以下の訳では、cgs 系であたえてある問題を適当に国際単位系 (SI 系) に変えて訳している。

CHAPTER THREE

3.1 球形の導体 A の中に 2 個の球状の空洞がある。導体の電荷はゼロである。しかし一方の空洞の中心に電荷 q_b があり、もう一方の中心には電荷 q_c がある。また導体の中心からかなり離れた距離 r のところに q_d なる電荷がある。この 4 つの物体 A、q_b、q_c、q_d の各々に働く力を求めよ。r が遠距離であるという近似のもとで簡単になるのはこれらのうちどの力か。(導体内の球状の空洞に中心にある電荷 q_b と q_c には力は働かない。遠方にある q_d に働く力の大きさは近似的に $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_d(q_b+q_c)}{r^2}$、物体 A に働く力の大きさはその反作用であり $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_d(q_b+q_c)}{r^2}$ と近似できる。)

3.2 金属板で電磁場を遮蔽するのと同じように重力を遮蔽する重力スクリーンを考えるのは何故いけないか。重力源と電場の源の差を考えよ。図 3.6 の箱の壁は外部の源による場を遮るのではなく、消去する場を作るように表面電荷が生ずるだけであることに注意せよ。この種のことがどうして重力の場合生じないのか。こうなるための条件は何か。(遮蔽効果は正負の電荷の存在の結果であって引力と斥力の打ち消し合いに起因するが、重力の源の質量は正のものしかないからいつも引力しか存在しない。)

3.3 図 3.9 の無限導体平面の上側にある点電荷の作る電場で点電荷から水平方向、つまり平面に平行に出る電気力線の先は導体表面上のどこに着くか。（ガウスの法則を使い、簡単な積分をすれば良い。）(点電荷の電気量を Q とする。点電荷から水平に出る電気力線が到達する範囲 ((8) 式の記号で $r=R$ と表そう。) に含まれる電気力線によって誘導される電気量は $-\frac{Q}{2}$。(8) より、$-\frac{Q}{2}=\int_0^R \frac{Qh}{2\pi(r^2+h^2)^{3/2}}2\pi r dr$ が成立している。これを解いて $R=\sqrt{3}h$。)

3.4 Q なる正の点電荷が水平導体平面の上部 10cm のところにある。$-Q$ なる点電荷を Q から平面におろした垂線上のどこにおくと $-Q$ に働く力がゼロになるか。(平面から高さ z のところに置いたとき点電荷に働く力がゼロになる条件は真上の電荷とその鏡像電荷、さらに置かれた電荷の鏡像電荷によるクーロン力が打ち消しあうこと、つまり $\frac{1}{(h+z)^2}-\frac{1}{4\ z^2}+\frac{1}{(h-z)^2}=0$。これを解いて $z=\sqrt{\frac{4\sqrt{2}-5}{7}}$ を得る。よっておよそ 3.1cm の高さのところ。)

3.5 図 3.8 のように点電荷 Q が導体平面の上 h[m] のところにある。この電荷を無限遠に動かすのに必要な仕事を問われたある学生は、はじめ $2h$[m] 離れていた 2 個の電荷 Q と $-Q$ を無限に引き離すの要する仕事と同じだから $W=\frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 h}$ であると答えた。別の学生は動かす電荷に働かせる力を求めて Fdx を積分して違う答えをだした。この学生の得た答えは何か。どちらが正しいか。(導体からの高さ x にある点電荷に働く力は $F=-\frac{Q^2}{16\pi\epsilon_0 x^2}$ だから Fdx を積分して求めた答は $-\int_h^{\inf} Fdx=\frac{W}{2}$。これが正しい答え。$W$ は鏡像電荷も無限に引き離す余分な仕事も含んでしまっている。)

3.6 点電荷と導体平面の問題を解けば重ねあわせによって構成されるあらゆる問題を解いたことになる。例えば 200m の長さの針金を一様に電荷線密度 $\frac{1}{3}\times10^{-4}$C/m で帯電させて地表から 5m の高さに水平に張った。針金の真下の地表面での電場の強さを求めよ。（良導体定常電場のとき地球はである。) 針金に働く電気的力はいくらか。(長さ L，電荷線密度 λ の針金全体が h だけ離れた点に作る電場の大きさは $E=\frac{2\lambda L}{2\pi\epsilon_0 h\sqrt{L^2+4h^2}}$。よって $E=240,000$V/m)

3.7 (a) 図では 2 つの金属球が導線でつながれている。; 全電荷はゼロである。(b) 図では 2 つの互いに反対荷電に帯電させた導体球 C と D を近づけて A、B に逆符号の電荷を誘導した。(c) 図で示

したように C と D を導線でつなげたとき、各電荷分布は近辺の逆符号の電荷の引力のためある程度存続している筈というかもしれない。本当か。そうならないことを証明できるか。(静電場なら、A→B→C→D→A なる向きの閉回路沿いに電場の線積分を考えると値はゼロの筈。ところが間にあるように A,B,C,D に電荷分布が存続しているとすると導線は導体だから電場はゼロとなっているが AC 間,BD 間の電場は向きが回路と同じ向きであるので正の寄与を線積分に与える。したがって静電場だけを問題にする限り、このようなことはありえないが、短い時間電場が残ることはありうる。このときは静電場ではもはやない。)

3.8 3 枚の導体板を図に示したように互いに平行に置いた。外側の板同士を導線でつないだ。内側の板は孤立していて $\frac{1}{3}\times10^{-6}\mathrm{C/m^2}$ で帯電している。このとき内側の板の片面の表面電荷密度 σ_1 と反対側の面の表面電荷密度 σ_2 はいくらか。($a=5\mathrm{cm}$、$b=9\mathrm{cm}$ とあらわし、内側の極板の上側の電荷面密度による電場の大きさを E_1、下側の極板間の電場の大きさを E_2 とする。もちろん $E_1=\frac{\sigma_1}{\epsilon_0}$、$E_2=\frac{\sigma_2}{\epsilon_0}$ である。静電場の場合閉回路上の積分はゼロだから、$E_1a-E_2b=0$。つまり $\sigma_1a-\sigma_2b=0$。これと $\sigma_1+\sigma_2=\frac{1}{3}\times10^{-6}$ を連立させ解くと $\sigma_1=2.05\times10^{-5}\mathrm{C/m^2}$ $\quad\sigma_2=1.28\times10^{-5}\mathrm{C/m^2}$ を得る。)

3.9 正方形の各頂点に $+q$ の点電荷と $-q$ の点電荷を対角線上に同符号となるように 2 個づつ置いた。2 枚の等電位平面が存在することを示せ。この方法で金属板を直角に折り曲げてできた領域の対称線上 (訳注:各面と 45 度の方向つまり頂角の 2 等分線上) に置いた点電荷の作る電場を求め定性的な概略図を描け。この方法で導体板と点電荷の配位が与えられたときの問題が解けるときあるいは解けないのはどういう場合か。2 枚の導体平面のなす角が 120° のとき頂角の 2 等分線上にある点電荷の作る場を求められるだろうか。(正方形の中心を原点とする x-y 平面を考え，4 個の電荷を $q(1,1),-q(-1,1),q(-1,-1),-q(1,-1)$ とする．$y=0$ 面および $x=0$ 面が電位ゼロ面．$\theta=\frac{\pi}{\mathrm{integer}}$ 以外のときは求められない．)

3.10 同一中心の 2 枚の金属球殻からなるコンデンサーの電気容量 C を求めよ。ここで、外側の球殻の内側の球面半径が a であり、 内側の球殻の外側の球面半径が b である。2 つの導体の間隔 $a-b$ が b よりずっと小さい場合の極限をとって結果を吟味せよ。この極限では平行平面板コンデンサーの容量と一致するはずである。($C=4\pi\epsilon_0\frac{ab}{a-b}$。 2 つの導体間隔 $a-b$ が半径 a や b に比べて小さいときは $a\approx b$ として、2 枚の面積 $4\pi a^2$ の平行平面極板が間隔 $a-b$ で相対しているコンデンサーと考えることができよう。この平行平面極板コンデンサーの容量は $\epsilon_0\frac{4\pi a^2}{b-a}$ であり、この近似のもとで 2 つの容量は一致する。)

3.11 100pF のコンデンサーを 100V まで充電した。その後、電源と切り離して別のコンデンサーと並列につないだら最終的に電圧が 30V となった。どれだけの容量のコンデンサーとつないだか。消費エネルギーはどれだけか。何に使われたか。(233 pF，回路の抵抗により消費されるエネルギーは 3.5×10^{-7}J)

3.12 2 枚のアルミ蒸着した直径 15cm の光学円板が間隔 0.04mm で置かれコンデンサーになっているときの容量は何 pF か。(3912 pF)

3.13 孤立している人間の体の電気容量を大雑把に見積もれ。ヒント: 内接円と外接円の中間位と思ってよい。乾燥した冬の日にナイロン敷きの上をこすって歩くと簡単に数 kV 位自分の体を充電できてしまう。これは手先が設置された導体に近づいたとき放電火花の長さでわかる。この火花放電でどれだけのエネルギーが散逸するか。(人間の外接球の半径は 0.8 m，内接球の半径は 20 cm 位であると勝手に想像して，半径が 0.5 m の孤立球を人間の体の近似とすると，54 pF が得られる．このとき，

エネルギーは $\frac{1}{2}CV^2 = 10^{-4}$J となる．)

3.14 半径 a の孤立導体円板の容量は $8\epsilon_0 a$ である。円板上の電荷が Q であるとき、この円板による電場のエネルギーはいくらか。この結果と (Problem 2.27 で見た) 面上に Q が一様に分布した同じ半径を持つ絶縁体円板の作る電場のエネルギーを比べどちらが大きいか、理由と共に述べよ。(貯えらるエネルギー $\frac{2Q^2}{16\epsilon_0 a}$ ，これは一様に帯電した絶縁体円板のエネルギーより $\frac{3\pi^2}{32}$ 倍大きい．なぜなら導体中で電荷はエネルギーを最小にするように分布する．)

3.15 長さ 30cm の同軸アルミチューブがある。中側のチューブの外径が 3cm、外側のチューブの内径が 4cm である。45V の電源をつないだとき、2 つのチューブの間の電場のエネルギーはいくらか。(半径がそれぞれ $b, a (b > a)$ かつ長さ L の同軸円筒面からなるコンデンサーの容量は $\frac{2\pi\epsilon_0 L}{\ln(b/a)}$ よって今の場合　0.56 pF　したがって，5.7×10^{-8}J　)

3.16 平行平面板コンデンサーの片方の面に働く電気力を求めよ。ここで極板間の電位差は 3000V、極板間の距離は 3cm、そして極板は 1 辺が 20cm の正方形である。極板を絶縁して電荷が変わらない様にしたとき、極板同士をくっつけるためにはどれだけの仕事がいるか。この仕事とはじめに電場に貯えられていたエネルギーは等しいか。(一方の極板（電荷面密度 σ，極板間の電場 E）に働く圧力（P 位面積あたりの力）は $\sigma E/2$　よって，力は 0.0017 N，求める仕事は 5.12×10^{-5}J 確かに電場に貯えられた仕事 $\frac{1}{2}CV^2$ に等しい．)

3.17 外球の半径が a である球形コンデンサー (2 球間は真空である。) を作って貯えられるエネルギーを最大にしたい。ただし内側の球面上での電場の大きさが E_0 をこえないようにする。内側の導体球面の半径 b をどれだけにしたら良いか。また、貯えられるエネルギーの最大値はいくらか。($b = 3a/4$ のときエネルギーが $4\pi\epsilon_0 \frac{27}{512} {E_0}^2 a^3$ なる最大値をとる．)

3.18 アルミ板 B を曲げて作った面の中に絶縁した糸でアルミ板 A を吊り下げた。二枚のアルミ板 A、B は反対符号に帯電していて電位差が V[V] であるとする。A には重力の他にも下向きに引っ張る力 F が働く。この力 F を測定し、幾何学的サイズが分かれば電位差 V を知ることができる。式 (3-27) を用いて、電位差 V を F および他の系の大きさに関する諸量で表せ。($F = \frac{\epsilon_0 b}{s} V^2$)

3.19 図に示した装置で、イオンがまず電位差 V_0 により加速されてから 2 枚の半円柱状極板 A および B にはさまれた領域に入ってきた。外側の極板の電位が $2V_0 \ln \frac{b}{r_0}$、内側の極板の電位が $2V_0 \ln \frac{a}{r_0}$ であるときイオンは半径 r_0 の半円軌道を描くことを示せ。(極板 A および B は紙面と直交する方向に間隔に比してずっと長くのびているものとする。) (初速は $\sqrt{2qV_0/m}$ だから $r = r_0$ の円軌道上で $2V_0/r_0$ の電場が円の中心方向に働いていることになる．この円軌道上で $V = 0$ なる基準電位をとることにすると証明できる.)

3.20 長さ $2a$、直径 $2b$ の偏長回転楕円体の導体の容量は $C = 8\pi\epsilon_0 \frac{\epsilon}{\ln\frac{1+\epsilon}{1-\epsilon}}$ で与えられることが分かっている。ここで $\epsilon = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$ である。$b = a$ ならば、この公式は球の静電容量と一致することを示せ。
次に帯電している水滴が回転楕円体であるとせよ。はじめ球体であった水滴が定体積のまま一定の電荷 Q を保って偏長回転楕円体に変形したとき、電場エネルギーは増えるか減るか。(回転楕円体の体積は ab^2 に比例する。) ($\lim_{b\to a} 4\pi\epsilon_0 \frac{2a\epsilon}{\ln[(1+\epsilon)/(1-\epsilon)]} = 4\pi\epsilon_0 a$，　$U(\epsilon) = \frac{Q^2}{2C}; U(0) = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 a}$　$U(\epsilon)$ は $\epsilon = 0$ の値から $\epsilon \to 1$ に近ずくにつれ増大する．)

3.21 xy 平面、xz 平面、yz 平面全てが金属面であり、各交線がはんだづけされている。点電荷 Q が各面からの距離がすべて d となるように置かれている。境界条件を満足する鏡映電荷の配置を描け。点電荷 Q に働く力の方向と大きさを求めよ。($Q(d,d,d)$ の鏡像電荷として 7 つの電荷を考えればよい．$+Q$ が $(d,-d,-d),(-d,d,-d),(-d,-d,d)$ そして $-Q$ が $(-d,d,d),(d,-d,d),(d,d,-d),(-d,-d,-d)$ なる配置である．求める力は $F=-\frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 d^2}(\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}+\frac{1}{12})(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}})$)

3.22 Problem 2.11 をやったのなら、その結果から Problem 3.20 の孤立回転楕円導体の静電容量の公式を導けるはずである。

3.23 (a) 半径 a、b、長さ L の同軸円筒面からなるコンデンサーの容量を求めよ。ここで $L>>b-a$ を仮定して端の効果を無視せよ。そして得られた公式は面間隔 $b-a$ が半径に比べて充分小さいとき平行平面板コンデンサーの公式に一致することを示せ。($C=\frac{2\pi\epsilon_0}{\ln(b/a)}L$)
(b) 直径 2.00 インチ (1 インチは約 2.54cm) の円筒をその軸が鉛直になるように支えられている。この円筒の下部は内径 3.00 インチの共軸固定円筒内に入り込んでいる。2 つの円筒の電位差が 5kV のとき中側の円筒をさらに下に引っ張る力の大きさを求めよ。($F=\frac{Q^2}{2}\frac{d}{dL}\frac{1}{C}=1.72\times10^{-3}$N)

3.24 2 枚の平行面が導線でつながれて同じ電位になっている。片方の面が xz 面上にあるとしもう一方を面 $y=s$ の位置に置くとする。2 面間の距離 s の値は 2 面のひろがりよりずっと小さいものとする。図のように点電荷 Q を 2 面の間の $y=b$ なる位置に置く。このとき各面の相対する面上に現れる電荷を求めよ。この和はもちろん $-Q$ になるはずである (何故か。)。そして点電荷に近い方の面上により多く分配されるはずである。もし Q が左の面にずっと近づいているとき、つまり $b<<s$ なら右の面があろうとなかろうと影響しないはずである。しかし今は正確な表式を得たい。
鏡像法を試みると理髪店の 2 つの壁に掛けてある鏡の像のように無限につながった像が必要になることが分かるはずである。2 つの面上の任意の点での電場を求めるのは容易ではない。しかし重ね合わせに基づく簡単な計算によってこの問題を解くことができる。(ヒント：もう一つ Q を間の面 $y=s$ の上に置くと各面上の表面電荷は倍になる。実際どんな数の電荷であっても誘導される表面電荷は間の面 $y=s$ の上のどの位置に電荷を置くかということには関係がない。そこで今 $y=s$ 面上に点電荷を考えるのではなく一様に分布した電荷による帯電膜を $y=s$ の位置に考えてしまえば電場は簡単になりガウスの法則を使えば良くなる。この先の計算を行なえ。) ($y=b$ 面上に $\sigma=Q/A$ なる面密度の荷電分布板を考えても答えは変わらない．$y=0$ 面上の電荷は $Q_1=-\frac{s-b}{s}Q$，$y=b$ 面上の電荷は $Q_2=\frac{b}{s}Q$)

3.25 (a) 電位差の 2 乗 $(\phi_2-\phi_1)^2$ は力を誘電率 ϵ_0 で割った次元になることを示せ。したがって物体間の静電気力のオーダーは含まれる電位差でほぼ決まってしまう。その他の諸次元量は比としてしか現れず、あとは 4π のような無次元量が現われだけである。ある物体と他の物体の間の力のオーダーは電位差が 300V であるときどのくらいになるか。cgs 系の力の単位 dyn で答えてみよ。(大体 1 dyn)
(b) 実際に使える電位差には物質構造からくる限度がどうしてもある。人工的に得られる電位差の最大値は高圧下でのヴァンデグラフ起電機によるおよそ 10^7V である。(GeV 加速器にはこんなに大きな電位差は含まれていない。) $(\mathrm{MV})^2=10^{12}\mathrm{V}^2$ にともなう力の大きさは何 kg 重か。こういった考察で静電モーターがなぜそれほど使えないかが分かるだろう。(およそ 8 kg 重)

3.26 図は 2 枚の面積 A の金属板 1 と 2 が入っている平らな金属の箱の断面図である。箱と板、板同士、箱の上底と下底の間隔をそれぞれ r、s、t と表すがこれらはすべて箱の長さや幅に比べて小さいものと仮定して板上の電荷を求める際に端の場の乱れを無視して良い。この近似のもとで容量係数 C_{11}、C_{22}、C_{12} を求めよ。また次の問題 3.27 で述べられる一般的定理により C_{12} に等しいことが示される C_{21} を求めよ。($Q_1=C_{11}\phi_1+C_{12}\phi_2, Q_2=C_{21}\phi_1+C_{22}\phi_2$，　$C_{11}=\epsilon_0A(\frac{1}{r}+\frac{1}{s}), C_{22}=\epsilon_0A(\frac{1}{s}+\frac{1}{t}), C_{21}=-\frac{\epsilon_0A}{s}$)

3.27 C_{12} がいつでも C_{21} に等しいということを証明する手助けになるヒントを考えよう。 電荷素片 dQ をポテンシャルがゼロの位置からポテンシャル ϕ の導体に運ぶためには ϕdQ のエネルギーを外から与えなければならない事を知っている。2つの導体が帯電されてそれぞれ ϕ_{1f} と ϕ_{2f}(f は final の意) の (最終) 電位になるような系を考えよう。すべての電荷がゼロであり電位もゼロである状態から出発して最終的にいろんなやり方でこの条件に到達できる。2つのやり方が特に面白い。

(a) ϕ_2 はゼロにしたまま ϕ_1 をゼロから徐々に ϕ_{1f} にまであげる。その後 ϕ_1 を ϕ_{1f} に保ったまま ϕ_2 をゼロから ϕ_{2f} にまであげる。

(b) 1と 2の役割を入れ替え、まず ϕ_2 をゼロから ϕ_{2f} にまであげてから ϕ_1 をゼロから ϕ_{1f} にまであげる。

この二つの帯電方法について、それぞれ外から為さなければならない仕事を計算せよ。そして C_{12}、C_{21} に関する議論を行なえ。((a):$W=\int_0^{\phi_{1f}} C_{11}\phi_1 d\phi_1+\int_0^{\phi_{2f}}(C_{12}\phi_{1f}d\phi_2+C_{22}\phi_2 d\phi_2)=\frac{C_{11}}{2}\phi_{1f}^2+\frac{C_{22}}{2}\phi_{2f}^2+C_{12}\phi_{1f}\phi_{2f}$ (b):$W=\int_0^{\phi_{2f}} C_{22}\phi_2 d\phi_2+\int_0^{\phi_{1f}}(C_{11}\phi_1 d\phi_1+C_{21}\phi_{2f}d\phi_1)=\frac{C_{22}}{2}\phi_{2f}^2+\frac{C_{11}}{2}\phi_{1f}^2+C_{21}\phi_{2f}\phi_{1f}$; よって $C_{12}=C_{21}$)

3.28 典型的な 2次元境界値問題の一つは 2つの無限に長くいろんな電位にある金属パイプのような 2つの平行な導体円筒の問題である。数学的には 2次元問題は 3次元問題よりずっと扱いやすい。実際"2パイプ"問題を解く鍵は反対荷電平行 2直線の作る電場によって与えられる。この電場の等電位面が円筒面になるのである。そして電気力線も円筒状になる。これを証明してみよ。電位について考えるのが一番簡単であるが 2次元系では無限遠での電位をゼロにできないことに注意しなければならない。この 2本の直線電流の中線をゼロ電位とする。つまり断面図では原点を電位ゼロとしよう。任意の点での電位は各直線荷電分布の作る電位を別々に求めたものの和である。こうして電位が $\ln\frac{r_2}{r_1}$ に比例していて 2点からの距離の比が一定になっている軌跡上で電位が一定値をとっていることが容易に分かる。等電位面を描け。(線密度 λ の直線電荷分布から距離 r 離れたところの電位は距離 r_0 をゼロ電位の基準として $\phi(r)=\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\ln\frac{r_0}{r}$。よって図の点 (x,y) の電位は電荷線密度 λ を $(a,0)$、$-\lambda$ を $(-a,0)$ とすると重ね合わせおよび原点をゼロ電位としたことにより $\phi(x,y)=\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\ln\frac{(x+a)^2+y^2}{(x-a)^2+y^2}$ となる。電位が一定値 ϕ_0 となる等電位面は $A=\exp(\frac{4\pi\epsilon_0\phi_0}{\lambda})$ とおいて $(x-\frac{A+1}{A-1}a)^2+y^2=[(\frac{A+1}{A-1})^2-1]a^2$ で与えられる。$\phi=\phi_0$ なる等電位面の断面は中心が $(\coth\frac{2\pi\epsilon_0\phi_0}{\lambda},0)$、半径 $a\,\mathrm{cosech}\frac{2\pi\epsilon_0\phi_0}{\lambda}$ の円である。これは円筒面の断面である。)

3.29 $\phi(x,y,z)$ が点 (x_0,y_0,z_0) のまわりで冪級数展開可能であるとする。点 (x_0,y_0,z_0) からの距離がいずれも δ である対称な 6点 $(x_0+\delta,y_0,z_0)$、$(x_0-\delta,y_0,z_0)$、$(x_0,y_0+\delta,z_0)$、$(x_0,y_0-\delta,z_0)$、$(x_0,y_0,z_0+\delta)$、$(x_0,y_0,z_0-\delta)$ での ϕ の Taylor 展開を各々書き下せ。ϕ がラプラス方程式の解であるとき、この 6つの点での ϕ の値の平均値が $\phi(x_0,y_0,z_0)$ に等しいことを δ の 3次の項までで示せ。(平均値 $\overline{\phi}=\frac{1}{6}[\phi(x_0+\delta,y_0,z_0)+\phi(x_0-\delta,y_0,z_0)+\phi(x_0,y_0+\delta,z_0)+\phi(x_0,y_0-\delta,z_0)+\phi(x_0,y_0,z_0+\delta)+\phi(x_0,y_0,z_0-\delta)]$ および $\nabla^2\phi=0$ を使うと，$\overline{\phi}$ が $\phi(x_0,y_0,z_0)$ と異なるのは δ の 4 次以降である．)

3.30 境界値が与えられたラプラス方程式の近似解を数値的に解くことを考えよう。これは Section 3.8 で述べられた relaxation(緩和) 法で Problem 3.29の結果に基づくものである。簡単のため 2次元の例を考える。図は大小正方形 2つの等電位境界を示している。例えば 2つの金属正方形筒からなるコンデンサーの断面がこうなっている。問題になるのは離散的分布の格子点の並びについて 2次元ポテンシャル $\phi(x,y)$ の厳密解の対応する点での数値の良い近似値を見つけることである。この問題について粗い分布の点の配列を取ろう。内部の境界での電位を適当に 100とし、外部の境界での電位を 0とした場合を考えよう。境界にある点の電位はこの値をとるとする。内部の点には任意の値で始めても良いが、ちょっ

と考え推察すれば時間が節約できる。内部の電位は 0 と 100 の間にあり、内部境界に近い点では外部境界に近い点より電位が高いはずである。図にいくつかのあり得べき出発値が書いてある。当然、配置の対称性をうまく使うべきである。そうすればたった 7 点の値だけ計算すれば良いことが分かる。内部の各点についての値をその 4 つの隣接点の平均値で置き換えて行って、何らかの系統的方法でこの 7 点の格子点について繰り返せば良い。値の変動が充分小さくなるまでくり返しを行なえば良い。例えば前より絶対値が 1 より小さくなれば繰り返しを止めることにしよう。値が最終的に変わらなくなる分布に近づく relaxation(緩和) は *diffusion*(拡散) 現象と密接に関係している。もしある点のとても大きな値から出発するとこの値が最近接点へひろがりさらにそのまた最近接点へとひろがることを繰り返しやがて凹凸がならされてしまう。こうして配列の最終値を求めてみよ。また $\phi = 25$ と $\phi = 50$ の等電位面を描け。($a_{n+1} = \frac{1}{4}(a_n+100+c_n+b_n)$, $b_{n+1} = \frac{1}{4}(b_n+a_n+d_n+0)$, $c_{n+1} = \frac{1}{4}(a_n+100+e_n+d_n)$, $d_{n+1} = \frac{1}{4}(b_n+c_n+f_n+0)$, $e_{n+1} = \frac{1}{4}(c_n+c_n+f_n+f_n)$, $f_{n+1} = \frac{1}{4}(d_n+e_n+g_n+0)$, $g_{n+1} = \frac{1}{4}(f_n+f_n+0+0)$ の繰り返しをプログラムして各格子点について $n+1$ 回目の値と n 回目の値の差の絶対値が 1 より小さくなったら (例えば $|a_{n+1}-a_n| < 1$) になったら iteration をやめるようにすれば良い。プログラムを書いて試みよ。)

3.31 relaxation 法はコンピューターにうってつけの方法である。中心が同一の正方形境界値問題をより細かい格子点網目 (メッシュ) で扱うプログラムを書いてみよ。例えば格子点を 4 倍にして格子間隔を半分にせよ。粗いメッシュで得られた解をもっと細かいメッシュでの relaxation 法の初期値にするのは良い考えである。

3.32 2 つの同心球殻からなるコンデンサーがある。内側の半径 a の球殻を導体 1、外側の半径 b の球殻を導体 2 と名づける。この 2 導体系の C_{11}、C_{22}、C_{12} を求めよ。($C_{11} = C = 4\pi\epsilon_0\frac{ab}{b-a}, C_{22} = C + 4\pi\epsilon_0 b = 4\pi\epsilon_0\frac{b^2}{b-a}, C_{12} = -C = -4\pi\epsilon_0\frac{ab}{b-a}$)