CHAPTER FOUR

4.1 2 価の正イオンが 1cm^3 あたり 5×10^{10} 個あり、すべて速さ 10^7cm/sec で西に動いている。 同じ領域で 1cm^3 あたり 10^{11} 個の電子が 10^8cm/sec の速さで北西に動いている。(どうやって動かしたかは問わない。) Jの方向はどうか。その大きさは何 A/m^2 か。 (西から 41 度南へ向いた方向で 1.7×10^4A/m^2)

4.2 6 ギガエレクトロンボルト (GeV) の電子シンクロトロン加速器の中で全長 240m のほぼ円軌道上を電子がまわっている。普通は 1 サイクルの加速中におよそ 10^{11} 個の電子がまわる。電子の速さは事実上光速度になっている。電流はいくらか。この簡単な問題をやるのは輸送率として電流を定義する際に電荷の担体の速度が非相対論的であることを要求していないことと 1 秒間に与えられた荷電粒子が何回も電流の一部として数えてはいけないという規則はないことを強調したいからである。 ($I = nN_e e/.\{n \to 1.25\times10^6$ 周/sec,$N_e \to 10^{11}$ 個,$e \to 1.6\times10^{-19}\}C=$ 20mA)

4.3 ヴァンデグラフ静電起電機で 30cm 幅のゴムベルトが 20m/s で動いている。このベルトには下部のローラーで面電荷が与えられ、ベルトの両面で 1.2×10^6V/M の電場が生ずるようになっている。電流は何 mA か。(0.13mA)

4.4 初めて電信が 1858 年にニューファウンドランドとアイルランド間に敷かれた 3000km の長さのケーブルを伝って大西洋を横断した。このケーブルの導体は絶縁体で鎧装された直径 0.73mm の銅線が 7 本しっかり束ねられていた。
(a) 導体の抵抗を計算せよ。ここで純度のはっきりしない銅の抵抗率を $3\times10^{-6}\Omega\cdot$cm として使え。(一本のケーブルの抵抗は抵抗率 ρ、長さ L、断面積 A で表すと $\rho L/A$、7 本並列では 30000Ω)
(b) 電流の復路は海洋自体であった。海水の抵抗率が約 25Ω·cm であるとして、復路の海洋の抵抗がケーブル線の抵抗よりずっと小さかったことを示せ。($R_{sea} = \rho_{sea}L/A_{sea}$、ここで海中を流れる電流の広がりは 30000Ω になる値 24m^2 よりずっと広がっているから)

4.5 Fig.4.6 の 2 つの金属接合面での全電荷は $\varepsilon_0 I(1/\sigma_2 - 1/\sigma_1)$ であることを示せ。ここで、I[A] は接合面を流れる電流であり、伝導率 σ_1、σ_2 は 1/Ω·m を単位とする値である。(Ohm の法則より $E_1 = J/\sigma_1, E_2 = J/\sigma_2$、求める電荷を Q とすると接合面-断面積 A-を取り囲むガウス閉曲面を考えてガウスの法則を使うと $E_2A - E_1A = Q/\varepsilon_0$、$JA = I$ なる電流の定義を用いればよい。)

4.6 純粋な錫 Sn を型に通して直径を 25% 減らし長くした。抵抗はどのくらいの割合で増えたか。そしてさらにリボン状に平らにして巻いて長さを 2 倍にした。抵抗はどう変わったか。ここでこの間、密度と抵抗率は変わらなかったとせよ。 (4 倍)

4.7 100Åの厚さの銀と 200Åの厚さの錫を層状に積み重ねて薄い導体を作った。巨視的に見ると材質は一様に見えるかもしれないが、層面と直交する向きの電流に対する伝導率 $\sigma_\perp$ と面に平行な向きの電流の場合の伝導率 $\sigma_\parallel$ が異なる非等方な物質になっている。銀の伝導率が錫の伝導率の 7.2 倍であるとして比 $\sigma_\perp/\sigma_\parallel$ を求めよ。 (銀および錫の厚さをそれぞれ L_1、L_2 とする。断面積 A なる面と直交する電流に関して、直列接続の 2 つの抵抗の合成抵抗を求めることにより $\sigma_\perp = (L_1+L_2)/(L_1/\sigma_{Ag}+L_2/\sigma_{Sn})$、一方、面と平行に流れる幅 L の電流に関しては銀の抵抗と錫の抵抗は並列つなぎとして働く。$\sigma_\parallel = (L_1/\sigma_{Ag}+L_2/\sigma_{Sn})/(L_1+L_2)$、数値を代入して $\sigma_\perp/\sigma_\parallel = 0.46$)

4.8 1km の長さの銅線に 6V の電池をつないだ。銅の伝導率は $1.7\times10^{-6}\Omega\cdot$cm であり、$1\text{cm}^3$ あたりの伝導電子の数が 8×10^{22} 個である。このとき伝導電子の速さはいくらか。1 個の電子が回路を 1 周する時間はいくらか。 (28μm/sec、14ヶ月)

4.9 地球の大気圏の (太陽紫外光線で解放される) 自由電子の密度は高度約 100km のところで最大値 $10^6/\text{cm}^3$ をとる。この高さでの空気の密度は大変低く電子の平均自由行程はおよそ 10cm である。そこでの温度では電子の平均の速さは 10^7cm/sec である。伝導率はいくらか。($2.8\times10^4/\Omega\cdot$cm)

4.10 液体中のイオンはまわりを中性分子でびっしり囲まれているから、衝突間隔の"自由時間"については何も言えない。しかし Table4.1 の純水の伝導率の測定値を使ってさらに N_+ および N_- に $10^3/\text{cm}^3$ なる値が与えられれば Eq.20 から τ の値がどうなるか調べられるので面白い。水分子の熱運動の典型的な速さは 5×10^4cm/sec である。この時間 τ の間に水の分子はどれだけ進むか。(Eq.20 に値を代入して $\tau_+=\tau_-=\tau$ と仮定すれば $\tau=2.35\times10^{-14}$sec が得られる。よって 1.17μm 進む。)

4.11 海水の電気伝導率はおよそ 25$\Omega\cdot$cm である。電荷の担体は主に Na^+ イオンと Cl^- イオンである。各々 1cm^3 あたり約 3×10^{20} 個ある。長さ 2m のプラスチック管に海水を入れて両端の電極に 12V の電池をつないだときイオンの平均移動速度はいくらか。 ($J=12[\text{V}]\sigma/2[\text{m}]=12[\text{V}](\text{N}_{\text{Na}^+}+\text{N}_{\text{Cl}^-})\text{e}$ より 0.25μm/sec)

4.12 Section4.6 に与えたいくつかの図での純粋なシリコンの 500K での伝導度、伝導電子および正孔ホールの密度を使って衝突の平均自由時間を求めよ。ここでこの時間は電子とホールで同じであると仮定せよ。($\tau_+=\tau_-=\tau$ と仮定。5.3×10^{-13}sec)

4.13 シリコン接合ダイオードでは n-型半導体と p-型半導体間の接合面の近辺は、一方は負に帯電した板、他方は正の帯電板の 2 つをくっつけたものとして近似できるだろう。この電荷層の結合箇所からずっと離れたところでは n-型物質中の電位は ϕ_n、p-型物質中での電位は ϕ_p なる定数である。ϕ_p と ϕ_n の差が 0.3V、2 つの帯電板の厚さが各々0.01cm なるとき、2 つの帯電板中の電荷密度を求めよ。そして接合領域中の位置 x の関数として電位ポテンシャル ϕ のグラフを描け。接合面での電場の強さはいくらか。($x_0=0.01$cm とおき、接合面を $x=0$cm とおく。電荷密度の分布は $x>0$ では ρ、$x<0$ では $-\rho$。ポアソン方程式 $d^2\phi/dx^2=-\rho(x)/\varepsilon_0$ を境界条件 $\phi(x_0)=\phi_p, -d\phi(x_0)/dx=0$、$\phi(-x_0)=\phi_n, -d\phi(-x_0)/dx=0$、$\phi(0_+)=\phi(0_-), d\phi(0_+)/dx=d\phi(0_-)/dx$ のもとで解く。$x_0>x>0$ で $\phi=\phi_p-\rho(x-x_0)^2/2\varepsilon_0$、$0>x>-x_0$ で $\phi=\phi_n+\rho(x-x_0)^2/2\varepsilon_0$、原点で電位の連続性より $\rho=\varepsilon_0(\phi_p-\phi_n)/x_0^2=2.7\times10^{-4}\text{C/m}^3$、$E(0)=-3\times10^3$V/m)

4.14 Eq.(20) と Fig.4.10 に関して、$\tau_+=\tau_-$ および $M_+=M_-=m_e$(m_e は電子の質量) であると仮定しよう。いま $0.3(\Omega\cdot\text{cm})^{-1}$ なる伝導率の値が伝導バンド中の電子密度が $10^{15}/\text{cm}^3$ 個でありまた同密度の正孔があるための結果として得られるとしたとき平均自由時間はいくらか。500K での電子の 2 乗平均速度は 1.5×10^7cm/sec である。この平均自由行程とシリコン原子間距離 2.35×10^{-8}cm を比べよ。 (5.3×10^{-13}sec、平均自由行程は原子間距離のおよそ 300 倍)

4.15 Fig4.6 の左端の回路図の抵抗がすべて 100Ω であるとき、右端の等価回路の抵抗値はいくらか。 (327Ω)

4.16 回路図の R_0 が与えられているとき、左端の端子間の抵抗値が R_0 に等しくなるためには R_1 の値はいくらになるべきか。 ($R_1=R_0/\sqrt{3}$)

4.17 自動車のバッテリーに 0.5Ω の抵抗をつなげたところバッテリーの端子電圧が 12.3V から 9.8V に落ちたという。このときの内部抵抗はいくらか。 (0.13Ω)

4.18 起電力 $\mathcal{E}$、内部抵抗 R_i の電池が可変抵抗 R に接続されたとき、最大の仕事率は $R=R_i$ としたときに

得られることを示せ。 ($\frac{\partial}{\partial R}\frac{R\mathcal{E}^2}{(R+R_i)^2}=0$ を解けばよい。)

4.19 最大表示値 50μA、内部抵抗 20Ω の電流計がある。2 つの抵抗 R_1、R_2 と 1.5V の電池を使ってこの電流計を抵抗計に変えることができる。この抵抗計から出ている 2 つの端子をつなげたとき 0 Ω が最大表示値になっている。正しく目盛をつけると、未知抵抗 R をこの 2 つの端子につなげたとき針の振れで抵抗値が示される。特にここでは最大表示値の半分が 15 Ω の表示であるようにしたい。R_1、R_2 の値はいくらでどう接続したら良いか考えよ。また 5 Ω と 50 Ω の表示はそれぞれ何 μA のところにつけたら良いか。 ($R_1=0.01\Omega$、$R_2=15\Omega$、5 Ω は 37.5μA、50 Ω は 11.5μA)

4.20 3つの抵抗と導線からなるブラックボックスの3端子a、b、cがある。2端子間の抵抗を測って、$R_{ab}=30\Omega$、$R_{ac}=60\Omega$、$R_{bc}=70\Omega$ であることが分かった。このブラックボックスの中はどうなっているか。図のどちらか。この他の可能性がないか。この 2 つのボックスは完全に等価か、さもなくば 2 つの違いを外から区別できる測定法はあるか。 (等価)

4.21 回路図中に 5 つある抵抗は全部 100Ω で、各電池の起電力は 1.5V である。端子 A と B の間の開回路電圧はいくらか。また短絡して得られる電流はいくらか。鳳-テブナン等価回路の $\mathcal{E}_0$ と R_0 を求めよ。 (0.3V、2.5mA、$\mathcal{E}_0=0.3$V、$R_0=120\Omega$)

4.22 右図の回路の 2 端子 A と B に抵抗 R がつながれた。この抵抗での消費電力が最大になる R の値を求めよ。鳳-テブナン等価回路を作り、Problem4.18 の結果を応用して解答せよ。また R での最大消費電力はいくらか。 ($\mathcal{E}_0=60$V、$R=20\Omega$、45W)

4.23 Fig.4.25 の導体物質が n-型シリコンで伝導バンドに 1cm^3 あたり 10^{15} 個の電子があるとする。帯電板の初期電荷密度の値は電場の大きさが 30,000V/m であったとせよ。電気的に中性になって電場がゼロになるためには電子をどれだけ変位させなければならないか。 (1.7×10^{-7}cm)

4.24 Section4.7 の最初の脚注の例として 2 つの端子のある 1 辺が 10cm の立方体のブラックボックスを考えよう。各端子は導線で外部回路と接続されている。他の部分は外部から遮断されている。この回路素子に約 1A の電流が流れている。流れ込む電流と出て行く電流が百万分の一だけ違っていたとしよう。その他には何も起こっていないとしたとき、このボックスの電位を 1000V にあげるのに要する時間はいくらか。($\frac{dV}{dt}=\frac{1}{C}\frac{dQ}{dt}=\frac{10^{-6}[\mathrm{C}]}{C}$、ここで立方体の静電容量 C は内接孤立導体球と外接孤立導体球の容量の間と考えて約 7pF で評価。電位は毎秒 $\frac{1}{7}\times10^6$V 上昇する。よって 7ms。)

4.25 電気容量 C のコンデンサーを抵抗 R をつないで放電した例で、抵抗での消費エネルギーが元々コンデンサーに貯えられていたエネルギーに等しいことを示せ。誰かが Q がゼロになるのは $t=\infty$ であるから本当には決してコンデンサーは放電しきっていないと反対したとしよう。この反対を論破できるか。いくつかの仮定のもとに電荷が電子 1 個分になる時間を計算してみるのもよかろう。 ($C=10^4$pF、$R=100$kΩ の回路に 3V の電源をつなぎ充電してから電源を切って放電したとき電子 1 個分まで電荷が減る時間は 26msec。時定数の 26 倍)

4.26 長さの等しい 2 本の黒鉛棒がある。一つは半径 a の円柱である。もう一つは平行な二面で円錐を切り取ってできる上面の半径 a かつ下面の半径 b の上に行くほど細くなる形の棒である。この棒の上面と下面を接続したときの抵抗値は円柱棒の抵抗値の a/b 倍であることを示せ。 ヒント: 棒は薄い円板を積み重ねてできていると考えよ。 ($R=\frac{\rho}{\pi}\int_0^L\frac{dx}{(a+\frac{b-a}{l}x)^2}$ が高さ L の抵抗である。)

4.27 5 つの抵抗を含む回路網の端子 T_1、T_2 間の等価抵抗 R_{eq} を考えよう。R_{eq} の表式を求めるやり方として T_1 と T_2 間の電位差 V が与えられたとき T_1 を流れる電流を解いて、それから $R_{eq}=V/I$ によって答えを求めるやり方がある。これはたいそう面倒なしかも間違いやすい計算をやらなければならない。そこで大体の答えを教えてしまおう。

$$R_{eq}=\frac{R_1R_2R_3+R_1R_2R_4+?+R_2R_3R_4+R_5(R_1R_3+R_2R_3+?+R_2R_4)}{R_1R_2+R_1R_4+?+R_3R_4+R_5(R_1+R_2+R_3+R_4)}$$

回路網の対称性を考えると?の項を求めることができる。(a) $R_5=0$、(b) $R_5=\infty$、(c) $R_1=R_3$ なる 3 つの特別な場合に直接 R_{eq} を計算した結果とこの表式を比べよ。 (分子の?$=R_1R_4$、分母の?$=R_2R_3$)

4.28 質量が 10kg で 20A·hour の能力を持つ 12V の鉛蓄電池がある。
(a) この電池が放電したとき硫酸鉛は何 kg できるか。($PbSO_4$ の分子量は 303 である。)
(b) 効率 20%のエンジンで 1kg のガソリンから得たエネルギーを貯えるためにはこの電池を何 kg 必要とするか。(ガソリンの燃焼熱は 4.5×10^4J/g である。) ((a)0.23kg、(b)100kg)

4.29 懐中電灯などに使われる普通の 1.5V の乾電池は陰極である亜鉛缶を酸化し、陽極では二酸化マンガン MnO_2 を Mn_2O_3 に変化させることによるエネルギーを取り出している。(炭素-亜鉛電池と言われるが炭素棒は絶縁体である。) 重さ 90g の size D(単 1) 乾電池はおよそ 30 時間の間 100mA 供給できる。
(a) この電池の貯蔵エネルギーを J/kg で求め、Probrem4.28 の鉛蓄電池の貯蔵エネルギーとくらべよ。残念なことに乾電池は充電できない。
(b) 効率 50%のウィンチをこの乾電池 1 個で動かしたとき君がどのくらい持ち上げられるだろうか。 ((a) 単位質量あたり 2.08 倍、(b)60kg の質量とすると 13.8m)

4.30 Problem3.24 の結果を使うと 2 電極間の空いた隙間を飛んで渡る荷電粒子の部分が含まれる回路の電流を考えることができる。問題になるのはたった 1 個の粒子が空間を動くとき電流とは何かということを考えることである。(これが分かれば勝手な時間間隔で動く多数の粒子からなるどんな電流についても記述することができるようになる。) 図で示した簡単な回路を考えよう。真空中にあるこの回路は短い導線で接続された 2 つの電極からできている。極板間距離が 2mm であるとする。左側の極板中の放射性元素の核から電荷 $2e$ の α 粒子が低速で放射された。α 粒子は右方向にまっすぐ定速度 10^8cm/sec で進み右の極板上に止まった。このとき接続導線を流れる電流の時間的変化をプロットし定量的なグラフを作れ。同じことを面の法線と 45° の角度の方向に同一スピードで飛び出した α 粒子についても行なえ。(実際はこんなに短時間のパルスに対してはここでは無視している導線のインピーダンスがパルスの形状を崩してしまうが。) 円柱の中心軸上にある細い導線から放射された α 粒子が小さな円柱電極の配置があるときはどうか。パルス電流は同じ形になるか。 (隙間の間隔を s、定速度を v で表すと電流は $2ev/s=1.6\times10^{-10}$A が 2nsec の時間流れる。45° の方向に出るときは横向きの速度成分が $1/\sqrt{2}$ 倍だから流れる電流も $1/\sqrt{2}$ 倍で 1.1×10^{-10}A が $\sqrt{2}$ 倍の時間、つまり 2.8nsec 流れる。円柱電極の場合内側の半径を a、外側の半径を b とすると $I=\frac{vab}{(b-a)(a+vt)^2}\cdot 2e$ が $0<t<\frac{b-a}{v}$ の間流れる。)

4.31 接触しないで交差する部分を表す表示法を使えばあらゆる回路網を平面的に書き表せる。いま各辺に 1 つの抵抗がある立方体を考えよう。つまり各頂点は 3 つの抵抗から出ている導線がはんだ付けされてできている。この回路網を平面的に書け。全抵抗が同じ値 R_0 であるとき立方体の中心を通る対角線上にある 2 頂点を取り上げたとき、この 2 頂点間の等価抵抗はいくらか。答えるとき、多数の連立方程式を立てていっぺんに解くことをせず、その代わり対称性を使って簡単にして答えてみよ。次に立方体の 1 つの側面上の対角線上の 2 頂点を取り上げて等価抵抗を求めよ。このときも対称性を使って問題を簡単にして解いてみよ。どちらの問も平面回路図より立方体としての構造を描いた方が必要な電流の対称性をはっきりさせるのに役立つ。 ($\frac{5}{6}R_0$、$\frac{3}{4}R_0$)

4.32 大事な回路網として無限に続く回路網がある。図は右方向に無限に伸びた直列および並列接続の抵抗のチェインを示している。底辺の導線は抵抗を持たない。これは減衰鎖とかはしご回路網とか呼ばれるものである。問題になるのは"input resistance"すなわち A と B の端子間の等価抵抗を求めることである。この問題の面白い点はその解き方であり、こつをつかむと同じ素子が繰り返して現れるほかの物理の問題に (例えば光学における無限に続くレンズといった問題にも）使えるようになる。要点は未知抵抗を R としたとき左に抵抗の組を 1 単位付け加えたとしても値は変わらないところにある。こうしたとき新しく付け加えられた抵抗値 R は R_2 と R 自身を並列接続したものに R_1 を直列接続した回路に等しいことが分かる。よって R についての方程式が簡単に立てられる。もし電圧 V_0 が入力端子に加えられると連続する節点間の電圧は幾何級数的に減少する。これを示せ。各段階で電圧が半減するはしご的減衰器を作るためには抵抗の比をどうすれば良いか。もちろん本当に無限に続くはしごは作れない。2、3 個繰り返すだけで繰り返しを止めてもこの減衰に大した誤差を含むことのない方法を考えてみよ。 ($R = R_1 + \frac{R_2 R}{R_2 + R}$ より $R = \frac{R_1 + \sqrt{R_1^2 + 4R_1R_2}}{2}$、最初の R_1 と R_2 の接点の電位を V' とすると $V'/V = R_2/(R_2+R)$、半減するのは $R_2 = 2R_1$ のとき。とめるためには $R = \frac{R_1 + \sqrt{R_1^2 + 4R_1R_2}}{2}$ なる抵抗を R_2 の抵抗の代わりに入れればよい。)

4.33 図は抵抗 R_1 と R_2 を並列接続したものである。電流 I_0 が別れて 2 つの抵抗を流れる。$I_1 + I_2 = I_0$ なる条件と消費電力が最小になることを要求すると普通の回路の公式を使って求まる値と同じものが得られる。このことを示せ。これは直流回路網で一般に成立する変分原理の例題になっている。この原理は入力電流 I_0 が与えられたとき回路網内の電流分布はいつでも最小電力消費量を与えるようになっていることを主張するものである。 (消費電力最小の条件は $\delta(R_1 I_1^2/2 + R_2 I_2^2/2) = R_1 I_1 + R_2 I_2 = 0$-$\delta$ は変分を表す。-であり $I_1 + I_2 = I_0$ なる条件とあわせるとキルヒホフの法則と同形になる。消費電力は $RI_0/(R_1+R_2)$ のとき最小)