以下の訳では、cgs 系であたえてある問題を適当に国際単位系 (SI 系) に変えて訳している。

CHAPTER EIGHT

8.1 120V、602W の電球とインダクタンスを直列につなぎ 40V、60Hz の電源に接続したら正常に電球が動作した。何 H のインダクタンスであったか。(まづリアクタンスをもとめよ。インダクタンスの抵抗と電球のインダクタンスは無視して良い。) (1.1H)

8.2 2000Ω の抵抗と 1μF のコンデンサーを 120V(実効値)、60Hz の電源に直列につないだ。
(a) インピーダンスはいくらか。 (3322Ω)
(b) 電流の実効値はいくらか。 (36mA)
(c) 回路の消費電力はいくらか。 (2.592W)
(d) 抵抗と並列につながれた交流電圧計の示度はいくらか。コンデンサーと並列につないだら示度はいくらか。 (95.5V)
(e) ブラウン管の水平極板が抵抗と並列につながれ、垂直極板がコンデンサーと並列につながれた。スクリーン上に現れるはずのパターンをスケッチせよ。 (例えば $V_{抵抗} = 72\sqrt{2}\cos 2\pi f t\,\mathrm{V}$(これを画面上の x 軸とする。)、$V_{コンデンサー} = 95\sqrt{2}\cos 2\pi f t\,\mathrm{V}$(これを画面上の y 軸とする。) のように二つの交流電圧の位相差は 90°。よって軌道は $\frac{x^2}{10368} + \frac{y^2}{18050} = 1$ のような楕円軌道が期待される。)

8.3 100Ω の抵抗、500pF のコンデンサーと 2mH のコイルをすべて並列につないだ。10kHz の周波数の交流につないだときのインピーダンスはいくらか。 (15.5+123i Ω)10kHz の周波数の交流につないだときのインピーダンスはいくらか。 (15.5+123i Ω) 10MHz の周波数の交流につないだときのインピーダンスはいくらか。 (1.01-31.8i Ω) インピーダンスの絶対値が最大になる周波数はいくらか。 ($10^6/2\pi = 159$kHz)

8.4 図の共振回路では散逸素子の抵抗 R' が LC の組み合わせと直列ではなく並列に接続されている。この回路に適用される Eq.2 のような方程式を作れ。 ($\frac{d^2V}{dt^2} + \frac{1}{R'C}\frac{dV}{dt} + \frac{1}{LC}V = 0$) 直列 RLC 回路で成立したのと同様な解についての条件をもとめよ。 ($R'^2 > \frac{L}{4C}$ のとき過減衰解、$R'^2 = \frac{L}{4C}$ のとき臨界振動解、$R'^2 < \frac{L}{4C}$ のとき減衰振動解) 直列 RLC 回路と並列 $R'LC$ 回路が同じ値の L と C そして Q をもつとき、R' はどう R と関係するか。 ($Q = \omega\frac{L}{R} = \omega R'C$ より $R' = \frac{L}{RC}$)

8.5 図で示した回路のコイルが 0.01H のインダクタンスであることが分かっている。スイッチを閉じたとき、オッシロスコープに振動掃引波形が現れた。
(a) できるだけの精度でコンデンサーの容量を決めてみよ。 (4 周期分が約 1ms だから周波数はおよそ 4000Hz。よって $C = \frac{4\pi^2}{f^2 L} = 0.158\mu\mathrm{F}$)
(b) コイルの抵抗の値 R を見積もれ。 (0.5ms で振幅がほぼ $1/e$ に落ちている。よって $\exp(-\frac{R}{2L}t) = \exp(-1)$ に $L = 0.01\mathrm{H}$ と $t = 0.5\mathrm{ms}$ を代入して $R = 40\Omega$ を得る。)
(c) スイッチを閉じてから長く経った後、例えば 1 秒後にオッシロスコープにかかっている電圧の大きさはいくらか。 (かかっている電圧は $\frac{20}{10^5+40}40 = 8\mathrm{mV}$)

8.6 Fig.8.4a の回路で $R = 600\Omega$ なる過減衰の場合の β_1 と β_2 の値を決めよ。Eq.16 の定数 B の A に対する比も定めよ。 ($\beta = \frac{1}{2}(\frac{R}{L} \pm \sqrt{(\frac{R}{L})^2 - \frac{4}{LC}})$ に値を代入して $\beta_1 = 3(1+\frac{2\sqrt{2}}{3}) \times 10^6 = 5.8 \times 10^6\,\mathrm{Hz}$ と $\beta_2 = 3(1-\frac{2\sqrt{2}}{3}) \times 10^6 = 1.7 \times 10^5\,\mathrm{Hz}$ を得る。また、$t = 0$ で $I = -C\frac{dV}{dt} = 0$ なる初期条件より $A\beta_1 + B\beta_2 = 0$。よって比 $\frac{B}{A} = -\frac{3+2\sqrt{2}}{3-2\sqrt{2}} = -34$)

8.7 図に示された形の共鳴空洞は多くのマイクロ波発振器の本質的部分である。これを簡単な LC 回路と見ることができる。インダクタンスは一巻きのトロイダルの値であって、この誘導コイルが直接平面平行極板コンデンサーに接続されている。この回路の共鳴周波数をもとめ、電磁場の配置をスケッチせよ。　(Problem6.14 より一巻きのトロイドコイルのインピーダンスは $L = \frac{\mu_0 h}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$ で、平面平行極板コンデンサーの静電容量は $C = \frac{\pi a^2}{\epsilon_0 s}$ だから $f = \frac{1}{2\pi a}\sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}}\sqrt{\frac{2s}{h \ln b/a}}$ が共鳴周波数。電気力線は端の乱れの効果を考えなければ間隔 s の領域で上下方向に一様な分布をし、磁力線は中の半径 a の円筒を取り巻いている円周状に分布。)

8.8 Fig.8.3 の RLC 減衰回路の任意の時刻 t での回路に貯えられている全エネルギー、つまりコンデンサーのエネルギーとコイルのエネルギーの和をもとめよ。臨界減衰の条件 $R = 2\sqrt{L/C}$ が成り立っているときが全エネルギーがもっとも速く散逸してしまうことを示せ。　(コンデンサーの両極板間の電圧を V、コイルに流れる電流を I として、回路の全エネルギーの表式 $E = \frac{1}{2}CV^2 + \frac{1}{2}LI^2$ に解を代入。$t = 0$ のときのコンデンサーの両極板間の電圧を V_0 とすると $0 < R < 2\sqrt{L/C}$ なるときの減衰振動の解は $\alpha = R/2L$、$\omega = \sqrt{1/LC - \alpha^2}$ と定めると $V(t) = V_0 e^{-\alpha t}(\cos\omega t + \frac{\alpha}{\omega}\sin\omega t)$、$I(t) = \frac{V_0}{L\omega}e^{-\alpha t}\sin\omega t$。よって全エネルギーは $E_1 = \frac{1}{2}CV_0^2 e^{-2\alpha t}(\frac{4L - CR^2\cos 2\omega t}{4L - CR^2} + \sqrt{\frac{CR^2}{4L - CR^2}}\sin 2\omega t)$。$R > 2\sqrt{L/C}$ なるときの過減衰の解は $\beta_1 = \frac{1}{2}(\frac{R}{L} + \sqrt{(\frac{R}{L})^2 - \frac{4}{LC}})$、$\beta_2 = \frac{1}{2}(\frac{R}{L} - \sqrt{(\frac{R}{L})^2 - \frac{4}{LC}})$ と書いて $V(t) = \frac{V_0}{\beta_1 - \beta_2}(-\beta_2 e^{-\beta_1 t} + \beta_1 e^{-\beta_2 t})$、$I(t) = \frac{CV_0}{\beta_1 - \beta_2}\beta_1\beta_2(e^{-\beta_2 t} - e^{-\beta_2 t})$。よって全エネルギーは $E_2 = \frac{CV_0^2}{2(\beta_1 - \beta_2)^2}[(\beta_1 + \beta_2)(\beta_1 e^{-2\beta_2 t} + \beta_2 e^{-2\beta_1 t} - 4\beta_1\beta_2 e^{-(\beta_1 + \beta_2)t}) \to \frac{RCV_0^2}{4[R^2/L - 4/C]}(\frac{R}{L} + \sqrt{(\frac{R}{l})^2 - \frac{4}{LC}})e^{-2\beta_2 t}$ $(t \to$ 大 なるとき。)。$R = 2\sqrt{L/C}$ なるときの臨界振動のとき $\beta = R/2L = 1/\sqrt{LC}$ とおいて $V = V_0(1 + \beta t)e^{-\beta t}$、$I = CV_0\beta^2 te^{-\beta t}$。よって全エネルギーは $E_3 = \frac{1}{2}CV_0^2[1 + \frac{R}{L}t + 2(\frac{R}{L})^2 t^2]e^{-\frac{R}{L}t}$。$t \to$ 大 なるとき $E_3 < E_1 < E_2$ であることがわかる。)

8.9 Eq.10 と Eq.13 を使って直列 RLC 回路の周波数への減衰の効果を表せ。$\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ とせよ。大きな抵抗が加わって Q が ∞ から 1000 にまで下げられたとせよ。何%角周波数 ω が ω_0 からずれるか。(減衰振動における $t = 0$ で V_0 なる値をもつコンデンサーの端子電圧の解は $V = V_0 e^{-\frac{R}{2L}t}(\cos\omega t + \frac{R}{2\omega L}\sin\omega t)$ である。ここで $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{R^2}{4L^2}}$。$Q = \frac{\omega L}{R}$ より $\omega = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 + 1/4Q^2}} \approx \omega_0(1 - \frac{1}{8Q^2})$。ここで $Q \gg 1$ のときの近似を行なった。$Q = 10^3$ の場合 $\frac{\omega_0 - \omega}{\omega_0} = 1.25 \times 10^{-5}$%のずれになる。)

8.10 この回路の端子のインピーダンスが実数になる周波数を求められるか。　(並列回路の合成アドミッタンスは $Y = \frac{1}{R + i\omega L} + i\omega C$ だから回路の合成インピーダンスは $Z = \frac{1}{Y} = \frac{R + i\omega[L(1 - \omega^2 LC) - CR^2]}{(1 - \omega^2 LC)^2 + \omega^2 C^2 R^2}$。これが実数になる条件は $L(1 - \omega^2 LC) - CR^2 = 0$。よって $\frac{L}{R} > RC$ なら合成インピーダンスは実数になり、その周波数は $f = 2\pi\sqrt{\frac{1}{LC} - (\frac{R}{L})^2}$ である。)

8.11 交流電圧 $V_0\cos\omega t$ が A の端子間にかけられた。B の両端子は非常に入力インピーダンスの大きなオーディオのアンプにつながれている。(つまりアンプ内の電流は無視できる。) 比 $|V_1|^2/V_0^2$ を計算せよ。ここで $|V_1|$ は B 端子の複素電圧振幅の絶対値である。5000Hz の信号に対して $|V_1|^2/V_0^2 = 0.1$ となるような R と C の値を選べ。この回路は周波数が増えると減衰が強くなる"low-pass"フィルターのもっとも初歩的な回路である。高周波では周波数が倍増すると 1/2 づつ信号の出力が減っていくことを示せ。もっと例えば 1 オクターブ上がる (訳注: 周波数が 2 倍になる) とき 1/16 になるような急激に減っていく配線を作れるか。　(回路に流れる電流を I とする。$V_0 = (R - \frac{i}{\omega C})I$、$V_1 = -\frac{i}{\omega C}$。よって求める比は $\frac{|V_1|^2}{V_0^2} = \frac{1}{1 + \omega^2 R^2 C^2}$。$\omega = \pi \times 10^4$Hz で $\frac{|V_1|^2}{V_0^2} = 0.1$ となるのは $RC = 0.955$ms の組合わせのとき。ω の大きな高周波では $\frac{|V_1|^2}{V_0^2} \approx \frac{1}{\omega^2 R^2 C^2}$ となるので周波数が 2 倍になると増幅率 $\frac{|V_1|^2}{V_0^2}$ は 1/4 になる。高周波で 2 倍になるとき増幅率が 1/16 になる例としては B の両端子にもう一

度 A をつなぎ、図の RC 回路を二つくりかえしたはしご回路にしてフィルター回路とすれば増幅率が $\frac{|V_1|^2}{V_0^2} = \frac{1}{(\omega^2R^2C^2-1)^2+9\omega^2R^2C^2} \rightarrow \frac{1}{\omega^4R^4C^4}$ となり実現できる。)

8.12 この回路で $V_{AB} = V_B - V_A$ とする。どんな ω に対しても $|V_{AB}|^2 = V_0^2$ であることを示せ。V_{AB} は V_0 より 90° だけ位相がずれるような周波数を求めよ。　(A 点と B 点を流れる電流は 2 つとも $I = \frac{V_0}{R-i/\omega C}$ であるから $V_{AB} = V_0\frac{R+i/\omega C}{R-i/\omega C}$ となる。よって $|V_{AB}|^2 = V_0^2$。$\omega = \pm 1/RC$ のとき $V_{AB} = \pm iV_0$ となっていて位相が 90° だけずれている。)

8.13 下図の回路素子で $R_1R_2 = L/C$ なる条件が成り立っているとき A と B の電位差はどんな周波数でもゼロであることを示せ。未知のインダクタンスを測る交流ブリッジとしてこの回路が使えるかどうか論ぜよ。　(A で C から R_1 の向きに流れる電流を $I_1 = \frac{V_0}{R_1-i/\omega C}$、B で R_2 から L の向きに流れる電流を $I_2 = \frac{V_0}{R_2+i\omega L}$ とする。$V_A = V_0 + \frac{iI_1}{\omega C}$ および $V_B = V_0 - I_2R_2$ がそれぞれ A と B の電位である。よって $V_A - V_B = \frac{\omega CV_0(R_1R_2-L/C)}{(\omega R_1C-i)(R_2+i\omega L)}$ となるが題意より $V_A - V_B = 0$ である。この条件がみたされるとき、$L = R_1R_2C$ となり、未知のインダクタンスが既知の 2 つの抵抗値および静電容量の積で表せる。)

8.14 実験室でインダクタンス L と内部抵抗 R の値がわからないコイルを見つけた。直流抵抗計、高インピーダンスの交流電圧計、1μF のコンデンサーと 100Hz の交流電圧発振器を使って、以下の様にして L と R を決めよ。: 抵抗計により $R = 35\,\Omega$ であることが分かった。コンデンサーをコイルと発振器に直列接続した。コンデンサーとコイルとの電圧は 10.1V であり、コンデンサーだけにかかっている電圧は 15.5V であった。念のためチェックとしてコイルだけにかかっている電圧を測ったところ 25.4V であった。L はいくらか。チェックには矛盾がないか。　(この直列 LCR 回路にかかっている電圧は $V_0 = I(i\omega L + R - \frac{i}{\omega C}) = |V_0|e^{i\omega t}$。コンデンサーにかかっている電圧は $V_C = -I\frac{i}{\omega C} = |V_0|e^{i(\omega t+\phi)}$。電流を消去して $L = \frac{1}{\omega^2 C}[1 \pm \sqrt{|\frac{V_0}{V_C}|^2 - \omega^2R^2C^2}]$ を得る。題意の条件 $|V_0| = 10.1$V、$|V_C| = 15.5$V、$\omega = 2\pi \times 10^3$rad·Hz、$R = 35\Omega$、$C = 10^{-6}$F を代入すると 2 つのインピーダンスの値 $L = 40.9$mH と 9.8mH を得るが、チェックにより $|\frac{V_L}{V_C}| = \frac{25.4}{15.5} = \omega^2 LC$ であってこれと矛盾せず合致するのは $L = 40.9$mH の方である。)

8.15 下の各回路の端子間のインピーダンス Z は

$$\frac{5000 + 16 \times 10^{-3}\omega^2 - 16i\omega}{1 + 16 \times 10^{-6}\omega^2}$$

であることを示せ。この二つはどんな周波数でも同じインピーダンスになるから外から識別不可能である。左図のボックスの抵抗と容量の値があたえられたとき、右図のボックスを作る一般則を作って見よ。　(左図では $Z = 10^3 + \frac{1}{\frac{1}{4000}+\frac{1}{\frac{-i}{10^{-6}\omega}}}$。一方、右図では $\frac{1}{Z} = \frac{1}{5000} + \frac{1}{1250-\frac{i}{0.64\times 10^{-6}\omega}}$。どちらも同じ $Z = \frac{5000+16\times 10^{-3}\omega^2-16i\omega}{1+16\times 10^{-6}\omega^2}$ をあたえる。左図の 1000Ω を R_1、4000Ω を R_2、1μF を C_1 と、右図の 5000Ω を R_3、1250Ω を R_4、0.64μF を C_2 と名付けて一般に任意の ω に対して $R_1 + \frac{1}{\frac{1}{R_2}+\frac{1}{-\frac{i}{\omega C_1}}} = \frac{1}{\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4+\frac{-i}{\omega C_2}}}$ が成り立つ条件を求める。$\omega \to 0$ のとき実部が等しい条件が $R_3 = R_1 + R_2$ であり、虚数部が等しい条件が $C_2 = (\frac{R_2}{R_1+R_2})^2 C_1$ である。$\omega \to \infty$ のとき成り立つ条件は $R_4 = \frac{R_1}{R_2}(R_1 + R_2)$ であることが分かる。左図の回路のコンデンサーを充電してから放電したときの時定数は R_2C_1、右図のコンデンサーを充電してから放電したときの時定数は $(R_3 + R_4)C_2$ である。当然この二つの時定数は等しいから、この条件を解いてもやはり $C_2 = (\frac{R_2}{R_1+R_2})^2 C_1$ を得ることができる。)

8.16 4 端子回路であるボックス (a) は図のように接続したコンデンサー C と等しいインピーダンス L を持つ 2 つのコイルを含んでいる。右側の端子にインピーダンス Z_0 がつながれる。あたえられた ω

に対して、左側の端子間に現れるつながれた結果の合成インピーダンス (”入力”インピーダンス) が Z_0 に等しくなるとき Z_0 の値はいくらか。$\omega^2 < 2/LC$ のとき、Z_0 の値は抵抗値 R_0 になることが分かる。このボックスの連鎖は Problem4.32 の梯子抵抗と似た梯子回路網を作る。この連鎖が抵抗値 R_0 になるように終わっているとき、どれだけ多くのボックスが連鎖を作ろうとも周波数 ω では入力インピーダンスは R_0 である。

$\omega^2 = 2/LC$ なる特別の値のとき Z_0 はいくらか。ボックス (a) の中身がボックス (b) で表されることに留意するとこの場合の理解に役立つ。　($Z_0 = i\omega L + \frac{1}{\frac{1}{-i/\omega C} + \frac{1}{i\omega L + Z_0}}$ を解いて $Z_0^2 = (2 - \omega^2 LC)\frac{L}{C}$ を得る。$\omega^2 < \frac{2}{LC}$ のとき Z_0 は実数 $R_0 = \sqrt{(2 - \omega^2 LC)\frac{L}{C}}$ に等しい。もちろん R_0 は抵抗値である。$\omega^2 = \frac{2}{LC}$ のとき $Z_0 = 0$ となる。並列に $\frac{C}{2}$ の容量のコンデンサーを 2 つ接続した回路は C のコンデンサーとおなじであるのでボックス (a) の中身がボックス (b) で表される。よって左図で $Z_0 = 0$ の場合は右図の右の端子を短絡した回路と同じになる。この短絡回路の合成インピーダンスを求めると $Z = i\omega L\frac{2-\omega^2 LC}{1-\omega^2 LC}$ となる。いま特別な角周波数 $\omega = \sqrt{\frac{2}{LC}}$ のとき $Z = 0$ となっている。入力インピーダンスが 0 であるので、右図の回路の左右の端子は短絡された閉回路を考えていることになっている。この閉回路の共鳴が起きる条件である $Z = 0$(並列 LC 回路のときの共鳴条件を求めてみよ。) をあたえる共振角周波数は $\omega = \sqrt{\frac{2}{LC}}$ であり、上の考察と一致している。)