以下の訳では、cgs 系であたえてある問題を適当に国際単位系 (SI 系) に変えて訳している。

CHAPTER SEVEN

7.1 地磁気が 0.5ガウスのところで 4000 巻きで平均半径が 12cm のコイルが毎秒 30 回転しているときコイル中に誘導される起電力の最大値はいくらか。　($\mathcal{E} = -NB\pi r^2\omega\cos\omega t$ において $N = 4000, B = 5\times10^{-5}\mathrm{T}, \omega = 60\pi, r = 0.12\mathrm{cm}$ を代入して $\mathcal{E}_{max} = 1.71\mathrm{V}$ を得る。)

7.2 長い直線状の導線が y 軸に平行で z 軸上の $z = h$ なる点を通っている。I なる電流がこの導線を流れていて、遠方の導体を戻って閉回路を作っているが導体は考えなくてもよい。xy 平面上に長い導線と一辺が平行に正方形一辺の長さ b ーの閉回路を置いた。この回路は一定の速さ v で $\hat{x}$ 方向に滑っている。正方形の中心が y 軸を横切るときの回路に誘導される起電力を求めよ。　($\mathcal{E} = \frac{\mu_0 Ivb^2}{2\pi(h^2+b^2/4)}$)

7.3 ラジオ周波数帯の電源につながれたソレノイドの中心領域で、磁束密度は 4ガウスの振幅で 2.5×10^6 回/s(=Hz) で振動している。軸から 3cm の点で振動電場の振幅を求めよ。(この点は磁場がほとんど一様な領域にある。)　($b_0 = 4\times10^{-4}\mathrm{T}, \omega = 5\pi\times10^6, r = 0.03\mathrm{m}$ を $E\cdot2\pi r = \mathcal{E} = -\pi r^2 b_0\omega\cos\omega t$ に代入して求める振幅が $b_0 r\omega/2 = 94.2\mathrm{V/m}$ と得られる。)

7.4 動いている閉回路が図で示した位置にきた瞬間の回路の誘導起電力を求めよ。回路の抵抗がとても大きくて回路に流れる電流の効果は無視できるとせよ。こうできるには抵抗がどのくらい大きければよいか大雑把に求めよ。この瞬間での回路に流れる電流の向きを示せ。　($\mathcal{E} = 5\times(2/15-2/25)\times10^{-3}\times0.08 = 2.12\times10^{-5}\mathrm{V}$ で電流は回路を上から見て時計回りの方向に流れる。)

7.5 Fig7.6 の閉回路が抵抗 R を持つとせよ。回路の自己インダクタンスが無視できるとき、一定の速度で回路を動かすには微小時間 dt の間に抵抗で消費されるエネルギーと全く同じだけの仕事をすることを示せ。回路が止まっているとき Fig.7.14 のエネルギー源は何か。　(回路に流れる電流は $I = \frac{wv}{R}(B_1-B_2)$、閉回路に働く力は $F = Iw(B_1-B_2)$。よって仕事率は $Fv = Iwv(B_1-B_2) = RI^2$。Fig.7.14 ではコイルを動かすのに要する仕事をあたえているメカニズムがエネルギー源である。)

7.6 Fig.7.13 の回転回路の起電力の正弦的変動の予測は回路が長方形だからか、一様磁場だからか、あるいはこの二つのことに起因するか説明せよ。非正弦的変化をする起電力を与える回転回路と静止コイルの配置を考えられるか。この配置のもとでオッシロスコープ上にはどんな電圧の変化の波形が見られるか描け。　(一様磁場なら回路の形状によらず正弦波的変動である。)

7.7 直径 10cm、長さ 2m の円柱状ソレノイドの自己インダクタンスを計算せよ。一層の全部で 1200 巻きのコイルである。第一近似としてソレノイド内の磁場は両端まで一様であると仮定せよ。大雑把にこの仮定による誤差の大きさを見積もれ。本当の L はこの近似値より大きいか小さいか。($\ell = 2\mathrm{m}, r = 0.05\mathrm{m}, N = 1200$ 巻き より自己インダクタンスの近似値は $L = \frac{\mu_0\pi rN^2}{2\ell} = 0.071\mathrm{H}$。端の磁束密度は中の値より小さくなっていく筈だからこの近似値はやや大きく見積もりすぎ。)

7.8 どう巻けば抵抗を持つコイルの自己インダクタンスが小さくなるか。　(無誘導コイルの一例は、長い一本の導線を二つに折り畳みそれをコイルに巻きつけて作れば良い。)

7.9 同一半径 a の 2 つの円輪を中心が b なる距離をへだてて平行においたときの相互インダクタンスの近似式を導け。ここで $b \gg a$ でなりたつ近似を用いよ。　(電流 I がコイル 1 を流れるときコイル

2 の中心での磁束密度の大きさは $B = \frac{\mu_0 a^2 I}{2(a^2+b^2)^{3/2}}$。$b \gg a$ のときコイル 2 の囲む領域で B は一定の値 $B \approx \frac{\mu_0 a^2 I}{2b^3}$。よって相互インダクタンスは $M = \frac{\pi\mu_0 a^4}{2b^3}$)

7.10 初めて検流計にわずかだが測定可能なゆれを生じたコイルをファラデーはそれぞれ 203 フィート (訳注:=203×30.48cm) の銅線を大きな木片に巻いて作ったと書いている。2 番目の巻き線 (つまり一層のコイル) は 1 番目の巻き線の間に挿入され、1 番目の巻き線とは麻糸で区切られている (訳注:銅線と麻糸が隣り合って巻かれている。)。銅線の直径は 1/20 インチ (訳注:0.127cm) であった。ファラデーは木片の大きさもコイルの巻き数もあたえていない。実験では一方のコイルは 100 層の電池につながれた。彼の検流計を通ったパルス電流が何秒続いたかまた何アンペアだったか大雑把に見積もることができるか。 (コイルの半径を r、長さを L_0、巻き数を N とする。麻糸の太さも銅線と同じと考えると各々の銅線同士の間隔は 0.127×4cm でおよそ 0.005m だから $N = L_0/0.005$ となるので銅線の長さ $\ell = N \cdot 2\pi r$ は $400\pi r L_0$m であたえられる。これが 203 フィート=61.8744m。木片が Fig.6.17 のように $L_0 : 2r = 4 : 1$ であったとしよう。この場合 $\ell \approx 62$m、$L_0 \approx 0.63$m、$N = 126$ 巻き、$r \approx 0.08$m が得られる。電流 IA が流れるとき縦長のコイルの中心付近の磁束密度は $B = \mu_0 IN/L_0$ であたえられる。磁束密度がほぼ一定の近似のもとで自己インダクタンスは $L = \pi\mu_0 N r^2/L_0 = 5 \times 10^{-6}$H となる。ファラデーの作ったコイルの形状から二つのコイルの相互インダクタンスはやはり同じ値になり $M = 5 \times 10^{-6}$H であたえられる。各銅線の抵抗 R は銅の抵抗率が $2 \times 10^{-6}\Omega\cdot$cm であることから $R \approx 1\Omega$ である。もし電源が 100V で内部抵抗が 1Ω であるならばパルス電流の最初の値は 50A であり、検流計の内部抵抗はとても小さいはずだから無視すると回路の時定数は $L/R = 5 \times 10^{-6}$s とあたえられてこれだけパルス電流が続いたはずである。)

7.11 図 (a) には自己インダクタンス L_1 と L_2 の二つのコイルを示した。図示した相互の位置関係での相互インダクタンスは M である。電流の正の向きおよび起電力の正の向きを図中の矢印で表した。電流と起電力の関係式は

$$\mathcal{E}_1 = -L_1\frac{dI_1}{dt} \overset{?}{\pm} M\frac{dI_2}{dt} \qquad \text{と} \qquad \mathcal{E}_2 = -L_2\frac{dI_2}{dt} \overset{?}{\pm} M\frac{dI_1}{dt}$$

である。M はつねに正の定数であることがわかっているときこの二つの式の右辺の符号はどうなるべきか。もし下のコイルの電流と起電力の方向を逆向きにしたらどうなるか。次に二つのコイルを図 (b) のようにつなげて 1 つの回路にする。この回路のインダクタンス L' を L_1、L_2 および M で表したらどうなるか。図 (c) のようにコイルをつないで作った回路のインダクタンス L'' はどう表せるか。(b) と (c) のどちらの回路が大きな自己インダクタンスになるか。どんな回路の自己インダクタンスも正になる (なぜ負にならないだろうか。) ことを考慮して任意のコイルの対にたいして成立する L_1、L_2 および M の相互の大きさに関する一般的な結論が得られるか考えてみよ。 (図 (a) では $\mathcal{E}_1 = -L_1\frac{dI_1}{dt} - M\frac{dI_2}{dt}$ $\quad \mathcal{E}_2 = -L_2\frac{dI_2}{dt} - M\frac{dI_1}{dt}$、下のコイルの矢印を逆向きにした場合は $\mathcal{E}_1 = -L_1\frac{dI_1}{dt} + M\frac{dI_2}{dt}$ $\quad \mathcal{E}_2 = -L_2\frac{dI_2}{dt} + M\frac{dI_1}{dt}$; 図 (b) では $L' = L_1 + L_2 + 2M$; 図 (c) では $L'' = L_1 + L_2 - 2M$; $L, L', L'' \geq 0$ より $M \leq \frac{1}{2}(L_1 + L_2)$)

7.12 ある海流が地磁気の鉛直成分が 0.35ガウスの領域で 2 ノット (約 1m/s) の速さで流れている。この領域の海水の伝導率は $0.04(\Omega\cdot\mathrm{cm})^{-1}$ である。運動による項 $\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}$ 以外に $\boldsymbol{E}$ の水平成分はないという仮定のもとに水平に流れる電流の密度を A/m^2 単位で求めよ。もしビンに詰めた海水を持ってこの速さで地磁気の場内を動いたときビン内にこんな電流が流れるのか。 ($J = \sigma E = \sigma v B = 1.4 \times 10^{-4}$A/m^2。海水を入れたビン内ではこの電流によってビンの壁に電荷が運ばれ、その結果運動による電場とは逆向きの電場が生じて電場自体が消えてしまい、電流は流れなくなってしまう。)

7.13 抵抗 0.01Ω、自己インダクタンス 0.50mH のコイルが内部抵抗の無視できる 12V の大きな電池

につながれている。スイッチを入れた後、どのくらいの時間で電流はその最終値の 90%になるか。そのとき磁場には何 J のエネルギーが貯えられているか。そのときまでにどれだけのエネルギーが電池から引き出されたか。 ($R = 0.01\Omega, L = 0.50 \times 10^{-3}\mathrm{H}, \mathcal{E}_0 = 12\mathrm{V}$ として、回路の微分方程式 $-L\frac{dI}{dt} + \mathcal{E}_0 = RI$ を初期条件 $t = 0$ で $I = 0$ のもとに解く。電流の最大値 I_{max} は 1200A で $I = I_{max}(1 - \exp(-\frac{R}{L}t))\mathrm{A}$ がこの回路の任意の時間での電流の値をあたえる。問題の時間を T とすると、$T = \frac{R}{L}\ln 10 = 0.115\mathrm{s}$ となる。このとき電流の値は $I|_{0.115\mathrm{s}} = 1080\mathrm{A}$ である。よって時間 T での磁場のエネルギーの値は $= 0.50 \times 10^{-3} \times 1080^2/2 = 292\mathrm{J}$ になっている。電池の消費エネルギーは $P = \mathcal{E}_0 I(t)$ を $t = 0$ から $t = T$ まで積分して得られ $\mathcal{E}_0 I_{max}\int_0^T(1 - \exp(-\frac{R}{L}t))dt = 1008\mathrm{J}$ である。ジュール熱によるエネルギー消費 $\int_0^T RI(t)^2 dt = 716\mathrm{J}$ と磁場に貯えられるエネルギーの和が電池の消費エネルギーに等しい。)

7.14 質量 m の金属の横棒が距離 b だけ離れた 2 本の平行な伝導体のレール上を摩擦なしで滑っている。レールの一端に R の抵抗がつながれている。; この R に比べれば横棒とレールの抵抗は無視できる。図の平面と直交する向きに一様な磁束密度 $\boldsymbol{B}$ がかかっている。時刻 $t = 0$ で横棒が速さ v_0 で右向きに動かされた。この後どうなるか。

(a) 横棒はいつかは止まるだろうか。もしそうならそれはいつか。

(b) 横棒の動く距離はどれだけか。

(c) エネルギーの保存はどうなっているだろうか。 (横棒の重心のしたがう運動方程式は横棒の速さを v、時定数を $\tau = \frac{mR}{B^2b^2}$ として $m\frac{dv}{dt} = -\frac{m}{\tau}v$。(a) $v = v_0 e^{-t/\tau}$。よって時刻 $t = \tau$ のとき速さは v_0/e と小さくなるが、有限の時間では止まらない。(b) 動く距離 L は $\int_0^\infty v_0 e^{-t/\tau}dt = v_0\tau = \frac{mR}{B^2b^2}v_0$。(c) 磁場の行なう仕事 W は $\int_0^L \frac{m}{\tau}v^2 dx = \frac{m}{\tau}\int_0^\infty v_0^2 e^{-2t/\tau}dt = \frac{1}{2}mv_0^2$、一方ジュール熱として抵抗で消費されるエネルギー U は誘導起電力が $\mathcal{E}(t) = -Bbv(t) = RI(t)$ だから $\int_0^\infty RI(t)^2 dt = \frac{1}{2}mv_0^2$ となり、これはちょうど磁場の行なった仕事 W に等しい。)

7.15 ぴんと張った導線が小さな磁石の隙間を通っており、その隙間の磁束密度は 5000 ガウスである。隙間にある部分の導線の長さは 1.8cm である。この導線が振幅 0.03cm(訳注: 隙間のところで)、振動数 2000Hz で振動しているとき誘導される交流電圧の振幅を求めよ。 ($\mathcal{E} = 0.0339\sin 4000\pi t\mathrm{V}$、よって 0.034V)

7.16 影をつけたところは紙面に垂直な強い磁場がある電磁石の磁極を表している。長方形の枠を曲げて端を溶接した直径 5mm のアルミ棒で作った。1N の一定の力により図示した場所からこの枠を磁場から 1 秒で引き出せた。そこで : 力が 2 倍になり 2N となったとき枠が __(1)__ 秒後に引き出せてしまう。アルミニウムのほぼ 2 倍の抵抗率を持つ。この枠が 5mm の真鍮棒でできていると 1 秒で引き出せてしまうのに必要な力は __(2)__ N である。枠が 1cm の直径のアルミ棒で作られているとき 1 秒で引き出せてしまうのに必要な力は __(3)__ N である。いずれの場合も枠の慣性を無視して良い。 (手で持っている辺と平行な辺の長さを ℓ とし、枠の移動の速さを v、枠の棒の半径を a、枠の金属の抵抗率を ρ_r とする。枠に誘導される起電力は磁束密度の大きさを B、枠に流れる電流を I とすると $\mathcal{E} = B\ell v = I\rho_r\ell/\pi a^2$ である。枠に磁場のおよぼす力は外から加える一定の力 K とは逆向きに $IB = \frac{m}{\tau}v$ となる。ここで ρ を金属の密度、L を枠の全長とすると枠の質量は $m = \rho L$ となる。$\tau = \frac{4\rho_r m}{\pi B^2 a^2} = \frac{4\rho_r\rho L}{B^2}$ はこの力にともなう時定数である。枠の重心のしたがう運動方程式は一定の外力 K の働く方向を正の向きとして $m\frac{dv}{dt} = K - \frac{mv}{\tau}$ である。Al の抵抗率の値は常温では $3 \times 10^{-8}\Omega\cdot\mathrm{m}$、密度は $\rho = 2.7 \times 10^3\mathrm{kg/m^3}$ である。一定の力 K が作用するとき、この方程式の解は初速を v_0 とすると $v(t) = \frac{K\tau}{m}(1 - \exp(-t/\tau)) + v_0\exp(-t/\tau)$ である。ここで時定数の値はアルミ棒の場合 $\tau = 3 \times 10^{-4}L_{[\mathrm{m}\,単位]}/B^2_{[\mathrm{T}\,単位]}$ 秒となり普通の磁場の強さと枠の全長に対して $\tau \ll 1$ 秒である。よって $\exp(-t/\tau) \to 1$ とおいて良い。したがって $X = \int_0^{t_0} v(t')dt'$ だけ右に進んだとき枠

が磁場から出るとするとそれに要する時間 t_0 は $t_0 = \frac{mX}{\tau K}$ である。(1) 外力が 2 倍になると要する時間は半分になるので 0.5 秒が答 ;(2) 時定数 τ は他の量が変わらないとき抵抗率に比例するので 1 秒という時間が変わらないから外力は半分でよい。よって答えは 0.5N ;(3) アルミ棒の半径を 2 倍にすると時定数は 1/4 になる。よって必要な外力は 4 倍である。答えは 4N)

7.17 図に示した回路での 10V の電池の内部抵抗は小さくて考えなくて良い。スイッチ S を数秒間閉じてから開いた。ミリ秒刻みの目盛を持つ時間軸を横軸とするグラフを書いてスイッチを開ける直前から開けた後 10 ミリ秒までの間の点 A の電位を示せ。同じ時間での点 B の電位の変化もまた示せ。(スイッチを開けるまでは $I = 0.2$A の電流が流れているから $V_A = 10$V、$V_B = 10$V。$t > 0$ では流れている電流を I とすると $V_A - V_B = -0.1\frac{dI}{dt}$, $V_A = 150I$, $V_B = -50I$。よって $I(t_{ms\ 単位}) = 0.2\,e^{-\frac{t}{0.5}}$A。ゆえに $V_A = -30\,e^{-\frac{t}{0.5}}$V、$V_B = 10\,e^{-\frac{t}{0.5}}$V)

7.18 電磁石の作る磁場内に半径 a の N 回巻き導線のコイルがある。磁場はコイル面と直交しこの領域での磁束密度は一定値 B_0 である。コイルは 2 本の捩った導線対で外部抵抗につながれている。コイル自身を含むこの閉回路の全抵抗は R である。急速に磁場がゼロになるように電磁石を切ったとせよ。誘導起電力により回路を回る電流が生ずる。抵抗を流れる全電荷 $Q = \int I dt$ の公式を導いて、磁場がゼロに落ちていく速さに全電荷が依らない理由を説明せよ。 ($I = -\frac{N\pi a^2}{R}\frac{dB(t)}{dt}$ より $Q = \int I dt = -\frac{N\pi a^2}{R}\int_{B_0}^{0} dB = \frac{N\pi a^2 B_0}{R}$。回路の微分方程式 $RI = -L\frac{dI}{dt}$ をとくと電流は $I(t) = \frac{\pi a^2 N B_0}{L}e^{-\frac{R}{L}t}$ と回路の時定数 L/R に依存し、磁束密度も $B(t) = B_0 e^{-\frac{R}{L}t}$ と減少の仕方は回路の時定数 L/R に依存する。しかし抵抗を流れる全電荷は初期値 $B = B_0$ から終端値 $B = 0$ になるすべての時間にわたっての電流の積分値であるため、途中経過を示す時定数には依存しない。)

7.19 Fig.7.20 の共心の大小リングの場合について $\Phi_{12} = \Phi_{21}$ の定理の中身を論ぜよ。外側のリングの電流 I_1 を固定して R_1 を増すと中心での磁場が弱くなるから明らかに内側のリングを貫く磁束 Φ_{21} は減少する。しかし内側のリングの電流を固定したとき R_2 を一定に保ちながら R_1 を増すとどうして外側のリングを貫く磁束 Φ_{12} は減るのか。定理を満たすならそうでなければならない。 (内側のリングの電流によって作られる磁場の磁力線のうち外側のリングを越えず両方のリングではさまれる領域を横切って戻ってくるものは磁力線の総数には寄与せず、外側のリングを越えて外を回って戻ってくるものだけがその総数に寄与する。よって R_1 が増えれば当然磁力線の総数が減る。)

7.20 円電流の作る磁場の磁束密度の、円ののっている平面上で半径よりずっと遠方での点での値を求めるのに $\Phi_{21} = \Phi_{12}$ なる定理を使えるか。 (外側のリングをリング 1、内側のリングをリング 2 と名づける。同一面上の二つのリングは共心で半径は $R_2 \ll R_1$ なる関係にあるとする。リング 1 に電流 I が流れているとき $m = \pi R_2^2 I$ と定義すると $\Phi_{21} = \frac{\mu_0 m}{2R_1}$。リング 1 の半径を微少に ΔR_1 と増したときこの磁束の微少変化は $\Delta\Phi_{21} = -\frac{\mu_0 m}{2R_1^2}\Delta R_1$。リング 2 に電流 I が流れているとき ΔR_1 なるリング 1 の半径の微少変化による磁束の微少変化は $\Delta\Phi_{12} = -B(R_1)\cdot 2\pi R_1 \Delta R_1$。定理より $\Delta\Phi_{21} = \Delta\Phi_{12}$。よって $B(R_1) = \frac{\mu_0 m}{4\pi R_1^3}$。これは Chapter11 の Eq.13 で $\theta = \frac{\pi}{2}$ と置いた場合と同じ答えをあたえる。)

7.21 図は半径 a_2、長さ b_2 の長いソレノイドの中にある半径 a_1、長さ b_1 のソレノイドを示している。巻き数は内側のコイルが N_1 で外側のコイルが N_2 である。相互インダクタンス M の表式をあたえよ。 (外側のソレノイドを 1、内側のソレノイドを 2 と名づけ二つのソレノイドの共通の中心軸を z 軸 (図の右向きを正方向とする。)、図の下から上に向く方向を正とする x 軸を設定する。原点をコイルの中心にとる座標系で考える。内側のコイルに電流 I を流したとき、中心軸上の点での磁束密度は Chapter 6 の Eq.44 より $B_z = \frac{\mu_0 I n_2}{2}(\cos\theta_1 - \cos\theta_2)$。ここで $n_2 = \frac{N_2}{b_2}$、$\cos\theta_1 = \frac{b_2/2 - z}{\sqrt{(b_2/2-z)^2 + a_2^2}}$、$\cos\theta_2 = -\frac{b_2/2+z}{\sqrt{(b_2/2+z)^2+a_2^2}}$。もし $a_1 \ll a_2$ であれば半径 a_1 の円内を貫通す

る磁束は $\Phi(z) \approx \pi a_1^2 B_z$。さらに $b_1 \ll b_2$ ならソレノイド 1 を貫通する磁束は $\Phi_{12} = \frac{N_1 N_2 \pi\mu_0 I a_1^2}{\sqrt{b_2^2+4a_2^2}}$ と近似できる。ここで $|z| \le \frac{b_1}{2} \ll \frac{b_2}{2}$ より $\frac{b_2/2 \pm z}{\sqrt{(b_2/2\pm z)^2+a_2^2}} \approx \frac{b_2}{\sqrt{b_2^2+4a_2^2}}[1 \pm \frac{2a_2^2 z}{(b_2/2)^2+a_2^2)b_2}]$ なる近似を行なった。よって相互インダクタンスは $M = \pi\mu_0 \frac{N_1 N_2 a_1^2}{\sqrt{b_2^2+4a_2^2}}$ と表せる。)

7.22 半径 a の細い円環が q なる静止電荷で帯電している。この円環は中心軸と平行な大きさ B_0 の磁束密度の磁場内にありこの中心軸の回りに自由に回転できるものとせよ。磁場が切られたときどれだけの角運動量が円輪に加えられるか。円輪の質量が m なるときはじめ静止していた円輪は角速度 $\omega = qB_0/2m$ を有することを示せ。Problem7.18 のようにこの結果は磁場強度の初期値と最終値だけによっていて変化の速さには関係しないことに注意せよ。 (円輪の円ののっている面は磁束密度と直交している。今、磁束密度の方向を z 軸の正方向とする。磁束密度の大きさが一般に $B(t)$ であるとするとき、円輪の起電力は $\mathcal{E} = 2\pi a E = -\pi a^2 \frac{dB(t)}{dt}$ で与えられる。ここで、円輪上の電場 $\boldsymbol{E}$ は磁束密度を右ネジの向きにみるとき正の向きにとった。この誘導される電場が円輪上の電荷に及ぼす力は $q\boldsymbol{E}$ である。よって角運動量 $\boldsymbol{L}$ の時間変化率はこの力のトルクであたえられるから $\frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = aqE\hat{\boldsymbol{z}}$。よって角運動量の変化は $\Delta\boldsymbol{L} = \frac{qa^2}{2}(-\Delta B)\hat{\boldsymbol{z}}$。この問題では $\Delta B = -B_0$ であるので求める円輪に加えられた角運動量は $\Delta\boldsymbol{L} = \frac{qa^2 B_0}{2}\hat{\boldsymbol{z}}$。はじめ静止していれば最終の角速度は $\omega = \frac{L}{ma^2}$ より $\omega = \frac{qB_0}{2m}$ となる。)

7.23 磁場が我々の銀河内の星間空間のほとんどの部分に存在する。その磁束密度の大きさがほとんどの領域で 10^{-6} ガウスと 10^{-5} ガウスの間である証拠がある。典型的な値として 3×10^{-6} ガウスを用いてこの銀河の磁場に貯えられている全エネルギーのオーダーを見積もれ。ここで我々の銀河を直径 10^{23}cm、厚さ 10^{21}cm の円盤と仮定して良い。この磁気エネルギーがどれだけのものか見当つけるために我が銀河内の星全部の輻射がおよそ 10^{44}erg/s であることを使ってみよう。星の光の何年分にこの磁気エネルギーは相当するか。 (この円盤の体積は $V = 7.9 \times 10^{60}\mathrm{m}^3$ だから求める磁場エネルギーは $\frac{B^2}{2\mu_0}V = 2.8 \times 10^{47}$J。星の輻射エネルギーとしては 900 年分にしかならない。)

7.24 核磁気共鳴によって全身像影するために設計された超伝導ソレノイドが 0.9m の直径で 2.2m の長さであった。中心での磁場は 0.4T の磁束密度であった。このコイル内に貯えられるエネルギーを大雑把に何 J か見積もれ。 (体積 V は約 $1.4\mathrm{m}^3$ であり、ソレノイド内の磁束密度がどこでも同じであると仮定すると磁場エネルギーは $\frac{B^2}{2\mu_0}V = 9$ 万 J である。)

7.25 中性子星あるいはパルサーの表面での磁束密度の大きさは 10^{12} ガウスにもなると見積もられた。この磁場のエネルギー密度はいくらか。質量とエネルギーが等価であることを使ってこのエネルギー密度を $\mathrm{g/cm^3}$ で表せ。 (エネルギー密度は $4 \times 10^{21}\mathrm{J/m^3}$ でこれを c^2 で割って質量密度に換算すると $44\mathrm{g/cm^3}$ となる。)

7.26 ファラデーは次のように一部が地磁気中を動く水でできている回路に誘導される電流を測定する不成功だった実験を述べている。:

私は Waterloo Bridge で 960 フィートの銅線を橋の欄干上に伸ばしてその両端から金属の大きな板をつ

けてこれを下げて水に浸けて実験を行なった。よって導線と水で 1 つの伝導回路を作った ; そして潮流に

よる水の干満につれて真鍮球のときと同じような電流が得られると期待した。私はいつも検流計の指針の

振れを見ていたが、振れは不規則でねらっていたのとは別の理由によるようであった。川の両端の水の純

度の差 ; 温度差 ; 使ったハンダの違いとかねじれやその他により生ずる接触による板の微妙な違い ; 同

様に生じたあらゆる効果 ; 中間のアーチだけを通る水を使って実験してはみたが ; 銅の代わりに白金板

を使ってみたりしたが ; その他ありとあらゆる予防策をとってみたが、3 日にわたっても何にも納得の行

く結果が得られなかった。(”Experimental Researches in Electricity.” vol. I, London, 1839, p.55)

地磁気の磁束密度の垂直成分を 0.5 ガウスと仮定し、テームズ川の潮流の速さについてもっともだと思われる値を推測してファラデーが見つけようとした誘導電圧の大きさを見積もれ。 (銅線の長さ ℓ =960 フィートはおよそ 290m である。潮流の速さを v、磁束密度の下向き成分を B とする。誘導電場の大きさは $E = vB = 5 \times 20^{-5} v\mathrm{V/m}$ となるので、この大きさが一定であるとの仮定のもとに誘導電圧は $V = E\ell = 14.5v\,\mathrm{mV}$ となる。Problem7.12 の 2 ノットの値である $v = 1\mathrm{m/s}$ のとき $V = 15\mathrm{mV}$、$v = 0.5\mathrm{m/s}$ のとき $V = 7\mathrm{mV}$ となるから、およそ 10mV 前後の誘導電圧が期待されよう。)

7.27 電圧計を線積分 $\int \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{s}$ を (+) 端子から (-) 端子へ進む経路 C 上にそって測定する器具として考えることができる。経路 C は電圧計の中を通る線である。経路 C はまた (-) 端子から (+) 端子までの外部経路で完成する閉回路の一部と考えても良い。その事を考慮に入れて図の配線を考えよ。ソレノイドは長いので外部磁場は無視できる。その断面積は $20\mathrm{cm}^3$、内部の磁束密度の向きは右向きで 100gauss/s の割合で増大している。2 つの同じ電圧計がソレノイドと 2 つの 50Ω の抵抗を囲む閉回路上の各点に図示したように接続されている。電圧計は μV 単位で測定でき大きな内部抵抗を持つ。各電圧計の測定値はどれだけか。その答えが Eq.25 と完全に合致していることを確かめよ。 (ソレノイドの誘導起電力は $\mathcal{E} = -20\mu\mathrm{V}$。図の 4 つのクリップ端子にア、イ、ウ、エと符号付けしよう。上側の抵抗の左端につながっている端子をア、上側の抵抗の右端につながっている端子をイ、そして下側の抵抗の左端につながっている端子をウ、下側の抵抗の右端につながっている端子をエとする。ア → イ → ウ → エ → アなる閉回路に流れる電流は直列つなぎの 2 個の抵抗により $20\mu\mathrm{V}/(50+50)\Omega = 0.2\mu\mathrm{A}$。上側の電圧計の (-) 端子に接続されているアの電位の方が (+) 端子に接続されているイの電位より $0.2 \times 50 = 10\mu\mathrm{V}$ だけ高い。よって上側の電圧計の表示は $-10\mu\mathrm{V}$ となる。一方下側の電圧計の (+) 端子に接続されているエの電位の方が (-) 端子に接続されているウの電位より $0.2 \times 50 = 10\mu\mathrm{V}$ だけ高い。よって下側の電圧計の表示は $10\mu\mathrm{V}$ となる。)

7.28 良導体の中での磁場は急速に変化することができない。簡単な誘導回路の電流が時定数 L/R で指数関数的に減衰することがわかった (Eq.66)。地球の金属芯のような巨大な伝導体では”回路”は簡単には特定できない。けれどもいくつかのあり得べき近似のもとに崩壊時間のオーダーとそれが何によるかが分かるときがある。伝導率 $\sigma\,(\Omega \cdot \mathrm{m})^{-1}$ の物質でできた四角い断面の固体リング型を考えよう。その中を電流 I が流れている。もちろん I は断面全体にひろがっているはずだが、ここでの抵抗が面積が a^2 で長さが πa の導線の抵抗、つまり $R \approx \pi/a\sigma$ であると仮定しよう。磁束密度 B については電流 I の流れている半径 $a/2$ の円環の中心の値を使う。貯えられているエネルギー U は $B^2/2\mu_0$ とリング型の体積の積で近似できるとしても良いだろう。$dU/dt = -I^2R$ であるからエネルギー U の減衰時間は $\tau \approx U/I^2R$ である。近似法によって変わり得るいくつかの数係数は別にすると、$\tau \approx \mu_0\sigma a^2/2$ となることを示せ。地球の芯が 3000km で、地球の伝導率が室温での鉄の値のおよそ 1/10 である $10^6\,(\Omega \cdot \mathrm{m})^{-1}$ であると思われている。τ は何世紀であるか。 ($B = \frac{\mu_0 I}{a}$ を $U = \frac{1}{2\mu_0} B^2\,\pi a^3$ に代入し

て $U=\frac{\mu_0}{2}\pi aI^2$ を得る。これより I^2 が U で表せる。よって $\frac{dU}{dt}=-\frac{2}{\mu_0\sigma a^2}U=\frac{U}{\tau}$。数値を代入すると $\tau=\mu_0\sigma a^2/2=1800$ 世紀と地球の年齢よりずっと短い値が得られてしまう。)

7.29 Maxwell の方程式に現れる定数 c を低周波の場だけを含む電気実験で決定することができる。図示した回路を考えよ。コンデンサーの極板間に働く力は同じ方向に流れる電流の通っている平行な導線間の力とつりあっている。周波数 fHz での正弦的振動交流電圧が平行極板コンデンサー C_1 とコンデンサー C_2 にかけられている。C_2 から出入りする電荷によって円輪中の電流が作られる。C_2 および含まれる色々な距離を調節して C_1 の上側の極板に働く下向きの力の時間平均の値と上側の円輪に働く下向きの力の時間平均値が正確につりあっている。(もちろん電圧をかけないときにこの二つの重さをつりあうように調節しておかなければならない。) こうした条件の下で定数 c が測定量から次のように計算できることを示せ。:

$$c=(2\pi)^{3/2}a(\frac{b}{h})^{1/2}(\frac{C_2}{C_1})f \quad (\mathrm{m/s})$$

二つの電気容量 C_1 と C_2 との比の測定以外には距離と時間 (または周波数) だけの測定が必要になることに留意せよ。結果には分かるように電気的単位は現れない。(C_2 が C_1 の例えば 10^6 倍で電流の流れる円輪が小電流の効果を増幅するように数回巻きにしてあれば 60Hz 位い低い周波数でもこの実験はできる。) (C_1 の上側の極板に働く下向きの力を $F_e(t)$ とする。極板に働く電場の圧力は Problem 3.16 の考察と同じで $\frac{1}{2}\epsilon_0 E^2=\frac{1}{2}\epsilon_0(\frac{\mathcal{E}_0\cos 2\pi ft}{s})^2$。極板面積は πa^2 だから $F_e(t)=\frac{\epsilon_0\pi a^2\mathcal{E}_0^2\cos^2 2\pi ft}{2s^2}=\frac{C_1^2\mathcal{E}_0^2\cos^2 2\pi ft}{2\epsilon_0\pi a^2}$。(ここで $C_1=\epsilon_0\frac{\pi a^2}{s}$ を使った。) 振動の周期 T は $T=\frac{1}{2\pi f}$ であり、一周期にわたる $F_e(t)$ の平均値は $\bar{F}_e=\frac{\int_t^{t+T}F_e(t)dt}{T}=\frac{C_1^2}{4\epsilon_0\pi a^2}\mathcal{E}_0^2$ とあたえられる。次にこの平均値と等しくなる上側の円輪に働く下向きの力の時間的平均値を求める。時刻 t において C_2 に貯えられている電荷 $Q(t)$ は $Q(t)=C_2\mathcal{E}_0\cos 2\pi ft$。上方から上の円輪を真下にみたとき左回りに流れる電流は $I(t)=-\frac{dQ(t)}{dt}=2\pi fC_2\mathcal{E}_0\sin 2\pi ft$ と表される。このとき下側の円輪にも平行に同じ向きの同じ大きさの電流が流れている。$h\ll b$ のとき同一方向に電流 I が間隔 h で流れるとき、電流間に働く引力の大きさは単位長さあたり $\frac{\mu_0 I^2}{2\pi h}$ であった (Chapter6 の Eq.7' を見よ。)。上側の円輪に働く力の大きさ $F_m(t)$ は近似的に円輪の長さ倍した $F_m(t)=\mu_0\frac{b}{h}C_2^2(2\pi f\mathcal{E}_0)^2\sin^2 2\pi ft$ となる。この力の時間的平均値は $\bar{F}_m=2\pi^2 f^2\mu_0\frac{b}{h}C_2^2\mathcal{E}_0^2$ となる。この実験の条件は $\bar{F}_e=\bar{F}_m$ である。この条件式と $\epsilon_0\mu_0=\frac{1}{c^2}$ を用いて $c=(2\pi)^{3/2}a(\frac{b}{h})^{1/2}\frac{C_2}{C_1}f$ を得る。)

7.30 図で示した導線の閉回路を考えよう。この閉回路を通りぬける $\boldsymbol{B}$ による磁束を計算したい。閉回路を境界線とする 2 つの面を (a) と (b) で示した。2 つの面の本質的な違いは何か。どちらが磁束を求める面積分 $\int\boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{a}$ を実行するのに用いられる正しい面であるか。3 回巻きのコイルのときの正しい面を書いてみよ。N 回巻きの固く巻いたコイルでは起電力が同じ大きさの同じ形状の 1 回巻きの環の起電力のちょうど N 倍であることを示せ。 ((a) の面は表裏の区別があるが、(b) の面はその区別がない。よって (a) の面を用いるべきである。3 回巻き、N 回巻きは各自考えてみよ。)

7.31 この問題でダイナモなる言葉は次のように働く発電機について使われる。何か外部の仕掛けにより例えば蒸気タービンの軸で導体が磁場内を運動させられて導体自身が一部になっている回路に起電力が誘導される。磁場の源はこの起電力により回路に流させられる電流である。電機技術者はこれを自励直流発電機という。最も簡単なダイナモの例が図に描かれている。それには本質的な部分は 2 つしかない。一つは回転させられる金属の固体円盤と軸である。もう一つは静止しているが滑らかな接点、またの名を”ブラシ”という接点で回転している円盤の軸および縁に接触している 2 巻きの”コイル”である。図示された二つの装置のいづれかが (潜在的な) ダイナモである。他はダイナモではない。どっちの図がダイナモか。この問題の答えは右手系、左手系とか電流の向きの取り方の約束には関係がないことに注意せよ。知的 ET は図の矢印を見ただけで答えられるはずである。このダイナモ

で何が電流の向きを決めるだろうか。電流の大きさは何から決まるだろうか。 (電流が上下のコイルで真上から見て右回りのとき導体円盤では中心から外に向かって電流密度が向かなければ閉回路はできない。この 2 つのコイルを流れる電流により生ずる磁束密度は下向きのはず。導体円盤内の電荷 q に働く力は $q\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}$ であり、この力によってこの電荷は中心から外へ動かなければならない。こうなる $\boldsymbol{v}$ は円盤を真上から見たとき時計回りになっていなければならないので右側の図がダイナモを表している。電流の向きが逆の場合は閉回路を作るためには円盤内で外から中心に向かって電流が流れなければいけない。このとき $\boldsymbol{B}$ は上向きにできている。$q\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}$ なる力が中心向きになるにはやはり円盤は上から見て時計回りの回転でなければならず、やはり右図がダイナモになっている。)

7.32 前問のようなダイナモにはある臨界角速度 ω_0 がある。円盤が ω_0 より小さい角速度で回転したときは何事も起こらない。この臨界角速度を越えたときだけ誘導起電力 $\mathcal{E}$ が大きくて大きな電流を生じさせてその大きさの $\mathcal{E}$ を誘導するのに充分な強い磁場を作ることができる。臨界角速度は導体の形状と伝導率 σ だけに依る。$\mu_0\sigma$ が SI 単位系では $\mathrm{m}^{-2}\,\mathrm{s}^{-1}$ であることを思い出そう (訳注: これを示せ。)。d を前問の例では円盤の直径というようなダイナモの大きさを表す特徴的次元量としよう。次元解析により ω_0 が $\omega_0 = K/\mu_0\sigma d^2$ なる式で表されることを示せ。ここで K はダイナモの各部品の配置と相対的な大きさだけで決まる無次元の数である。すっかり銅でできている手ごろなサイズのダイナモでは臨界角速度 ω_0 には到達しない。何の手助けも無くコイル内の電流が作るよりずっと強い磁場をもたらす通常の直流発電機を作れるのが強磁性体である。d がメートルではなく何百キロメートル単位の地球規模のダイナモでは臨界角速度はずっと小さくなる。地球の磁場はほとんど確実に金属の流体芯内の運動による非強磁性体のダイナモで作られている。その流体は溶融している鉄ではあるが、温度が高すぎるのでまったく強磁性にはなっていない。このことは Chapter 11 で説明する。 (I なる電流が距離 d のところに作る磁束密度の大きさは $B = \mu_0 I/d$ であり、この磁場内を $v = \omega_0 d$ なる速度で動く導体には起電力 $\mathcal{E} = vBd = \mu_0 I\omega_0 d$ が誘導される。導体の抵抗のオーダーは $R = 1/\sigma d$ であたえられる。$\mathcal{E} = RI$ と誘導起電力の式から抵抗を消去すると $\omega_0 \propto 1/\mu_0\sigma d^2$ が得られる。)