2008 年 10 月 24 日出題

課題. e なる大きさの電荷と $-e$ の電荷が交互に等間隔で無限に並んでいる 1 次元イオン格子の 1 イオンあたりのポテンシャルエネルギーを求めよ。(ヒント:$\ln(1+x)$ の展開式を使えばよい。)

解答例:
講義で示した 1 イオンあたりのエネルギーの表式は次元にかかわらず成立する。

$$\lim_{N\to\infty}\frac{U_N}{N}=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_{k=2}^{N}\frac{q_1q_k}{r_{1k}}$$

1 次元配列の場合、この右辺を評価する。間隔 a で e と $-e$ の電荷が交互に並んでいるとしよう。
q_1 としてある電荷に着目しその電荷の右側に配列している諸電荷とのクーロンエネルギーは求める 1 個あたりの静電エネルギーに以下の寄予をする。

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4\pi\epsilon_0}[\frac{-e^2}{a}+\frac{e^2}{2a}+\frac{-e^2}{3a}+\cdots+\frac{(-1)^ne^2}{na}+\cdots]=\frac{-e^2}{2}\cdot\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{na}$$

この右辺はヒントにある対数関数のマクローリン展開の公式を用いると

$$\frac{-e^2}{2}\cdot\frac{1}{4\pi\epsilon_0\,a}\ln 2$$

に等しい。
もちろん配列は左側にも延びているので、求める 1 個あたりの静電エネルギーはこの 2 倍となる。よって答えは

$$\frac{-e^2}{4\pi\epsilon_0\,a}\ln 2$$

となる。
これは、もともと左にイオンが並んでいるとき、右に次々イオンと配置して行くときの仕事に等しいことを確かめてみよ。