2008 年 11 月 14 日出題

課題 1.

$$\frac{\epsilon_0}{2}\int_{\text{全空間}} \boldsymbol{E}^2 dv = \frac{1}{2}\int_{\text{全空間}} \rho\phi dv$$

を示せ。

そして半径 a、全電荷 Q の一様帯電球の電気エネルギーが

$$\frac{3Q^2}{20\pi\epsilon_0 a}$$

となることを上式の両辺を別々に求めて確かめよ。

解答例:

$$\boldsymbol{E}^2 = (\boldsymbol{\nabla}\phi)^2 = \boldsymbol{\nabla}(\phi\boldsymbol{\nabla}\phi) - \phi\boldsymbol{\nabla}^2\phi \tag{1}$$

Poisson equation

$$\boldsymbol{\nabla}^2\phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \tag{2}$$

を用いると

$$\boldsymbol{E}^2 = \boldsymbol{\nabla}(\phi\boldsymbol{\nabla}\phi) + \frac{\rho}{\epsilon_0}\phi \tag{3}$$

を得る。

$$\int_V \boldsymbol{E}^2 dv = \int_V \boldsymbol{\nabla}(\phi\boldsymbol{\nabla}\phi)dv + \int_V \frac{\rho}{\epsilon_0}\phi dv = \oint_{\partial V} \phi\boldsymbol{\nabla}\phi\cdot d\boldsymbol{a} + \int_V \frac{\rho}{\epsilon_0}\phi dv \tag{4}$$

となるから、空間領域 V を非常に大きくとると、第二項の面積分の被積分関数はその境界面上では $\phi\boldsymbol{\nabla}\phi = 0$ となる。よって

$$\frac{\epsilon_0}{2}\int_{\text{全空間}} \boldsymbol{E}^2 dv = \frac{1}{2}\int_{\text{全空間}} \rho\phi dv \tag{5}$$

が成立する。

左辺を一様帯電球について評価してみよう。

三次元極座標表示 $(x, y, z) = (r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)$ を用いて変換すると $dv = dxdydz = r^2 dr d\Omega$ と書ける．ここで微小立体角を $d\Omega = \sin\theta d\theta d\varphi$ と置いた.

$$dv = r^2\sin\theta dr d\theta d\varphi \tag{6}$$

だから

$$\int_{\text{全空間}} \boldsymbol{E}^2 dv = 4\pi\int_0^\infty E(r)^2 r^2 dr = 4\pi(\int_0^a E(r)^2 r^2 dr + \int_a^\infty E(r)^2 r^2 dr) \tag{7}$$

電場は球の内外で異なり、Gauss の法則によりその大きさは

$$E = \begin{cases} \frac{\rho}{3\epsilon_0} r & r < a \\ \frac{\rho}{3\epsilon_0}\frac{a^3}{r^2} & r > a \end{cases} \tag{8}$$

となる。よって

$$\int_{\text{全空間}} \boldsymbol{E}^2 dv = 4\pi(\int_0^a (\frac{\rho}{3\epsilon_0} r)^2 r^2 dr + \int_a^\infty (\frac{\rho}{3\epsilon_0}\frac{a^3}{r^2})^2 r^2 dr) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}(\frac{3Q^2}{5a}) \tag{9}$$

を得る。

右辺を評価してみる。

ポテンシャル ϕ と電荷密度 ρ を用いたエネルギーの公式

$$U = \frac{1}{2}\int_{\text{全空間}} \rho(\boldsymbol{r})\phi(\boldsymbol{r})dv \tag{10}$$

を使おう．ポテンシャル ϕ は

$$\phi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}dv' \tag{11}$$

であたえられる．

$$U = \frac{1}{8\pi\epsilon_0}\int dv\rho(\boldsymbol{r})\int dv'\frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} \tag{12}$$

を計算すれば良い．
この積分を例えば次のように実行してみよう．
ダッシュつきの座標も三次元極座標で表す．
この問題では，電荷密度は球内でしか値をもたず、$\rho = \frac{4Q}{3\pi a^3}$ なる一様だから $d\varphi'$ で積分すると

$$U = \frac{\rho^2}{4\epsilon_0}\int_0^a r^2 dr d\Omega \int_0^a r'^2 dr' \int_0^\pi \frac{\sin\theta' d\theta'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} \tag{13}$$

を得る．θ' での積分は $u = \cos\theta'$ なる置換積分により

$$\int_0^\pi \frac{\sin\theta' d\theta'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} = \frac{1}{rr'}[(r+r') - |r-r'|] \tag{14}$$

をあたえる．r' の積分領域を $0 \leq r' \leq r$ と $r' \geq r$ にわけて絶対値をはずして積分する．

$$U = \frac{\pi\rho^2}{\epsilon_0}\int_0^a r^2(a^2 - \frac{1}{3}r^2) = \frac{4\pi\rho^2}{15\epsilon_0}a^5 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}(\frac{3Q^2}{5a}) \tag{15}$$

という結果を得るが、当然電場の 2 乗を計算した結果と一致する。

課題 2. 平らな絶縁体の板が xy 面上にある。系の電荷はこの板の上だけである。 半空間 $z > 0$ の電位が $\phi = \phi_0 \mathrm{e}^{-kz}\cos kx$ である。ここで ϕ_0 と k は定数である。

(a) この半空間で ϕ はラプラス方程式を満たすことを示せ。

(b) 電場を求めよ。

(c) 板上の電荷分布を求めよ。

解答例:

(a) 単純に計算すると

$$\nabla^2\phi = \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}\phi = -k[\frac{\partial}{\partial x}(\phi_0 \mathrm{e}^{-kz}\sin kx) + \frac{\partial}{\partial z}(\phi_0 \mathrm{e}^{-kz}\cos kx)] = 0$$

を示すことができる。

(b) この系の電場は $z>0$ の場と $z<0$ の場が面対称になっていることに注意する。

$z>0$ の電場は

$$\boldsymbol{E}=(E_x,E_y,E_z)=(-\frac{\partial\phi}{\partial x},-\frac{\partial\phi}{\partial y},-\frac{\partial\phi}{\partial z})=(k\phi_0\mathrm{e}^{-kz}\sin kx,0,k\phi_0\mathrm{e}^{-kz}\cos kx)$$

と計算できる。

一方 $z<0$ の電場は、上述の結果の z 成分の符号を変えたものになるので

$$\boldsymbol{E}=(E_x,E_y,E_z)=(k\phi_0\mathrm{e}^{-kz}\sin kx,0,-k\phi_0\mathrm{e}^{-kz}\cos kx)$$

となることがわかる。

(c) Gauss の法則の積分形を用いると、板の面密度 σ は

$$\sigma=2\epsilon_0E_z(x,y,0)=2\epsilon_0k\phi_0\cos kx$$

であることがわかり 、 x 方向に $2\pi/k$ の周期をもつ周期的電荷分布である。