

6.22 一定磁場中の環状閉電流に働くトルクを求めるのがこの問題の目的である。一定の場の量  $B$  が空間内のある方向を向いている。座標系を  $B$  が  $x$  軸と直交するように取ろう。そして環状閉電流が図で示したように  $xy$  平面上にあるものとしよう。環の形やサイズは任意である；電流は合力がゼロになる様に細くよじった導線を通して与える。環の微小素片を取り上げて  $x$  軸に関するトルクの寄与をもとめよう。力の  $z$  成分だけと  $B$  の  $y$  成分だけが問題である。その  $y$  成分を図では  $\hat{y}B_y$  と示した。

全トルクを与える積分表式を書け。そしてこの積分は定数因子を除くと環の囲む面積になっていることを示せ。環状電流の磁気モーメント  $m$  は大きさ  $Ia$  -ここで  $I$  はアンペア単位の電流、 $a$  は平方メートル単位の環の囲む面積- で向きは図で示したように電流の向きにネジをまわしたとき右ネジの進む方向で指定される面の法線方向とするベクトルで定義される。(環状電流およびその磁気モーメントについては Chapter 11 でもう一度ふれる。) この結果は任意の環状電流に働くトルク  $N$  はベクトル式

$$N = m \times B \quad (1)$$

で与えられることを意味しているがこのことを示せ。  
環状電流に働く力はいくらか。

解答例:

題意より、外からかけられている磁束密度は  $x$  成分を持たない。

$$B = B_y \hat{y} + B_z \hat{z}$$

また、 $xy$  平面上にある環状電流の電流素片は  $z$  成分を持たないので

$$Id\ell = Idx \hat{x} + Idy \hat{y}$$

と書ける。磁場が電流素片におよぼす微小な力は

$$dF = Id\ell \times B = I B_z dy \hat{x} - I B_z dx \hat{y} + I B_y dx \hat{z}$$

であるので、 $x$  軸の回りに回転する微小トルク (力のモーメント) は

$$dN = r \times dF = I B_y y dx \hat{x} - I B_z y dx y \hat{y}$$

となる。これを電流経路にそって周回線積分すればトルクの合計が得られる。

$$\begin{cases} \oint y dx = a \\ \oint y dy = 0 \end{cases}$$

を用いると

$$N = I B_y \oint y dx \hat{x} - I B_z \oint y dy \hat{z} = I B_y a \hat{x} = -m_z B_y \hat{x}$$

よって、全トルクは積分表式  $\oint I B_y dy dx$  で表すことができる。ベクトル式は

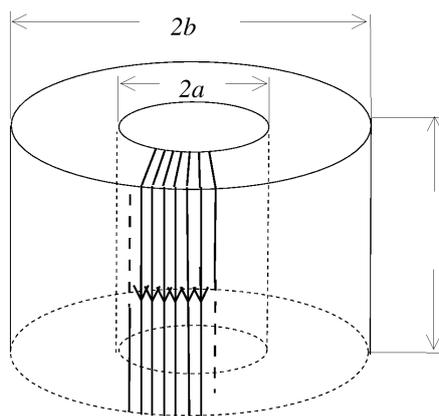
$$\mathbf{N} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}$$

と書けることがわかる。  
合力は周回線積分により

$$\mathbf{F} = I B_z \hat{\mathbf{x}} \oint dy - I B_z \hat{\mathbf{y}} \oint dx + I B_y \hat{\mathbf{z}} \oint dx = \mathbf{0}$$

となっている。よって一定一様な磁場は環状電流全体には力をおよぼさず、回転のモーメント(トルク)だけをあたえる。

6.14 断面が長方形の円環面に均質にコイルが巻かれている。全部で  $N$  巻きである。その部分を図示した。びっしり巻いてあるので上下の面上では電流はきちり放射状に、また内と外の円筒面上では電流は正確に縦に流れていると仮定する。まづ仮定された対称性から磁場はどこでも円周状分布になっている、つまりすべての磁力線は円環の中心軸を取り囲む円になっていることを確かめよ。次に中心部分の孔の中側も含めて円環面の外部ではすべての点で磁場はゼロであることを証明せよ。そして半径の関数として円環面内部の磁束密度の大きさを表せ。



解答例

中心軸上に中心を持つ半径  $r$  の円周  $C$  を考える。ここで円は中心軸と直交する面内にあるとする。

$C$  に沿ってアンペールの法則の積分形を適用すると容易に

$$B(r) = \begin{cases} \frac{\mu_0 NI}{2\pi r} & \text{for the inside of the toroidal coil} \\ 0 & \text{for the outside of the toroid} \end{cases}$$

なる結果が得られる。