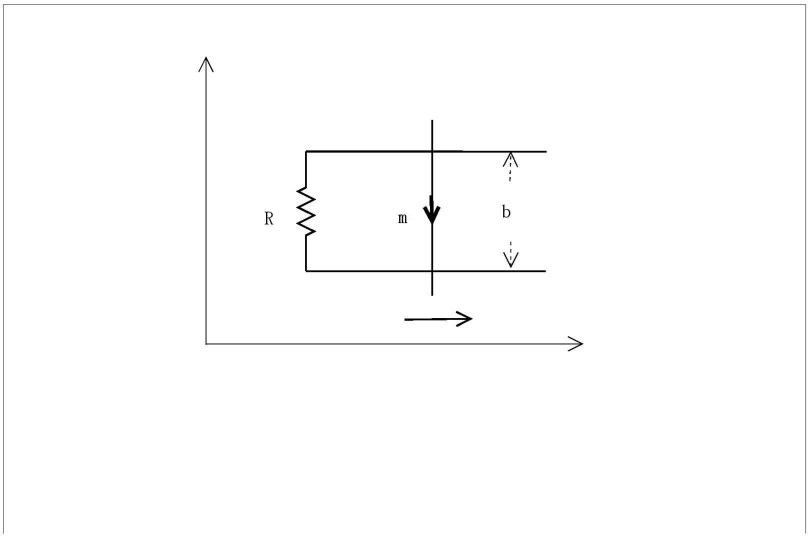
7.14 質量 $m$ の金属の横棒が距離 $b$ だけ離れた 2 本の平行な伝導体のレール上を摩擦なしで滑っている．レールの一端に $R$ の抵抗がつながれている．; この $R$ に比べれば横棒とレールの抵抗は無視できる．図の平面と直交する向きに一様な磁束密度 $\boldsymbol{B}$ がかかっている．時刻 $t = 0$ で横棒が速さ $v_0$ で右向きに動かされた．この後どうなるか．
(a) 横棒はいつかは止まるだろうか．もしそうならそれはいつか．
(b) 横棒の動く距離はどれだけか．
(c) エネルギーの保存はどうなっているだろうか．

解答例:




図のように座標系を設置する．
x 軸方向に $v$ で棒が動いているとき，この回路に誘導される起電力は

$$\mathcal{E} = -Bbv$$

であり，棒には電流 $I = \frac{Bb}{R}v$ が $-\hat{\boldsymbol{y}}$ の方向に流れるので，棒の上の各点で電流素片 $-Ids\hat{\boldsymbol{y}}$ を考えることができる．各電流素片に働く力は

$$d\boldsymbol{F} = -Ids\hat{\boldsymbol{y}} \times \boldsymbol{B} = -\frac{Bb}{R}vBds\hat{\boldsymbol{x}}$$

である．
棒全体に働く力は $s$ について 0 から $b$ まで積分して

$$\boldsymbol{F} = -\frac{B^2b^2}{R}v\hat{\boldsymbol{x}}$$

ということがわかる．
(a) 横棒の重心のしたがう運動方程式は時定数を $\tau = \frac{mR}{B^2b^2}$ として

$$m\frac{dv}{dt} = -\frac{m}{\tau}v$$

これを，問題の初期条件で解いて

$$v = v_0 e^{-t/\tau}$$

よって時刻 $t = \tau = \frac{mR}{B^2b^2}$ のとき速さは $v_0/e \approx 0.37v_0$ と急速に小さくなるが、有限の時間では止まらない．
(b) 動く距離 $L$ は $v$ を 0 から $\infty$ まで $t$ で積分して有限の結果を得る．

$$\int_0^\infty v_0 e^{-t/\tau}dt = v_0\tau = \frac{mR}{B^2b^2}v_0$$

(c) 時刻 0 から任意の時刻 $t$ までに磁場の行なう仕事 $W(t) = \int_0^{x(t)} |F|dx = \int_0^t |F|vdt$ は

$$W(t) = \int_0^t \frac{m}{\tau}{v_0}^2 e^{-2t/\tau}dt = \frac{m}{2}v_0^2(1 - e^{-2t/\tau})$$

一方誘導起電力が

$$\mathcal{E}(t) = -Bbv(t) = RI(t)$$

より，電流は $I = \frac{Bb}{R}v_0e^{-t/\tau}$ と書けるのでジュール熱として抵抗で消費されるエネルギー $U$ は

$$U = \int_0^t RI(t)^2 dt = \frac{1}{2}mv_0^2(1 - e^{-2t/\tau})$$

となる．
よって，任意の時刻で抵抗で消費されるジュール熱がちょうど磁場の行なった仕事 $W$ に等しいことが示せた．エネルギーの保存則はもちろん成立している．