以下の訳では、cgs 系であたえてある問題を適当に国際単位系 (SI 系) に変えて訳している。
CHAPTER FIVE

5.1 間隔 2cm の 2 枚の長方形からなる平行平面板コンデンサーがある。板の東西方向の長さは 20cm、南北方向の長さが 10cm である。これを 300V の電源で充電した。陰極にはどれだけ余剰電子があるか。 また極板間の電場の大きさはいくらか。 電極の静止系から見て東に $0.6c$ の速さで進む系から見た以下の諸量を求めよ。: コンデンサーの縦、横、高さの大きさ : 陰極上の余剰電子数: 極板間の電場の大きさ。 さらに上方に $0.6c$ の速さで進む系ではこれらの値はどうなるか。 (余剰電子数は $1.67 \times 10^{10}$ 個、極板間の電場の強さは $1.5 \times 10^4$V/m、東に進む系からみたとき)

5.2 直径 0.01cm、長さ 4cm のナイロンひもの表面に一様に $5.0 \times 10^8$ 個の余剰電子がある。以下の 2 系での表面上の電場の大きさを求めよ。:
(a) ひもの静止系 $(7.19 \times 10^5$V/m) (b) ひもに平行に速さ $0.9c$ で動いている系 $(1.65 \times 10^6$V/m)

5.3 $0.05\mu$A の電流を作っている 9.5MeV($= 9.5 \times 10^6$eV、$\gamma = 20$) の電子ビームが真空中を進行している。このビームの進行方向と直交する方向のひろがりは 1mm 以下である。そしてまわりに正電荷はない。
(a) 実験室系でビームの直交方向に 1cm 離れたところの電場の大きさを求めよ。またビームの軸方向にみたとき相次ぐ電子間の平均距離はいくらか。 (電子の個数線密度を $\lambda$、電子の速度を $v$ とすると電流は $I = \lambda ev$。電場 $E = \frac{\lambda e}{2\pi\epsilon_0 r} = 2.88 \times 10^{-4}$V/m, 平均距離 1mm)
(b) 同じ問題を電子の静止系でみたらどうなるか。 $(E/\gamma = 1.44 \times 10^{-5}$V/m)

5.4 y 方向を向いている一様な電場内に x 方向の速さ $0.8c$ で入射した荷電粒子の軌道を考えよう。その x 方向の速さは実際には減少しなければならないことを示せ。運動量の x 成分はどうか。(運動量 $\boldsymbol{p}$、速度 $\boldsymbol{v} = c^2\boldsymbol{p}/\sqrt{p^2 + m_0^2c^2}$、電荷 $q$、静止質量 $m_0$ の粒子の電場 $E$ 内の運動方程式を運動量 $\boldsymbol{p} = m_0\boldsymbol{v}/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ で書くと $\dot{p}_x = 0, \dot{p}_y = qE$。よって $p_x = 4m_0c/3, p_y = qEt$。$v_x = 4m_0c^2/\sqrt{25m_0^2c^2 + 9q^2c^2t^2}$, よって $\dot{v}_x < 0$)

5.5 系 F に一様な電荷表面密度 $\sigma$ の帯電平面板が固定されている。この平面板は xy 面と yz 面のなす角を二等分している。もちろんできる電場は平面板と直交する方向である。系 F の x 方向に速さ $0.6c$ で動く系 F' にいる観測者にはどうみえるだろうか。系 F' での電荷表面密度 $\sigma'$ はいくらか、また電場の方向と大きさはどうか。電場は平面板と直交するか。 $(\sigma' = \sigma/\sqrt{0.82} \approx 1.1\sigma$, $\boldsymbol{E}' = (E_x, 0, \gamma E_z)$ 板の傾きは $dz'/dx' = \gamma dz/dx = \gamma = 1.25$ 電場は平面板と直交しない。)

5.6 衝突ビーム貯蔵型リングで東向きの反陽子が最近接距離 $10^{-8}$cm で西向きの陽子のそばを通り過ぎた。実験室系でそれぞれの粒子の運動エネルギーが $\gamma = 100$ に対応する 93GeV($= 93 \times 10^9$eV) であった。陽子の静止系では反陽子の作る電場の陽子の位置での最大強度はいくらになるか。この電場が最大値の半分を超えている時間はおよそいくらか。 $(\beta = \sqrt{1 - 1/\gamma^2} \approx 1 - \frac{1}{2} \times 10^{-4}$。陽子の静止系での反陽子の速さ/光速の値は $\beta' = \frac{2\beta}{1+\beta^2}$)。よって陽子 P から反陽子 $\bar{\mathrm{P}}$ の軌道におろした垂線の足を O とすると PO$= d$、$\angle\mathrm{OP\bar{P}} = \phi'$ と書いて (12) 式から $E' = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 d^2}\frac{1-\beta'^2}{1-\beta'^2\cos^2\phi')^{3/2}}\cos^2\phi'$ が得られる。最大電場は $E'_{max} = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 d^2}\frac{1-\beta'^2}{(1-\beta'^2)^{3/2}} = 2.88 \times 10^{15}$V/m、$E'(\phi') = E'_{max}(\frac{1-\beta'^2}{1-\beta'^2\cos^2\phi'})^{3/2}\cos^2\phi' \approx E'_{max}[1 - (\frac{3}{2}\frac{\beta'^2}{1-\beta'^2} + 1)\phi'^2] \geq E'_{max}/2$ を解くと $|\phi'| \leq \frac{1}{\sqrt{10}\gamma^2}$ となるので求める時間は $\frac{1}{\sqrt{10}\gamma^2}2d\frac{1}{c\beta} \approx 2 \times 10^{-23}$sec)

5.7 我々が知っている最高エネルギーの荷電粒子は宇宙からやってくる宇宙線粒子である。この 1 次宇宙線粒子は運動エネルギーがとても大きいので大気中で 2 次粒子からなる巨大シャワーを作りたまには $10^{19}$eV(1J 以上) ものエネルギーを失ってしまうことがある。1 次宇宙線粒子はおそらく陽子だろうが $\gamma \approx 10^{10}$ にもなってしまうはずである。こんな陽子が通過するとき電場が 1V/m にもなる範囲を求めよ。 (距離 $r$m のところを通過したとき、$1\mathrm{V/m} = \gamma\frac{e}{4\pi\epsilon_0 r^2}$ が条件となるので $r = 3.8$m)
この範囲のパンケーキ状の電気力線分布の厚さはどのくらいか。 (前問と同様にして (12) 式を用いて $|\phi| \le \frac{1}{\sqrt{3}\gamma}$ を得るのでその厚みは $2\frac{3.8}{\sqrt{3}\gamma} \approx 4\times10^{-8}$cm)
(訳注: パンケーキ状とは中央付近がもりあがり両端は薄くなっている形である。また 2 次粒子とは大気中の原子核と宇宙線粒子が衝突した際、生成される粒子のこと。観測される荷電 2 次粒子の数が多数で、入射宇宙線の方向に沿う 2 次粒子の飛跡群がまるでシャワーのようにみえるので巨大シャワーと名づけられている。)

5.8 実験室系の原点に陽子が時刻 $t = 0$ で静止している。そのとき $0.6c$ の速さで x 軸方向に動いてきた負荷電パイオンが $x = 0.01$cm の地点にきた。このパイオンに働く力の大きさを求めよ。陽子に働く力も求めよ。ニュートンの第 3 法則はどうなっているか。 (パイオン ($\pi$) に働く力 $-2.3\times10^{-20}$N、陽子 (P) に働く力 $1.47\times10^{-20}$N、電場のもつ運動量を含まずに $\pi$ と P の 2 体系として考えているだけでは作用反作用の法則はなりたたない。)

5.9 高電圧陰極線オッシロスコープ内にある偏向極板が 2 枚のたて 4cm、よこ 1.5cm の長方形板で間隔 0.8cm であるという。極板間の電位差が 6000V になっているとき、250kV の電位差で加速された電子が左方から極板間の中間点に極板方向と平行に入射した。極板の右端から出て行く回折電子の位置と運動方向を知りたい。ここで縁の電場の乱れを無視し極板間の電場は一様であると仮定する。電子の静止質量を 500KeV とおいて良い。まず実験室系で次の諸量を求めよ: $\gamma = ?$ (3/2): $\beta = ?$ ($\sqrt{5}/3$): $mc$ を単位としての $p_x = ?$ ($\sqrt{5}/2$): 極板間の滞在時間 =? (Problem5.4 で問題にした水平方向の速度の変化は無視せよ。) ($1.79\times10^{-10}$sec): 出口での速度の直交方向成分 =? ($1.61\times10^{7}$m/s): 出口での垂直変位 =? (0.144cm): 出口での飛行方向 ? (入射方向から $4.13^\circ$ 曲がった方向)
つぎに偏向領域に入る際の電子と共に動く慣性系で考えよう: 極板はどうみえるか ? : 極板間の電場はどうみえるか ? : この座標系で電子はどう記述されるか ?
この問題の主眼点は 2つの記述がたがいに矛盾していないことを確認することである。

5.10 電気量 $q_1$ をもつ粒子 1 の静止系で電気量 $q_2$ をもつ粒子 2が光速度 $c$ と比しても小さくない速さ $v$ で近づいてくる。この粒子が直線上を動き続けるのなら、粒子 1 からの距離 $d$ のところを粒子 2は通過するはずである。粒子 2は大変重いので、粒子 1 と出会っても直線からのずれは $d$ と比べて小さい。同様に粒子 1 もとても重く粒子 2が付近を通っても最初いた場所からのずれは $d$ に比べて小さい。
(a) 2つの粒子の遭遇によって各粒子が得る運動量の増分ベクトルは $\boldsymbol{v}$ と直交方向で、大きさが $q_1q_2/2\pi\epsilon_0 vd$ であることを示せ。(ガウスの法則がここで使える。) (粒子 2の進行方向を x 方向とする。直交方向を y 方向とする。粒子 i(=1,2) の電荷を $q_i$、運動量を $\boldsymbol{p}_i(t)$、この粒子が他方の粒子がある場所に作る電場を $\boldsymbol{E}_i$ とする。$p_{2y}(\infty) = q_1\int_{-\infty}^{\infty}E_{1y}dt = \frac{q_2}{v}\int_{-\infty}^{\infty}E_{1y}dx$。ところで直径 $2d$ の長い円筒面をガウス閉曲面としてガウスの法則を使うと $\int \boldsymbol{E}_1\cdot d\boldsymbol{a} = 2\pi d\int_{-\infty}^{\infty}E_{1y}dt = \frac{q_1}{\epsilon_0}$ だから $p_{2y}(\infty) = \frac{q_1q_2}{2\pi\epsilon_0 d}$。同様にして $p_{2x}(\infty) - \gamma m_2 v = \frac{q_2}{v}\int_{-\infty}^{\infty}E_{1x}dx = 0$。$\boldsymbol{p}_1$ についても同様にして考えれば良い。)
(b) ここでの仮定が成立するためには粒子の質量はどの程度大きくなければならないか。他の量で表せ。

5.11 Fig5.18 の説明にある球形の caps のそれぞれを通り抜ける $E$ の電束を求めるための積分を計算

して Eq.13 を導出せよ。内側の cap 上では電場の大きさは一定であり面積要素は $2\pi r^2 \sin\theta d\theta$ である。外側の cap 上での電場は記号を合うように直した Eq.12 であたえられて面積要素は $2\pi r^2 \sin\phi d\phi$ である。必要な積分は

$$\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^{3/2}} = \frac{x}{a^2(a^2+x^2)^{1/2}} \tag{1}$$

である。 ($\int_0^{\theta_0} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} 2\pi r^2 \sin\theta d\theta + \int_{\phi_0}^{0} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r'^2} \frac{1-\beta^2}{(1-\beta^2\sin^2\theta)^{3/2}} 2\pi r'^2 \sin\theta d\theta = 0$ より示せる。)

5.12 Eq.12 であたえられる動いている電荷 $Q$ の作る電場の中で、$Q$ からでる全電束の半分が錘面 $\theta' = \frac{\pi}{2}+\delta$ と錘面 $\theta' = \frac{\pi}{2}-\delta$ の間に含まれるような角度 $\delta$ をもとめよ。Problem5.11 を解いてしまったのならばこの問題をやったも同然である。さらに $\gamma \gg 1$ なるとき 2 つの円錐のなす角はほぼ $1/\gamma$ であることも示せ。 ($\epsilon_0 \int_{\pi/2-\delta}^{\pi/2+\delta} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{1-\beta^2}{(1-\beta^2\sin^2\theta)^{3/2}} 2\pi r^2 \sin\theta d\theta = \frac{1}{2}Q$ を解けば良い。左辺の定積分を実行すると $2\sin\delta = \sqrt{1-\beta^2+\beta^2\sin^2\delta}$ が得られる。よって $\delta = \sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{3\gamma^2+1}}$。$\gamma \gg 1$ なるとき円錐の頂角 $2\delta$ は $\frac{2}{\sqrt{3}\gamma}$ である。)

5.13 図には時刻 $t = 0.0$ での一個の電子とそれに伴う電場を描いてある。距離は cm 単位で示した。
(a) なぜこうなったかできるだけ完全かつ定量的に述べよ。 ($0.8c$ の速さで左から x 軸上を進んできた電子が止まってから $5\times10^{-10}$ 秒後の図である。)
(b) $t = -7.5\times10^{-10}$ 秒の時刻での電子の位置はどこであったか。 ($x = -6.0$cm)
(c) その時刻のとき原点での電場の強さはいくらだったか。 ($E = 1.44\times10^{-7}$V/m)

5.14 図は左から超相対論的な正電荷粒子が、右からは負電荷粒子がそれぞれ原点に同じ速さで近づいてきたところを示している。2 つが $t = 0$ に原点でぶつかってそれぞれの運動エネルギーを消費して中性になり原点にとまってしまった。$t > 0$ で電場はどうなるか。電気力線を描いてみよ。時間経過と共に電場はどう変わっていくか。 (半径 $r = ct_1$ の球内の電場は打ち消してしまう。時刻 $t_1$ 秒後には半径 $r = ct_1$ のところに密集した電気力線が残る。時間が経つにつれこの半径は光速で遠ざかる。)

5.15 Fig.5.20 は黒点と白点の相対的間隔が $\gamma = 1.2$ と $\beta_0 = 0.8$ であるように描かれている。$\beta_0'$ を計算せよ。試験電荷の静止系での正味の電荷密度 $\lambda'$ を $\lambda_0$ で表せ。 ($\beta_0' = 0.44$、$\lambda' = 0.53\lambda$)

5.16 Fig.5.20 の試験電荷が電子の速度 $v_0$ と同じ速度を持っていたとせよ。このとき試験電荷の静止系で正電荷線密度および負電荷線密度はどうなるか。 (正電荷線密度は $\lambda_0\gamma_0$、負電荷線密度は $-\lambda_0/\gamma_0$)

5.17 実験室系で 2 つの陽子が距離 $r$ だけはなれてたがいに平行に同じ速度 $\beta c$ で動いている。一方の陽子の位置での他方の陽子による電場は Eq.12 にしたがって実験室系では $\gamma e/4\pi\epsilon_0 r^2$ となる。しかしながら実験室系でその陽子に働く力は $\gamma e^2/4\pi\epsilon_0 r^2$ ではない。このことをその陽子に働く力を陽子の静止系で求めてさらに実験室系の力に変換することにより証明せよ。さらに実験室系を動くとき生ずるちょうど電場の $\beta/c^2$ 倍の大きさの磁束密度があればこの差が説明できることを示せ。

5.18 各々別の速度で動いている何種類かの担体からなる直線上電荷分布を考えよう。系 F では $k$ 番目の荷電体の電荷線密度が $\lambda_k$ であり速度が直線と平行に $\beta_k c$ であるとする。この系でのこの荷電体の電流への寄与は $I_k = \lambda_k\beta_k c$ である。系 F からみて直線方向に $-\beta c$ の速度で動いている系 F' での

電荷および電流へのこの荷電体 $k$ の寄与をもとめよ。Fig.5.20 での変換をたどって、

$$\lambda'_k = \gamma(\lambda_k + \frac{\beta I_k}{c}) \qquad I'_k = \gamma(I_k + \beta c\lambda_k) \tag{2}$$

を示せるはずである。各成分の電荷線密度と電流がこう変換するのであれば全体も当然、次のように変換するはずである。

$$\lambda' = \gamma(\lambda + \frac{\beta I}{c}) \qquad I' = \gamma(I + \beta c\lambda) \tag{3}$$

つまり成分がなんであれ任意の線密度と電流についての平行移動観測系のローレンツ変換則をここで導出できたことになる。

5.19 陽子が原点に向かって速度 $v_x = -c/2$ で x 軸上を動いている。原点でとても重い原子核と弾性衝突しほぼ同じ速度で x 軸上を戻っていった。この陽子が原点に到着してから $10^{-10}$ 秒後のこの陽子の作る電場の様子を描け。

5.20 z 軸上の $z = a$ なる位置に陽子がとまっている。x 軸上に $\mu^-$ 粒子 (負荷電 muon) が速さ $0.8c$ で動いている。この系で $\mu^-$ が原点を通過する時刻でのこの 2 粒子の作る全電場を考えよ。この時刻で x 軸上の点 $(a, 0, 0)$ における $E_x$ と $E_z$ の値はどうか。 ($E_x = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 a^2}(\sqrt{2}/4 - 0.36)$、$E_z = -\frac{e}{4\pi\epsilon_0 a^2}\sqrt{2}/4$)

5.21 高電圧オッシロスコープの電子源は陽極およびそのさきにある陽極孔を取り囲む領域との電位差が-125kV の陰極である。この領域の中に x-方向 (電子ビームの方向) の長さが 5cm の 2 枚の平行極板が y-方向に 8mm の間隔で設けられている。電子は微小速度で陰極を離れて陽極向きに加速され、その後、下板の電位が-120V で上板の電位が 120V となっているときの偏向板の間を通る。
以下の空欄を埋めよ。電子の静止質量を $5 \times 10^5$eV といったように種々の定数を丸めて用いよ。
電子が陽極に着いたときその運動エネルギーは (1)________ eV でその質量は (2)________ 倍だけ増えていて速度は (3)________ $c$ である。その運動量は (4)________ kg·m/s である。陽極を通り過ぎると電子は平行金属板の間を通る。極板間の電場は (5)________ V/m である。; 電子に上向きに働く力は (6)________ N である。電子は (7)________ 秒間ほど極板間ですごし y 方向の運動量の大きさ $p_y =$(8)________ kg·m/s を持って現れる。このとき電子の軌道は上向きに角 $\theta =$(9)________ ラジアン傾いている。
電子が陽極を通過するときたまたま電子と一緒に動いていた高速中性子はその後の出来事を次のように報告した。: "コンデンサーが我々に向かって (10)________ m/s でとんできたとき我々はそこに座っていた。このコンデンサーは (11)________ m の長さであって我々は (12)________ 秒間取り囲まれた。私はコンデンサーに煩わされなかったが、(13)________ V/m の電場が電子を加速してコンデンサーが通り過ぎた後で電子は私から (14)________ m/s で行ってしまった。" ((1)$1.25 \times 10^5$ (2)1.25 (3)0.75 (4)$2 \times 10^{-22}$ (5)$4.8 \times 10^3$ (6)$5.9 \times 10^{-16}$ (7)$6.1 \times 10^{-10}$ (8)$5.8 \times 10^{-24}$ (9)$2.9 \times 10^{-2}$ (10)1 (11)0.04
(12)25 (13)6000 (14)$6.6 \times 10^6$ )