrm{m}^{-1}$ とおいて $\boldsymbol{E} = \frac{1.5\times10^5\hat{\boldsymbol{y}}}{1+k^2(x+ct)^2}\,\mathrm{V/m}$、$\boldsymbol{B} = \frac{-5\times10^{-4}\hat{\boldsymbol{z}}}{1+k^2(x+ct)^2}\,\mathrm{T}$ である。) の電磁波がやってきた。時刻 $t = 1\mu\mathrm{s}$ での陽子はどこにいると思うか。このパルス場を SI 単位系であたえた。陽子の質量は $1.6 \times 10^{-24}\mathrm{g}$ である。 ヒント: このパルス場の継続時間はたった数ナノ秒だから、パルス場が通過中陽子の変位を無視して良い。さらに陽子の速度がそれほど大きくないときには陽子の運動に磁場の影響を無視しても良い。まづ計算すべき事はパルス場によって陽子が得る運動量である。 (パルス場の通過中の陽子の運動方程式は電場の方向の y 成分だけが問題になる。$x = 0$ とおいて良いから $m\frac{dv_y}{dt} = e\frac{1.5\times10^5}{1+k^2c^2t^2}$。陽子はずっと電場を感じているから時間積分は $-\infty$ から ∞ まで行なわなければならない。陽子の得た y 方向の速さは $v_y = \frac{e}{m}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1.5\times10^5}{1+k^2c^2t^2}dt$。よって $v_y = 4.5 \times 10^4\mathrm{m/s}$ となり、等速で陽子は進むから時刻 $t = 1\mu\mathrm{s}$ では陽子は y 方向に 4.5cm 移動している。)

9.4 前問で磁場の影響は完全には無視できないはずである。陽子の最終速度の方向はどう変わるだろうか。 $(\boldsymbol{E} = \frac{E_0\hat{\boldsymbol{y}}}{1+k(x+ct)^2}$、$\boldsymbol{B} = \frac{B_0\hat{\boldsymbol{z}}}{1+k(x+ct)^2})$ とおくと、自由空間を伝播する波動の解は $B_0 = \frac{E_0}{c}$ だから、陽子のしたがう運動方程式は $\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = e(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) = e\frac{E_0}{1+k^2(x+ct)^2}(\hat{\boldsymbol{y}} + \frac{\boldsymbol{v}}{c} \times \boldsymbol{z})$ となり、磁場による項は電場による項の v/c 倍だけ小さいから無視できる。したがって方向の変化はあっても微少である。)

9.5 自由空間の特別な電磁場がある。:

$$\begin{aligned} E_x &= 0 \qquad E_y = E_0\sin(kx + \omega t) \qquad E_z = 0 \\ B_x &= 0 \qquad B_y = 0 \qquad B_z = -\frac{E_0}{c}\sin(kx + \omega t) \end{aligned}$$

(a) ω と k が関係していればこの場はマクスウェル方程式をみたすことを示せ。 $(k = \omega/c$ なる関係が成立すればマクスウェル方程式をみたす。)

(b) $\omega = 10^{10}\mathrm{s}^{-1}$ で $E_0 = 1500\,\mathrm{V/m}$ であるとする。波長は何 cm か。大きな領域をとり、その中でのエネルギー密度の平均値を求めよ。この値からエネルギーの流れであるパワー密度を計算せよ。 (波長は $\lambda = 2\pi c/\omega = 0.06\pi = 18.8\,\mathrm{cm}$、時刻 $t = 0$、空間座標 (x, y, z) の点のエネルギー密度 U は $U = \frac{E_0^2}{\mu_0 c^2}\sin^2 kx$ となる。体積が $(2\lambda)^3$ より大きな領域にわたってのこのエネルギー密度の値の平均値は $< U >_{av} = \frac{\int_{-\lambda}^{\lambda} U dx}{2\lambda} = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c^2} = 9.9 \times 10^{-6}\,\mathrm{J/m^3}$。これよりパワー密度は $< P > = < Uc >_{av} = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c} = 3.0\,\mathrm{kW/m^2})$

9.6 源のない、つまり”空の空間”での SI 系の Eq.15’ の ρ と $\boldsymbol{J}$ の項を落としたマクスウェル方程式から始めよ。Eq.17 と Eq.18 で記述される波動を考えよ。ただし E_0 は V/m、B_0 は T を単位とする。マクスウェル方程式をみたすために E_0、B_0 と v はどんな条件が成立しなければならないか。 ($E_0 = \frac{B_0}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}}$、$v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}}$。)

9.7 以下の条件をみたす平面正弦電磁波を記す $\boldsymbol{E}$ と $\boldsymbol{B}$ の表式を書け。この波動は $-\hat{\boldsymbol{x}}$ 方向に進む。; その周波数は 100MHz(10^8 サイクル /秒); 電場は $\hat{\boldsymbol{z}}$ 方向と直交している。 ($\omega = 2\pi\times10^8\,\mathrm{rad/s}$、$k = \omega/c = 2\pi/3\,\mathrm{rad/m}$ だから E_0 と ϕ を任意定数として $\boldsymbol{E} = E_0\cos(\frac{2\pi}{3}x + 2\pi\times10^8 t + \phi)\hat{\boldsymbol{y}}$、$\boldsymbol{B} = -\frac{E_0}{c}\cos(\frac{2\pi}{3}x + 2\pi\times10^8 t + \phi)\hat{\boldsymbol{z}}$。)

9.8

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{E} &= E_0\hat{\boldsymbol{z}}\cos kx\cos ky\cos\omega t \\
\boldsymbol{B} &= B_0(\hat{\boldsymbol{x}}\cos kx\sin ky - \hat{\boldsymbol{y}}\sin kx\cos ky)\sin\omega t
\end{aligned}
$$

で記述される電磁場が、$E_0 = \sqrt{2}cB_0$ かつ $\omega = \sqrt{2}ck$ ならば、Eq.16 をみたすことを示せ。この電磁場は x および y 方向の長さが π/k で高さが任意の金属の箱の中に存在できる。磁場はどんな様子であるか。 (直接、偏微分を実行すれば分かる。)

9.9 宇宙のあらゆる電磁場のエネルギーの中での飛びぬけて大きい量がミリメートルの波長の波の形で存在している。これが 1965 年に Penzias と Wilson によって発見された宇宙背景輻射である。銀河の間の巨大な空間を含む全空間を $4\times10^{-13}\mathrm{erg/cm^3}$ のエネルギー密度で埋め尽くしている。この輻射の rms 電場強度を静電ボルト /cm で求め、V/m に変換せよ。1kW のラジオ送信機からの輻射がこれと同程度の電磁波強度になるのはどのくらい離れた地点か。 ($\rho_\gamma = \epsilon_0 < E^2 >$ と輻射エネルギーを電場強度の空間平均で表せば、$E_{rms} = \sqrt{< E^2 >} = \sqrt{\frac{4\times10^{-14}}{\epsilon_0}} = 0.066\,\mathrm{V/m}$ と求まる。$\frac{10^3}{2\pi(R_{km}\times10^3)^2} = \rho_\gamma c$ より求める距離は $R = 3.6\,\mathrm{km}$ となる。)

9.10 Fig9.1 で示されている放電中のコンデンサー内の磁場は Fig.9.5 で示されたように原理的には伝導電流全体の寄与の和で計算できる。それは大仕事になりかねない。軸対称性を仮定できれば一点での $\boldsymbol{B}$ を求めるのに、この点を通る円軌道に積分形の法則

$$\int_C \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{s} = \mu_0(\epsilon_0\int_S \frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t} + \boldsymbol{J})\cdot d\boldsymbol{a}$$

を用いたほうがずっと簡単である。この積分経路が取り囲む電流をすべて知るだけが必要になる。この公式を使って P の磁束密度を求めよ。ここで P は 2 枚の極板の中間にあり、対称軸からの距離が r である。(放電中のある瞬間の時刻を t とする。この瞬間での陽極板上の電荷を $Q(t)$ とすると、極板間に存在する電場の大きさは $E(t) = \frac{Q(t)}{\epsilon_0\pi b^2}$ で、変位電流の大きさは $\epsilon_0\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{\dot{Q}}{\pi b^2}$ となるが、電荷の時間的変化率は流れ出る電流 I に等しい。ところで右辺の面積分を考える面として半径 r の極板と平行な円の内部を考えるとこの面を貫き通る電流密度は存在しないので右辺の $\boldsymbol{J} = 0$ である。よって求める点での磁束密度の大きさを B_P とすると $B_P = \mu_0\frac{Ir}{2\pi b^2}$ となる。
この結果は問題文のはじめにある別の面を考えて伝導電流の面積分だけで導くこともできる。点 P がのる半径 r の円周 C を底面 $\mathrm{S_0}$ の縁とする直円柱面を考えよう。直円柱の上面と底面は両極版と平行であるとし、直円柱の中心軸は系の対称軸と一致しているものとする。面 S はこの直円柱の底面をのぞいた側面 $\mathrm{S_1}$ と上面 $\mathrm{S_2}$ からなるとする。$\mathrm{S_0}$ と $\mathrm{S_2}$ の間に一枚の極板があるように設定する。このとき極板間にしか存在しない電場は面 $\mathrm{S_1}$ 上の法線とは直交するので積分形の右辺の面積分には寄与しない。したがって右辺で考えなければならないのは側面 $\mathrm{S_1}$ と上面 $\mathrm{S_2}$ 上での伝導電流である。$I = \frac{dQ}{dt}$ は $\int_{S_2}\boldsymbol{J}\cdot d\boldsymbol{a}$ に等しい。しかし側面 $\mathrm{S_1}$ では電荷 $Q' = \frac{Q}{\pi b^2}(\pi b^2 - \pi r^2)$ の時間微分による電流が流れ込むので $\int_{S_1}\boldsymbol{J}\cdot d\boldsymbol{a} = -I(1 - \frac{r^2}{b^2})$ と

なっている。よって積分形の右辺の面積分の値は $\frac{r^2}{b^2}I$ となる。けっきょく $B_P = \mu_0 \frac{Ir}{2\pi b^2}$ がこのようにして伝導電流だけの寄与の和を考えることによっても得られる。)

9.11 静止衛星から地表に 10kW の出力でシグナルが送られ、シグナルはおよそ直径 1000km の円周内を覆った。受信側での電場強度は何 mV/m であったか。　(覆う面積はおよそ $500^2\pi\,\mathrm{km}^2$ だから $\epsilon_0 E_{rms}^2 c = \frac{10\,\mathrm{kW}}{500^2\pi\,\mathrm{km}^2}$。よって $E_{rms} = 2.2\,\mathrm{mV/m}$ である。)

9.12 正弦波が入射エネルギーの半分を吸収する素材の面で反射された。入射波と反射波の重ね合わせによる場を考えよ。この場の中で静止している人がある振幅で振動している電場 E をその場所で観測した。最大振幅と最小振幅の比はいくらか。(これは実験屋言葉で voltage stannding wave ratio、VSWR とよばれる。) (入射電場の振幅が E_0 であったとする。入射エネルギーは E_0^2 に比例する。半分吸収された結果の反射電場の振幅は $\frac{E_0}{\sqrt{2}}$ である。よって重ね合わせの最大振幅は $E_0 + \frac{E_0}{\sqrt{2}}$、最小振幅は $E_0 - \frac{E_0}{\sqrt{2}}$ である。よって求める比は $\frac{1+1/\sqrt{2}}{1-1/\sqrt{2}} = 5.83$。)

9.13 Chapter 6 の Eq.60' であたえられる場の変換則から出発してスカラー量 $\epsilon_0 E^2 - \frac{1}{\mu_0}B^2$ がこの変換のもとに不変であることを示せ。言い換えると $\epsilon_0 E'^2 - \frac{1}{\mu_0}B'^2 = \epsilon_0 E^2 - \frac{1}{\mu_0}B^2$ が成立することを示せ。これはベクトルの x、y、z 成分を書き下さなくとも、ベクトル代数だけを使って示すことができる。(これには平行ベクトルと直交ベクトルに分解すると便利である。というのも $\boldsymbol{E}_\perp \cdot \boldsymbol{E}_\parallel = 0$、$\boldsymbol{B}_\parallel \times \boldsymbol{E}_\parallel = 0$ だから。) (任意のベクトルの $\boldsymbol{v}$ と平行方向を $_\parallel$、直交方向を $_\perp$ で表す。$\boldsymbol{E}' = \boldsymbol{E}'_\parallel + \boldsymbol{E}'_\perp$、$\boldsymbol{B}' = \boldsymbol{B}'_\parallel + \boldsymbol{B}'_\perp$。Eq.6-60' より $\boldsymbol{E}'_\parallel = \boldsymbol{E}_\parallel$、$\boldsymbol{E}'_\perp = \gamma(\boldsymbol{E}_\perp + \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}}\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{B}_\perp)$、$\boldsymbol{B}'_\parallel = \boldsymbol{B}_\parallel$、$\boldsymbol{B}'_\perp = \gamma(\boldsymbol{B}_\perp + \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}}\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{E}_\perp)$。ベクトル代数の公式 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})^2 = a^2b^2 - (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2$ と $\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{E}_\perp = 0$、$\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{B}_\perp = 0$ を使うと $\epsilon_0 {\boldsymbol{E}'_\perp}^2 = \gamma^2[\epsilon_0 {\boldsymbol{E}_\perp}^2 + \beta^2\frac{{\boldsymbol{B}_\perp}^2}{\mu_0} + 2\sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}}\boldsymbol{E}_\perp\cdot(\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{B}_\perp)]$、$\frac{{\boldsymbol{B}'_\perp}^2}{\mu_0} = \gamma^2[\frac{{\boldsymbol{B}_\perp}^2}{\mu_0} + \beta^2\epsilon_0{\boldsymbol{E}_\perp}^2 - 2\sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}}\boldsymbol{B}_\perp\cdot(\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{E}_\perp)]$。公式 $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) = -\boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a})$、$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ を用いると $\epsilon_0 E'^2 - \frac{1}{\mu_0}B'^2 = \epsilon_0 E^2 - \frac{1}{\mu_0}B^2$ が示せる。この相対論的不変なスカラー量の 1/2 倍が電磁場のラグランジュアン密度として使われる。)