以下の訳では、cgs 系であたえてある問題を適当に国際単位系 (SI 系) に変えて訳している。

CHAPTER ONE

1.1 素粒子の世界では、質量の単位は核子、つまり普通の物質の構成要素である陽子や中性子の質量である。核子の質量が 1.6×10^{-27}kg、万有引力定数 G が $6.7\times10^{-11}\mathrm{m}^3/\mathrm{kg}\cdot\mathrm{s}^2$ なる値が与えられたとき、2 つの陽子間に働く万有引力とクーロン斥力の大きさを比べよ。こう考えると何故重力 (万有引力) を極く弱い力と言うかが分かる。ヘリウムの原子核中の 2 つの陽子間の距離は 10^{-15}m 位である。このときの陽子間の静電斥力の大きさはいくらか。このくらい近づいたハドロン (陽子や中性子を含む。) 間にはもっとずっと強い核力が働く。(万有引力の大きさ：クーロン力の大きさ = 0.75×10^{-36}, 求めるクーロン力の大きさは $230\,[\mathrm{N}]$ である．)

1.2 まわりに他の荷電粒子がないとするありえない状況を仮定したとき、陽子がどれだけ近づいたとき電子 (質量は約 10^{-30}kg) に働く下向きの重力とつりあうか。($5.08\,[\mathrm{m}]$)

1.3 図のように 0.3kg のバレーボール 2 個がナイロンひもでぶらさげられ、帯電された。2 つのボールの電荷が等しいとき、各々のボールは何 C の電気量を持つか。($2.86\times10^{-6}\,[\mathrm{C}]$)

1.4 正方形の各頂点に電荷 q の点電荷がある。正方形の中心に反対符号の Q なる電荷がある。各電荷に働く力の和がゼロになるときの Q を求めよ。この値のとき系はつりあうが、このつりあいは安定か。($Q=(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{4})\,q\approx0.957\,q$，また この釣り合いは不安定)

1.5 半径 R の半円の細いプラスチックがあって電荷 Q[C] が一様に与えられた。半円の中心の電場の大きさを求めよ。(半円の中心を原点とし，半円の両端を結ぶ方向に x 軸， 半円の対称軸を y 軸にとる．このとき電場 $\boldsymbol{E}=(0,\frac{Q}{2\pi^2\epsilon_0 R^2})$ （ここで，半円上には Q [C] の電荷が乗っているとした.）)

1.6 3 つの正電荷 A(3×10^{-6}C),B(2×10^{-6}C),C(2×10^{-6}C) が、一辺が 0.2m の正三角形の頂点にある。
(1) 各電荷に加わる力は何 N か。(A に働く力は $0.234\,[N]$ B と C に働く力は $1.96\,[N]$)
(2) 正三角形の中心にできる電場の強さは何 N/C か。(6.74×10^5 [N/C])

1.7 陽子 1 つと電子 2 つからなる系のポテンシャルエネルギーがゼロになるのはどんな配置のときか。直線上にこれらの 3 粒子をならべたときいくつの配置例があるか。(一つの電子と陽子の距離を r_1, もう一方の電子と陽子の距離を r_2 とおき，電子間の距離を r_3 とすると $\frac{1}{r_3}=\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}$ のとき。)

1.8 e なる大きさの電荷と-e の電荷が交互に等間隔で無限に並んでいる 1 次元イオン格子の 1 イオンあたりのポテンシャルエネルギーを求めよ。(ヒント:$\ln(1+x)$ の展開式を使えばよい。)(各イオンあたりのポテンシャルエネルギーは $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{-e^2}{a}[1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{(-1)^n}{n+1}+\cdots]=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{-e^2}{a}\ln 2$)

1.9 一様な電荷密度 ρ を持つ半径 a の球がある。この帯電球を作り上げるのに必要な仕事を計算してポテンシャルエネルギー U を求めたい。半径の小さな球の上に球殻を積み重ねていく方法で求めよ。このとき、帯電球の外側の電場は球の中心に全電荷があるときの電場に等しいことを使え。結果は球の全電荷を Q として、Q で表せ。(電荷密度を $\rho=\frac{3Q}{4\pi a^3}$ とおいて半径 r と $r+dr$ の間にある薄い球殻のもつ微少ポテンシャルエネルギーは $dU=\frac{4\pi\rho^2}{3\epsilon_0}r^4dr$ である。これを r について 0 から a まで積分して $U=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{3Q^2}{5a}$ を得る。)

1.10、エネルギーと質量が等価であるということが特殊相対性理論により明らかにされた 20 世紀初頭、電子の静止質量の起源は電気的なものであるという考えがとりわけ魅力的であった。電子が一様に帯電し半径 r_0 まで広がった球体であるとして 1.9 の結果を使い、この系のポテンシャルエネルギーが mc^2 に等しいとして r_0 の値を求めよ。この考え方の欠点は明らかである:電荷を留めておくものが何もない。($mc^2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{3e^2}{5r_0}$ より $r_0 = 1.7 \times 10^{-13}$cm。)

1.11 単位の大きさをもつ正電荷が原点に、その-2 倍の負電荷が x 軸上の位置 $x = 1$ にある。
(a) 電場がゼロになるのは x 軸上ではどこか。($x = -1 + \sqrt{2},\ -1 - \sqrt{2}$)
(b) 電場が x 軸と平行になる y 軸上の点はどこか。($y = \pm\frac{1}{\sqrt{y^{2/3}+1}} = \pm 1.3$)

1.12 正三角形の頂点に 2 つの正イオンと 1 つの負イオンがある。別のイオンを置いたとき、力が働かないのはどこか。その場所はいくつあるか。(正三角形の一辺を x 軸とし，その辺の垂直二等分線を y 軸とする．$(0, 3.10224\,a)$ および $(0, -0.07314\,a)$)

1.13 頭上に雷雲が通過するとき、大気中に鉛直な電場ができ、地表では 3000V/m (=0.1 静電ボルト /cm) の電場が生ずる。
(a) 雷雲は水平面 $1\mathrm{m}^2$ あたり何 C の電荷を含むか。(雷雲の下部の電荷面密度は電場 0.1 静電ボルト $/\mathrm{cm}^3 = 3000$ [V/m] の ϵ_0 倍で与えられる．よって $2.66 \times 10^{-12}[\mathrm{C/m^2}]$)
(b) 直径 1mm の雨滴が雷雲中に一杯あり降雨量が 0.25cm であった。電荷の担い手がこの雨滴であるとしたとき、各雨滴の表面の電場の大きさはどれだけか。(200[V/m])

1.14 xy 平面上に原点を中心とする半径 b の細い帯電リングがあり、全電荷 Q が一様に分布している。z 軸上のどの点で電場がもっとも強くなっているか。$z > 0$ で考えよ。($z = \frac{b}{\sqrt{2}}$)

1.15 半径 a の球内に電荷密度 ρ で電荷が一様に分布しているとき、球の内外の電場を求めよ。球面上で電場は不連続か。球の中心で電場は不連続か。(球外 $E_> = \frac{\rho a^3}{3\epsilon_0 r^2}$， 球内 $E_< = \frac{\rho r}{3\epsilon_0}$， $r = a$ では連続，$r = 0$ には singularity は存在しない．)

1.16 半径 a の球内に電荷密度 ρ で正電荷が一様に分布している。図のように半径 $a/2$ の球をくりぬいたとき、A 点と B 点とでの電場の方向と大きさを求めよ。($\boldsymbol{E}_A = -\frac{a\rho}{6\epsilon_0}\hat{\boldsymbol{r}},\quad \boldsymbol{E}_B = \frac{17a\rho}{54\epsilon_0}\,\hat{\boldsymbol{r}}$)

1.17 (a) 一辺が d の立方体の中心に点電荷 q をおいた。このとき立方体の 1 つの面上で $\epsilon_0 \int \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{a}$ の値を求めよ。($\frac{q}{6\epsilon_0}$)
(b) 点電荷 q を立方体の 1 つの頂点に置いた。このとき、立方体の各面上での電束を求めよ。($\frac{q}{24\epsilon_0}$)

1.18 2つの無限に広い平面が間隔 2cm で平行に置かれていて、それぞれ面密度 $\sigma_1 = 2 \times 10^{-13}\mathrm{C/m^2}$ と面密度 $\sigma_2 = \frac{2}{3} \times 10^{-13}\mathrm{C/m^2}$ で帯電している。このときの電場を求めよ。次に 2つの面を互いに直交させたとき区切られてできる空間の 4 領域の電場を求めよ。(二枚の無限平面が平行のとき，平面間の領域では電場は 0.0188[V/m]　外側では 0.037[V/m]，二枚の無限平面が直交しているとき，電場の大きさは 0.0136[V/m] である．電場の向きは省略するが各自考えられたし．)

1.19 一様な電荷表面密度 σ を持つ無限平面に厚さ d、一様な電荷体積密度 ρ の無限に広がった板をひっつけた。すべての電荷は固定されているものとして、各点での電場を求めよ。(教科書Ｐ．３６の図において無限平面の左側の領域の電場は $-\frac{\sigma+\rho d}{2\epsilon_0}$，帯電層板の中に無限平面から $x\,(< d)$ だけ右に

入った点の電場は $\frac{\sigma+\rho(2x-d)}{2\epsilon_0}$，帯電層の右側の領域での電場は $\frac{\sigma+\rho d}{2\epsilon_0}$ となる．ただし，電場は右向きを正とした．)

1.20 無限に長い中空の円筒面上に電荷が分布しているパイプがある。このとき、円筒面内の電場はゼロで、外の電場は円筒の中心軸上に電荷が分布しているときの電場に等しいことを示せ。パイプの断面が正方形であり、電荷面密度が一様であるときは、内外の電場について同様のことが言えるか。(円筒の半径を r、面密度を σ とする。$r>b$ のとき $E=\frac{\sigma b}{\epsilon_0 r}$、$r<b$ のとき $E=0$。円と正方形では対称性が違うので，円筒状のパイプで成立することが断面が正方形であるパイプでは成り立たない．)

1.21 水素原子は大きさ e の点電荷のまわりを負電荷が密度 $-\rho(r)=C\exp(-2r/a_0)$ でとりかこんいるようになっている。ここで、a_0 はボーア半径で $a_0=0.53\times10^{-10}$m、C は負電荷密度を合計すると $-e$ になるように決められる定数である。半径 a_0 の球内の負電荷はいくらか。核から a_0 離れた点の電場を求めよ。(電荷 $q=(1-5\exp(-2))e=0.323e$，電場の大きさ $E=\frac{e-q}{4\pi\epsilon_0 {a_0}^2}=3.47\times10^{11}$[V/m])

1.22 平行な 3 平面 A, B, C が A の下に B, B の下に C と置かれている。3 平面はそれぞれ面の両側が一様に帯電し、面密度は A が $-\frac{4}{3}\times10^{-5}$ C/m^2, B が $\frac{7}{3}\times10^{-5}$ C/m^2, C が -3×10^{-5} C/m^2 であるとき各平面上での電場を求めよ。さらに 3 つの平面上の力の合計がゼロであることを確かめよ。(面上の電荷に働く力は単位面積あたり 1.14(35) 式から (面の両側での電場の平均)$\times$(面密度) で与えられる.（問題を SI 単位に換算するには Appendix E から 1[esu/cm^2] $=\frac{1}{"3"}\times10^{-5}$[C/m^2] とすればよい.）面 A には下向きに 3.2π[N/m^2]，面 B には上向きに 1.4π[N/m^2]，面 C には上向きに 1.8π[N/m^2] の力がそれぞれ単位面積あたり働く．)

1.23 電荷 Q が一様に表面に分布している半径 R の球がある。このときできる静電場のエネルギーの 90%を貯えている球を考えたとき、その半径はいくらか。($10R$)

1.24 10cm の細い棒の上に $\frac{8}{3}\times10^{-8}$C の電荷が一様に分布しているとき、図の A と B での電場の大きさを求めよ。($E_A=6.15\times10^3$[N/C], $\quad E_B=6.78\times10^3$[N/C])

1.25 3m はなれた平行な 2 つの導線に電圧をかけ、正に帯電させた。2 つの線の真中での電場が 15,000N/C であるとき、1km の長さの線上にはどれだけの電荷がたまっているか。(6.26×10^{-4}[C])

1.26 図のように $2b$ だけ離れた細長い棒が半径 b の半円でつながっている。この線上すべてに一様線密度 λ で帯電させた。点 C での電場がゼロになることを示せ。これを示すとき図の A 点と B 点で同じ角 θ と $d\theta$ で定められる部分の領域の寄与を比較して求めよ。($dE_A=dE_B=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\lambda d\theta}{b}$)

1.27 一辺が S の正方形の升目からなるチェス盤がある。このチェス盤は無限平面であるとする。チェス盤の白い目の中心すべてに e なる電荷があり、黒い目の中心すべてに $-e$ なる電荷がある。(白と黒の目は交互にある。) チェス盤と直交する経路上で 1 つの電荷を元の升目から無限に遠くひきはなすとき必要な仕事 W を求めたい。 W が有限であるとして (これを示すのは簡単ではない。)、W は正か負か。
W の近似値を求めるため、まず 7×7 升の盤の場合、中心にある電荷を取り去るときの W を考えよ (9 項しかない。)。もっと多くの升目の場合プログラムをたとえば 101×101 盤について書いて W の値を求めよ。それを 99×99 盤や 103×103 盤と比べて $\infty\times\infty$ 盤のときに収束する値の見当をつけてみよ。(マス目の数が有限のときは一つの電荷を無限遠方にとりさる仕事は正であることがわかる．それはすぐとなりには逆符号の電荷がとりまいているからわかる．7×7 のマス目の正方形の場合必

要な仕事は $[4(1-\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{2}-\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{3}-\frac{1}{3\sqrt{2}})+8(\frac{1}{\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{10}}+\frac{1}{\sqrt{13}})]\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\approx 1.4146\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}$。無限平面の場合はこの係数 1.4146 が 1.614 くらいになる。)

1.28 無限にはなれた 3 つの陽子と 3 つの電子を一辺が a の正八面体の頂点におくときの仕事、つまり系のエネルギーを求めよ。2 つの異なる配置があるが、各々のエネルギーはいくらか。(2 つある配置は諸君に考えてもらうとして，それぞれのエネルギーは $-\frac{3e^2}{4\sqrt{2}\pi\epsilon_0 a}$ と $\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a}(-4+\frac{1}{\sqrt{2}})$)

1.29 図は半径 a の球面を面密度 σ で一様に帯電させた後、半径 $b(<<a)$ の小さな小円の部分をくりぬいて取ったことを示している。くりぬかれた小円の真中の点 (球面上にあった点) での電場の方向と大きさを求めよ。残った電荷による電場の和を求めるか、重ね合わせの原理を用いてこの取り除いた小円板の効果を考えるかという 2 つのやり方がある。この結果と教科書に書いてある表面電荷に働く力の議論 (p.29-31) との関連を示せ。これは同じ答えに到達する第 3 の方法かもしれない。(電場は中から外向きで，大きさは $\frac{\sigma}{2\epsilon_0}$)

1.30 半径 a と半径 b の中心を共有する球殻が共に一様な表面密度で全電荷 Q と $-Q$ で帯電しているとき、系のエネルギーを求めよ。($\frac{\epsilon_0}{2}\int E^2 dv=\frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0}\int_a^b\frac{dr}{r^2}=\frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0}(\frac{1}{a}-\frac{1}{b})$)

1.31 p.31 であげたゴム風船のように、一様に帯電したシャボン玉も表面の各領域で外向きの電気的力 (張力) を感ずる。シャボン玉の半径を R、全電荷を Q としたとき、シャボン玉の半球が他の半球を引っ張る力を求めよ。(もしこの力の $2\pi R$ 分の 1 がシャボン玉の表面張力より大きくなれば面白いことが見えるだろう。)(膜のすぐ外側の電場の大きさは $\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2}$，内側では電場は 0 であるので膜に働く単位面積あたりの力，つまり圧力は膜のすぐ外と内の電場の平均に電荷面密度 $\sigma=\frac{Q}{4\pi R^2}$ をかけた $P=\frac{\sigma E}{2}$ で与えらる．よって，求める力は $\pi R^2 P=\frac{Q^2}{32\pi\epsilon_0 R^2}$)

1.32 3 つの正電荷が円形の軌道上に乗っている。電荷がすべて同じならつりあいの位置は対称の位置で中心角にして 120° ずつ離れた位置である。今、2 つの電荷が等しいとき、この 2 電荷のなす角が 90° であった。このとき、もう 1 つの電荷の大きさは他の何倍か。($(2+\sqrt{2})\cos\frac{\pi}{8}\approx 3.154$ 倍)

1.33 一様均質電荷密度をもつ半径 a の球がある。この球の全電荷は 2 個の電子分であるとする。この球内に 2 個の陽子を埋め込む。こうしても球の電荷密度は変わらなかった。2 個の陽子の各々に働く力がゼロになる釣り合いの位置はどこか。(これは水素分子の模型である; 陽子によっても電子雲がつぶれない理由は量子力学による。) (球の中心から半径の半分だけ離れた地点がつり合いの位置)

1.34 4 つの正電荷がある。2 つの電荷の大きさはそれぞれ Q で、他の 2 つの電荷の大きさはそれぞれ q であり、4 つが図のように同じ長さの 4 本の伸びない紐で結ばれている。外力が働かないときのつりあいの位置が図に示してあるが、このとき $\tan^3\theta=\frac{q^2}{Q^2}$ であることを示せ。2 つのとき方がある。各電荷に働く力、つまりひもの張力と電気的斥力の和が 0 になることから示すやり方と 4 つの電荷のときのエネルギー U を書き下し、それを極小にする方法のどちらでも良い。(ひもの張力と電気的斥力の和が 0 になることから示すやり方では、Q 同士を結ぶ軸を x 軸、q 同士を結ぶ軸を y 軸とし、ひもの張力を S とすると $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q^2}{4y^2}=2S\sin\theta$、$\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q^2}{4y^2}=2S\cos\theta$ が成立する。エネルギーの極値を求める方法はエネルギー U が $U=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\{\frac{3qQ+q^2}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{q^2}{2y}+Q^2 2x\}$ で与えられるので、極小値を取る条件 $\frac{\partial U}{\partial x}=0$、$\frac{\partial U}{\partial y}=0$ より $\frac{q^2}{Q^2}=\frac{y^3}{x^3}=\tan^3\theta$ を得る。)

1.35 2 つの陽子が $b[\mathrm{m}]$ だけへだたっているときの電場を求めよ。そして (1.38) 式 (これの成立を言及しただけで証明していない) によると、この系のエネルギーは $U=\frac{\epsilon_0}{2}\int \boldsymbol{E}^2 dv=\frac{\epsilon_0}{2}\int(\boldsymbol{E}_1+\boldsymbol{E}_2)^2 dv=$

$\frac{\epsilon_0}{2}\int \boldsymbol{E}_1^2 dv + \frac{\epsilon_0}{2}\int \boldsymbol{E}_2^2 dv + \epsilon_0 \int \boldsymbol{E}_1 \cdot \boldsymbol{E}_2 dv$ で与えられる。ここで、$\boldsymbol{E}_1$、$\boldsymbol{E}_2$ はそれぞれ片方の陽子だけが存在するときの電場を表し、U の最初の 2 項は 1 個の陽子の"電気的自己エネルギー"とよばれるもので陽子の大きさと構造で決まってしまうものである。これは単に定数を系のエネルギーに対し与えるだけなので、系のポテンシャルエネルギーでは無視してきたものである。第 3 項は 2 つの陽子間の距離を含んでいる。この項は一方の陽子を原点にとり極座標表示をしてまず r 積分を実行すれば積分できてしまう。この結果第 3 項の値は $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{b^2}$ なる互いに遠方にある 2 つの陽子を b まで近づけたときの仕事に等しいことが分かる。よってこの場合 (38) 式は正しいことが示せたわけであり、重ね合わせにより (38) 式はどんな電荷分布でも必要な仕事を求めるのに使えることが分かったことになる。(b[cm] とあるが，これを b[m] と読み換えて解こう．第一の陽子が $(0,0,0)$ に，第二の陽子が $(0,0,b)$ にあるものとして，点 (x,y,z) における電場を求める．第一の陽子による電場 $\boldsymbol{E}_1$ は $\boldsymbol{E}_1 = \frac{e}{4\pi\epsilon_0}\frac{(x,y,z)}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$，そして第二の陽子による電場は $\boldsymbol{E}_2 = \frac{e}{4\pi\epsilon_0}\frac{(x,y,z-b)}{[x^2+y^2+(z-b)^2]^{3/2}}$ である．これらを U の表式に代入し，$\boldsymbol{E}_1$ と $\boldsymbol{E}_2$ の干渉項 $\epsilon_0 \int \boldsymbol{E}_1 \cdot \boldsymbol{E}_2 dv$ をたとえば極座標標示により積分すれば $\frac{e}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{b}$ を得る．)