

2008年10月31日出題

課題1. 電荷密度 ρ 、半径 a の一様帯電球のエネルギーを求めよ。

解答例:

一様帯電球の電荷は $Q = \frac{4\pi}{3}a^3\rho$ である。
半径 r ($0 \leq r \leq a$) の球の有する電荷 $q(r)$ は

$$q(r) = \frac{4\pi}{3}r^3\rho \quad (1)$$

だから、この電荷の作る電場の中で厚さ dr の半径 r の球殻からなる微小電荷 $dq = 4\pi r^2 dr$ を無限遠方から球の中心から r までの距離のところを持って来る仕事を計算することにより、静電エネルギー dU は

$$dU = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q(r)dq}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(4\pi\rho)^2}{3} r^4 dr \quad (2)$$

となることがわかる。

よって求める静電エネルギー U は

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(4\pi\rho)^2}{3} \int_0^a r^4 dr = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(4\pi\rho)^2}{3} \frac{a^5}{5} \quad (3)$$

である。これを全電荷 Q で表せば

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3Q^2}{5a} \quad (4)$$

となる。

課題2. 1.21 水素原子は大きさ e の点電荷のまわりを負電荷が密度 $-\rho(r) = C \exp(-2r/a_0)$ でとりかこんだ状態になっている。ここで、 a_0 はボーア半径で $a_0 = 0.53 \times 10^{-10} \text{m}$ 、 C は負電荷密度を合計すると $-e$ になるように決められる定数である。半径 a_0 の球内の負電荷はいくらか。核から a_0 だけ離れた点での電場を求めよ。

解答例:

水素原子は、陽子の作る電場内を1個の電子(素電荷を e_0 とする)が回っている。量子力学によれば電子は定常的波動関数¹で記述される。-13.6 keV という水素の最低エネルギー状態²での電子の電荷密度は $-\rho(r) = C \exp(-2r/a_0)$ で与えられる。ここで、 C は規格化定数で、全空間で電荷密度を積分したとき電子の電荷 $-e$ に等しくなるように決められる³。

$$\int_0^\infty (-C e^{-2r/a_0}) 4\pi r^2 dr = -e_0$$

から

$$C = \frac{e_0}{\pi a_0^3} \quad \text{よって} \quad \rho(r) = -\frac{e_0}{\pi a_0^3} e^{-2r/a_0}$$

と決められる⁴。

よって、半径 a_0 内に存在する負電荷 $-q$ は

$$-q = 4\pi \int_0^{a_0} \rho(r) r^2 dr = -(1 - 5e^{-2})e_0 \approx -0.323e_0$$

¹各点での波動関数の絶対値の2乗がその点での確率密度を与える。電子の質量 m_e とプランク定数を 2π で割った \hbar により与えられる $a_0 = 4\pi\epsilon_0 \hbar^2 / m_e^2 e_0^2 = 0.053 \text{nm}$ がボーア半径である。

²無限遠をエネルギーゼロの基準とする。最低エネルギー状態を基底状態という。13.6 keV のエネルギーを基底状態に与えると電子が無限遠方に飛び出せるようになり、水素イオンが出来る。

³電子の波動関数は全空間に広がっているため、全空間にわたって確率密度を積分すれば1に等しい条件である。

⁴

$$\int_0^x r^2 e^{-\alpha r} dr = \int_0^x \left(-\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2}\right) e^{-\alpha r} dr = \frac{d^2}{d\alpha^2} \int_0^x e^{-\alpha r} dr = \frac{d^2}{d\alpha^2} \frac{1 - e^{-\alpha x}}{\alpha} = \frac{2 - (2 + 2\alpha x + \alpha^2 x^2) e^{-\alpha x}}{\alpha^3}$$

を用いて計算した。これは、もちろん部分積分法で計算しても得られる。確かめてみよ。

と求まる．基底状態の水素原子では，ボーア半径内には電子の 32.3%分の負の電氣量が詰まっていることがわかる．中心からボーア半径だけ離れた電場の大きさは，陽子の作る電場とこの負の電氣量の作る電場の重ね合わせによって

$$E = \frac{e_0 - q}{4\pi\epsilon_0 a_0^2} = 3.49 \times 10^{11} [\text{V/m}]$$

である．