

2008年12月5日出題

3.18 アルミ板 B を曲げて作った面の中に絶縁した糸でアルミ板 A を吊り下げた。二枚のアルミ板 A、B は反対符号に帯電していて電位差が $V[V]$ であるとする。A には重力の他にも下向きに引っ張る力 F が働く。この力 F を測定し、幾何学的サイズが分かれば電位差 V を知ることができる。式 (3-27) を用いて、電位差 V を F および他の系の大きさに関する諸量で表せ。

解答例:

板 A の面上での電場は、A 上の総電荷を Q とすると、片側の面上の電荷は $\frac{Q}{2}$ である。よって片面の電荷面密度は $\frac{Q}{2by}$ であるので、A と B の相対する領域での電場は

$$E = \frac{Q}{2\epsilon_0 by}$$

であたえられる。よって、A と B の電位差は

$$V = Es = \frac{Qs}{2\epsilon_0 by}$$

である。

貯えられている静電エネルギーは

$$U = \frac{1}{2}QV = \frac{Q^2s}{4\epsilon_0 by}$$

と表せる。

電荷 Q を変えずに、 y を $y + \Delta y$ に変えるとエネルギーは ΔU だけ減少する。

$$\Delta U = -\frac{Q^2s}{4\epsilon_0 b} \frac{\Delta y}{y^2}$$

これが下向きの力 F で引っ張って Δy だけ変位させる仕事に等しいので

$$F = \frac{Q^2s}{4\epsilon_0 by^2}$$

と書ける。ここで

$$Q = 2\frac{\epsilon_0 by}{s}V$$

を代入すると求める答

$$V = \sqrt{\frac{Fs}{\epsilon_0 b}}$$

を得る。

4.7 100\AA の厚さの銀と 200\AA の厚さの錫を層状に積み重ねて薄い導体を作った。巨視的

に見ると材質は一様に見えるかもしれないが、層面と直交する向きの電流に対する伝導率 σ_{\perp} と面に平行な向きの電流の場合の伝導率 σ_{\parallel} が異なる非等方な物質になっている。銀の伝導率が錫の伝導率の 7.2 倍であるとして比 $\sigma_{\perp}/\sigma_{\parallel}$ を求めよ。URL に掲載していた Problems4.pdf では伝導率とすべきところを抵抗率と誤訳してしまっている。迷惑をかけました。

解答例:

銀および錫の厚さをそれぞれ $L_1 = 100$ [Å]、 $L_2 = 200$ [Å] とする。断面積 $A = w \cdot d$ なる面と直交する電流 I_{\perp} に関して、電流密度の大きさは銀、錫のいずれでも、 $J_{\perp} = I/A$ である。

銀の伝導率を σ_{Ag} 、錫の伝導率を σ_{Sn} とし、銀内の電場の大きさを E_{Ag} 、錫内の電場の大きさを E_{Sn} と表すと、Ohm の法則から

$$J_{\perp} = \sigma_{\text{Ag}} E_{\text{Ag}} = \sigma_{\text{Sn}} E_{\text{Sn}}$$

となる。

銀の両端の電位差を V_1 、錫の両端の電位差を V_2 とすれば、銀と錫を 2 層積んだときの電位差 V は

$$V = V_1 + V_2$$

である。電場の大きさを電位差で表すと

$$E_{\text{Ag}} = \frac{V_1}{L_1}; E_{\text{Sn}} = \frac{V_2}{L_2}$$

よって、2 層積んだ抵抗端子の等価電気伝導率を σ_{\perp} を用いた Ohm の法則は

$$J_{\perp} = \sigma_{\perp} \frac{V}{L_1 + L_2}$$

となるので、電位差を電流密度で表し、 $V = V_1 + V_2$ に代入すると

$$\frac{L_1 + L_2}{\sigma_{\perp}} = \frac{L_1}{\sigma_{\text{Ag}}} + \frac{L_2}{\sigma_{\text{Sn}}}$$

を得る。

これより

$$\sigma_{\perp} = \frac{L_1 + L_2}{L_1/\sigma_{\text{Ag}} + L_2/\sigma_{\text{Sn}}}$$

となる。

銀と錫を 2 層積んだこの素子に、今度は長さ w の辺と平行に電流を流した場合を考える。

直交電流では電位差は銀と錫の各部分の電位差の和であり、電流密度が等しかったのに対し、今の場合は銀と錫の各素子を流れる電流 I_{Ag} と I_{Sn} の和が全電流 I_{\parallel} に等しく、電位差 V_{\parallel} は銀の部分 (断面積 dL_1)、錫の部分 (断面積 dL_2)、等価素子 (断面積 $d(L_1 + L_2)$) 全てで等しい。

電流密度の大きさは

$$\begin{aligned} J_{\text{Ag}} &= \sigma_{\text{Ag}} \frac{V_{\parallel}}{w} \\ J_{\text{Sn}} &= \sigma_{\text{Sn}} \frac{V_{\parallel}}{w} \\ J_{\parallel} &= \sigma_{\parallel} \frac{V_{\parallel}}{w} \end{aligned}$$

だから $I_{\parallel} = I_{\text{Ag}} + I_{\text{Sn}}$ に代入すると

$$\sigma_{\parallel} \frac{V_{\parallel}}{w} d(L_1 + L_2) = \sigma_{\text{Ag}} \frac{V_{\text{Ag}}}{w} dL_1 + \sigma_{\text{Sn}} \frac{V_{\text{Sn}}}{w} dL_2$$

となるので

$$\sigma_{\parallel} = \frac{L_1}{L_1 + L_2} \sigma_{\text{Ag}} + \frac{L_2}{L_1 + L_2} \sigma_{\text{Sn}}$$

を得る。

それぞれのパラメーターに銀と錫の数値を代入して $\sigma_{\perp}/\sigma_{\parallel} = 0.46$ を得る。

2層で求めたこの結果は銀の薄膜と錫の薄膜を同じ枚数だけ積み重ねて作った抵抗素子に関しても同じ答えをあたえる。